

# **A Aprendizagem Baseada em Problemas: Formação de Professores de Matemática**

**Elisandra dos Reis Nunes**

2022

**Elisandra dos Reis Nunes**

**A Aprendizagem Baseada em Problemas:  
Formação de Professores de Matemática**

Dissertação apresentada como requisito parcial para conclusão do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP – SP.

Orientador: Prof. Dr. Armando Traldi Junior

São Paulo – SP

2022

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catálogo na fonte  
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo  
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

n972c , Elisandra dos Reis Nunes  
Um caminho para o ensino do conceito de  
números reais / Elisandra dos Reis Nunes . São  
Paulo: [s.n.], 2022.  
58 f.

Orientador: Armando Traldi Junior

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de  
Ciências e Matemática) - Instituto Federal de  
Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP,  
2022.

1. Aprendizagem Baseada Em Problemas (pbl). 2.  
Formação de Professores . 3. Números Reais . I.  
Instituto Federal de Educação, Ciência e  
Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

Elisandra dos Reis Nunes

# **A Aprendizagem Baseada em Problemas: Formação de Professores de Matemática**

Dissertação apresentada e aprovada em  
13/06/2022 como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre em Ensino  
de Ciências e Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Armando Traldi Junior  
IFSP – Câmpus São Paulo  
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Rogério Marques Ribeiro  
IFSP – Câmpus Guarulhos  
Membro da Banca

Prof. Dr. Gilberto Januário  
UFOP – Universidade Federal de Ouro Preto  
Membro da Banca

A Jesus Cristo, aos Meus Pais, aos Meus irmãos e ao Meu Filho.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, minha fonte segura de Amor e Acolhimento. Por Ele tenho me guiado perante os ensinamentos de amor, determinação, busca pela paz, justiça social e sabedoria, gerando em mim forças para resistir e lutar por uma sociedade mais justa e igualitária.

Agradeço a minha mãe Terezinha pelos anos de dedicação, amor, cuidado e proteção direcionados a mim. Por ser minha mãe, minha amiga, meu braço direito e meu maior exemplo de mulher amorosa, generosa, humilde e guerreira.

Agradeço ao meu pai José (*in memoriam*) também pelos cuidados, pelo amor e apoio dedicados a mim, sobretudo, pelo exemplo constante de humildade, pureza de coração, honestidade e sabedoria diante das batalhas da vida.

Agradeço aos meus irmãos Eliane, Edilene, Ednéa, Elâine e Elton por fazerem parte da minha vida, tornando-a mais leve e cheia de sintonia. Vocês são para mim sinônimos do amor, da alegria, da harmonia e da motivação.

Agradeço em especial às minhas irmãs Eliane e Edilene por me ajudarem financeiramente no período em que tive que me afastar de um cargo para frequentar as aulas do curso.

Agradeço novamente à Eliane, que desde sempre me acolhe nos ensinamentos da vida, por ser minha irmã mais velha, exemplo de garra, determinação, inteligência e companhia nas jornadas de estudos, revisando minha dissertação e me auxiliando na resolução das situações-problema.

Agradeço ao meu filho Leonardo, por entender os momentos em que tive de me ausentar para me dedicar aos estudos. Por ser sempre prestativo e companheiro, por ser o meu Amor, meu maior presente, o meu combustível e meu principal motivo de sorrir e acreditar.

Agradeço a Dona Rita, que sempre foi muito importante, se tornando uma segunda mãe, uma amiga e conselheira. Me espelho em seu exemplo de mulher de fé e simplicidade.

Agradeço a alguns amigos especiais: André, Fernanda, Mislene, Patrícia e Ursula (*in memoriam*) que estiveram presentes no decorrer da caminhada, me ajudando, apoiando, entendendo minha reclusão para os estudos e sempre acreditando em mim.

Agradeço aos meus estudantes que me motivam diariamente a acreditar na importância do meu papel enquanto educadora de escola pública, acreditando ser preciso resistir e lutar pela qualidade da educação inclusiva, uma vez que, para esses estudantes, a escola é um dos poucos locais de contato com a cultura formal e a ciência.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), a todos os professores do curso, aos colegas de turma e aos membros dessa Instituição, os quais sempre nos direcionaram e oportunizaram novas aprendizagens.

Agradeço ao primeiro orientador Prof. Dr. Rogério Fonseca, o qual compartilhou comigo a informação a respeito do processo seletivo, abrindo as portas para a minha inserção no curso e na pesquisa. Obrigada pelas orientações e por todo o apoio.

Agradeço ao presente orientador Prof. Dr. Armando Traldi, que aceitou me orientar, abrindo-me as portas para a inserção de novos conhecimentos e um novo olhar sobre a pesquisa. Obrigada pelos materiais compartilhados comigo, pela disponibilidade dos horários das orientações, pela dedicação e por todo o apoio dado.

Agradeço aos membros da banca da Qualificação: Prof. Dr. Diva Novaes; Prof. Dr. Amari Goulart e aos membros da banca da Defesa: Prof. Dr. Gilberto Januário; Prof. Dr. Rogério Marques por terem aceitado o convite, pelas inúmeras contribuições ao trabalho e pelos apontamentos e direcionamentos fundamentais à melhoria da pesquisa.



Instruir-te-ei e ensinar-te-ei o caminho que deves seguir; guiar-te-ei com os meus olhos. (Sl 32, 8).

## RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo identificar as possibilidades e os desafios de elaborar uma proposta de ensino relacionada ao conceito dos números reais a partir do constructo teórico de uma metodologia de ensino ativa, a Aprendizagem Baseada em Problemas (*Problem Based Learning*, PBL) para a formação de Professores de Matemática. A PBL é uma abordagem instrucional que utiliza problemas da vida real para realçar, motivar e favorecer a aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes relevantes à futura atuação do aprendiz como profissional e cidadão. A presente proposta de trabalho se pauta numa abordagem qualitativa de cunho exploratório a fim de abordar o conceito dos números reais por meio de uma sequência didática com problemas reais ou realísticos desenvolvidos de acordo com os preceitos da PBL e destinados a Professores de Matemática. O ensino de Matemática e, conseqüentemente, a Formação do Professor de Matemática, têm fundamental importância na sociedade, visto que ambos colaboram para a construção de uma cidadania consciente e uma população matematicamente letrada, capaz de dominar os conceitos necessários para lidar com a resolução de situações-problemas, além de contribuir para a inserção do indivíduo no mundo do trabalho. Para tanto, as considerações a respeito da interdisciplinaridade e as suas relações com a Aprendizagem Baseada em Problemas fazem-se necessárias mediante as diversas conexões entre os saberes, uma vez que as questões relevantes na formação de professores devem estar voltadas para uma aprendizagem de Matemática mais autônoma e que possibilite o desenvolvimento de habilidades investigativas, interpretativas, críticas e criativas. Dessa forma, vemos nesse estudo a oportunidade de explorar metodologias ativas como a PBL sugerindo sua aplicação na formação de Professores de Matemática, acreditando ser fundamental investir na formação de professores para que esses profissionais tenham condições de aperfeiçoar sua prática pedagógica e de despertar a consciência para o seu papel social capaz de gerar transformação e impactar positivamente o contexto escolar. Sendo assim, consideramos que as principais possibilidades para a elaboração da proposta de ensino são: ofertar aos professores de Matemática um espaço de formação a partir da reflexão coletiva, propondo problemas compatíveis com a sua realidade profissional e auxiliá-los no direcionamento para a resolução das situações-problema de maneira a explorar a metodologia de ensino proposta, ao mesmo tempo em que se aprofunda a aprendizagem acerca do conceito dos números reais. Já os principais desafios podem ser observados a partir de três eixos: PBL, formação de professores e números reais ao elaborar situações-problemas que explorassem o conceito de número real se utilizando da fundamentação teórica da disciplina de Matemática num viés acessível a estudantes da Educação Básica, buscando aproximar a Matemática aplicada com aquela produzida no âmbito escolar. A partir dessa pesquisa foi produzido um produto educacional intitulado “Um caminho para o Ensino do conceito de Números Reais” que segue anexado ao texto desta pesquisa.

**Palavras-chaves:** Formação de Professores. Matemática. Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL). Números Reais.

## ABSTRACT

This research aims to identify the possibilities and challenges of developing a teaching proposal related to the concept of real numbers from the theoretical construct of an active teaching methodology, Problem Based Learning - PBL (Problem Based Learning) for training of Mathematics Teachers. PBL is an instructional approach that uses real-life problems to enhance, motivate and favor the learning of concepts, procedures, and attitudes relevant to the learner's future performance as a professional and citizen. This work proposal is based on a qualitative approach of an exploratory nature in order to approach the concept of real numbers through a didactic sequence with real or realistic problems developed according to the precepts of PBL and intended for Mathematics Teachers. Mathematics teaching and, consequently, Mathematics Teacher Training, are of fundamental importance in society, since both contribute to the construction of a conscious citizenship and a mathematically literate population, capable of mastering the concepts necessary to deal with solving problems. problem situations, in addition to contributing to the insertion of the individual in the world of work. Therefore, considerations about interdisciplinarity and its relations with Problem-Based Learning are necessary through the various connections between knowledge, since the relevant issues in teacher training must be focused on a more mathematical learning process. autonomous and that enables the development of investigative, interpretive, critical, and creative skills. Thus, we see in this study the opportunity to explore active methodologies such as PBL, suggesting its application in the training of Mathematics Teachers, believing that it is essential to invest in teacher training so that these professionals are able to improve their pedagogical practice, raising awareness for their social role capable of generating transformation and positively impacting the school context. Therefore, we consider that the main possibilities for the elaboration of the teaching proposal are: offering Mathematics teachers a space for training based on collective reflection, proposing problems compatible with the professional reality, and helping them in the direction to solve situations-problem to explore the proposed teaching methodology, while deepening the learning about the concept of real numbers. The main challenges can be observed from three axes: PBL, teacher training and real numbers when elaborating problem-situations that explore the concept of real number using the theoretical foundation of the mathematics subject in a bias accessible to Basic Education students, seeking to bring applied mathematics closer to that produced in the school environment. From this research, an educational product was produced entitled "A way to teach the concept of Real Numbers", which is attached to the research.

**Keywords:** Teacher training. Mathematics. Problem Based Learning (PBL). Real numbers.

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> – Descrição dos respectivos trabalhos que compõem a revisão bibliográfica referente aos Números Reais .....	25
<b>Quadro 2</b> – Referências Pedagógicas do PBL .....	26
<b>Quadro 3</b> – Números inteiros positivos ímpares.....	158

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> – Conversa no aplicativo <i>WhatsApp</i> .....	115
<b>Figura 2</b> – Triângulo retângulo isósceles .....	124
<b>Figura 3</b> – representação dos segmentos AB e CD na razão de 8/5.....	126
<b>Figura 4</b> – representação dos segmentos AB e CD na razão de 29/26.....	127
<b>Figura 5</b> – Demonstração geométrica da existência de segmentos incomensuráveis .....	128
<b>Figura 6</b> – Representação geométrica da diagonal do quadrado de lado OU .....	130
<b>Figura 7</b> – Representação da semirreta com origem em O .....	130
<b>Figura 8</b> – Segmentos colocados em fila.....	131
<b>Figura 9</b> – Exemplo de abordagem de $\pi$ em livros didáticos.....	135
<b>Figura 10</b> – Quadrado inscrito e quadrado circunscrito na circunferência.....	138
<b>Figura 11</b> – Octógono inscrito e octógono circunscrito na circunferência.....	139
<b>Figura 12</b> – Círculos com perímetros muito próximos à medida do comprimento da circunferência .....	139
<b>Figura 13</b> – Diagrama- Função Bijetora.....	150
<b>Figura 14</b> – Diagrama 1 – conjunto dos números reais .....	154
<b>Figura 15</b> – Diagrama 2 – conjunto dos números reais .....	155

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABP	Aprendizagem Baseada em Problemas
APD	Aprendizagem pela Descoberta
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
FAMEMA	Faculdade de Medicina de Marília
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
LDBEN	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
PBL	<i>Problem-Based Learning</i> , Aprendizagem Baseada em Problemas
PG	Progressão Geométrica
PNAD	Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios
PNE	Plano Nacional de Educação
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
Prova Brasil	Avaliação Nacional do Rendimento Escolar
PUCSP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
TDIC	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
UEL	Universidade de Londrina
USP	Universidade de São Paulo

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	14
1.1 JUSTIFICATIVA .....	19
1.2 PROBLEMA DA PESQUISA .....	22
1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA .....	22
1.4 FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA/TEÓRICA.....	23
1.5 REFERENCIAIS TEÓRICOS .....	26
<b>2 A APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS</b> .....	34
2.1 BREVE HISTÓRICO E PRESSUPOSTOS TEÓRICOS DA APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS.....	35
<b>2.1.1 Objetivos Educacionais da Aprendizagem Baseada em Problemas</b> .....	40
<b>2.1.2 O Papel do Professor na Aprendizagem Baseada em Problemas</b> .....	42
<b>2.1.3 O papel do Estudante na Aprendizagem Baseada em Problemas</b> .....	45
<b>2.1.4 O problema na Aprendizagem Baseada em Problemas</b> .....	49
<b>2.1.5 O Processo na Aprendizagem Baseada em problemas</b> .....	51
<b>2.1.6 Vantagens e Desvantagens da Aprendizagem Baseada em Problemas</b> ...	55
<b>2.1.7 A Aprendizagem Baseada em Problemas e as Competências Socioemocionais</b> .....	58
2.2 FORMAÇÃO DE PROFESSORES .....	71
<b>2.2.1 A Formação de Professores e a Aprendizagem Baseada em Problemas</b> .	72
<b>2.2.2 Formação inicial do professor de Matemática</b> .....	76
<b>2.2.3 Formação Continuada do Professor de Matemática</b> .....	83
2.3 NÚMEROS REAIS .....	92
<b>2.3.1 Revisão Bibliográfica</b> .....	94
<b>3 SITUAÇÕES-PROBLEMA RELACIONADAS AO CONCEITO DE NÚMEROS REAIS E ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA</b> .....	109
3.1 SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM – APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS.....	113
<b>3.1.1 Noções sobre Números Reais</b> .....	113
<b>4 CONSIDERAÇÕES</b> .....	161
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	165

## 1 INTRODUÇÃO

Diante das transformações econômicas, políticas, sociais e culturais, há a necessidade de constante ressignificação do papel da escola, para que ela consiga atender às demandas das mudanças que ocorrem de maneira rápida e dinâmica, buscando promover o desenvolvimento de profissionais capazes de pensar e aprender constantemente. A escola deve também criar oportunidades para que os conhecimentos sejam construídos e propagados, para que os estudantes adquiram valores e habilidades para o exercício autônomo, consciente e crítico da cidadania, articulando os diversos saberes.

Entre os saberes a serem desenvolvidos, temos o conhecimento matemático, essencial para a formação integral do estudante, conforme versa a própria Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (MEC, 2018, p. 263).

Porém, reiteramos a existência de notória discussão, que parte dos diversos atores da Educação, em torno de uma possível crise no ensino de Matemática. O reforço desse questionamento tem se estabelecido mediante a observação dos dados de desempenho dos estudantes que aparecem, frequentemente, abaixo do esperado tanto em avaliações internas, como a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Prova Brasil), quanto externas, como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa). Se compararmos o rendimento com os índices internacionais veremos que ocupamos as últimas posições da lista.



Devido a isso, o Governo Federal, em 2007, instituiu o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), focando na melhoria do desempenho escolar, com o objetivo de garantir a aprendizagem dos estudantes em parceria com estados e municípios.

Na terceira versão do parecer do Ministério da Educação (MEC) atualizado sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais e Base Nacional Comum Curricular, observamos que:

Nos últimos dez anos, de 2007 a 2017, os incrementos de melhoria em matemática no 5º ano do EF foram de 25 pontos, olhando o 9º ano esses incrementos foram de apenas 4 pontos; já no 3º ano do EM houve um retrocesso de -14 pontos. Nos anos iniciais do EF o país vem melhorando o Ideb e cumprindo a meta projetada; para os anos finais do EF, o Ideb melhora ao longo dos dez anos, mas como é uma melhoria leve, não vem conseguindo cumprir a meta projetada para o Ideb de 2013 para cá. Já no EM o Ideb está absolutamente estagnado, e não apenas está deixando de cumprir a meta projetada, como vem, a cada dois anos, se distanciando ainda mais dela. (MEC, 2019, p. 6).

O texto citado mostra resultados preocupantes dos estudantes a respeito da aprendizagem em Matemática, em especial, na dificuldade de compreender e relacionar os conceitos matemáticos à sua aplicabilidade social.

As diversas tentativas de explicação da problemática transitam pelos fatores de: falta de investimento na formação do professor, condições inadequadas de trabalho no magistério, dificuldades de aprendizagem dos estudantes, desvalorização da escola. Consideramos que cada aspecto dessa problemática merece a devida análise por cumprir papel determinante para o desempenho dos estudantes nessa área do conhecimento.

Em consonância com o exposto, cabe-nos salientar a importância de investimentos na educação e de políticas públicas educacionais que dediquem esforços para a busca de estratégias e recursos que auxiliem estudantes e professores na superação dessas questões uma vez que o insucesso nas referidas avaliações é o principal sinalizador da grande dificuldade dos estudantes em compreender e utilizar a Matemática como ferramenta na resolução de problemas.

Dessa forma, reiteramos a importância de se investir principalmente na formação de professores, ofertando capacitações que contribuam com a inserção de práticas pedagógicas articuladas às aprendizagens significativas e em consonância

com o letramento matemático para o desenvolvimento da cidadania na construção coletiva de compreensão e resolução de situações-problema presentes nos diversos contextos.

Nesse sentido, a BNCC (MEC, 2018, p. 266) destaca que:

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental.

E complementa que:

Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (MEC, 2018, p. 266).

Salientamos ainda, que numa sociedade permeada pelas tecnologias de informação e de comunicação, o papel da escola deve se mostrar ainda mais compatível com as inovações tecnológicas e sociais, pois o que ela pode oferecer não é mais a simples informação, mas sim a interpretação, a reflexão, a crítica e o direcionamento sobre a informação, transformando-as em conhecimentos por parte dos estudantes.

As mudanças educativas, o desenvolvimento tecnológico, as mudanças políticas, as reformas educativas e as mudanças sociais impõem ao trabalho pedagógico uma dinâmica particularizada a cada tempo, espaço, currículo, comunidade atendida e isso exige adequações da escola e de seus profissionais. (DOMINGUES, 2009, p. 24)

Portanto, para que o ensino de Matemática se torne significativo aos estudantes de modo a desenvolver habilidades de raciocínio que colaborem para a sua autonomia diante do conhecimento, deparamo-nos com a necessidade de práticas pedagógicas mais consistentes com tais objetivos.

O modo de entender e fazer a educação, a forma como ela é trabalhada em sala de aula, espaço de interação entre professores e

alunos, é o que vai caracterizar, em grande parte, uma formação profissional no sentido progressista, crítico reflexivo ou conservador e tecnicista (SORDI; BAGNATO, 1998, p. 85).

Pensar a Matemática na escola como um processo de formação de conceitos exige repensar o papel do professor, pensar sua atuação, as condições de viabilização do trabalho pedagógico, o processo de conscientização e reflexão para a necessidade de uma nova postura perante o estudante.

Desse modo, a pesquisa defende a utilização de metodologias ativas de ensino na formação de professores, para que se estruture uma mudança de paradigma, contribuindo para o ensino centrado no estudante, possibilitando dessa forma, a articulação de saberes relevantes aos desafios impostos pela sociedade.

A metodologia proposta é conhecida como *Problem Based Learning (PBL)*, e aparece como uma tendência pertinente às exigências impostas pela sociedade atual. Segundo Masetto (2004), ela prioriza o aprendizado autodirigido, centrado no estudante, que se mobiliza de forma colaborativa para a resolução de problemas formulados pelos professores, os quais incluem, incorporam e compreendem os objetivos educacionais a serem alcançados.

A escolha dessa metodologia se deve ao fato de que ela se utiliza de problemas da vida real para estimular o ensino e a pesquisa, o pensamento crítico e reflexivo, as habilidades para resolver problemas contextualizados e a aquisição de conhecimentos teóricos e práticos, oportunizando formação com trabalho em grupo criativo e colaborativo, além de promover inovação, a habilidade de comunicação e o domínio de atitudes profissionais vinculadas ao cotidiano social.

Além disso, a PBL contribui para o ensino centrado no estudante, descentralizando do professor o papel de “detentor do saber” no processo de aprendizagem, oportunizando, aos estudantes, o desenvolvimento da autonomia, da responsabilidade e da aprendizagem emancipatória.

Dessa forma, pontuamos a urgência de se consolidar na formação de professores uma perspectiva de inovação, com a presença de metodologias ativas desde a formação acadêmica. Defendemos a utilização de metodologias ativas para a expansão de uma prática que dá ênfase ao protagonismo estudantil, à criticidade, à reflexão sobre a ação e ao trabalho colaborativo.

O professor imbuído de conceitos construtivistas possui a convicção de que ensinar não é transferir conhecimento, mas oferecer subsídios para a sua própria produção ou a sua construção, orientando e descentralizando do próprio docente o processo de aprendizagem (FREIRE, 1996, p. 47).

Segundo Ribeiro (2008), a PBL fundamenta-se em princípios educacionais e em resultados da pesquisa em ciência cognitiva, os quais mostram que a aprendizagem não é um processo de recepção passiva e acumulação de informações, mas de construção de conhecimentos. Assim, para que informações se tornem conhecimento é preciso ativar conceitos e estruturas cognitivas existentes acerca do assunto, permitindo aos estudantes que as elaborem e as ressignifiquem.

Com essa perspectiva, buscamos associar a metodologia PBL ao desenvolvimento das competências socioemocionais, pautados na formação integral do estudante, e nela ressaltando os aspectos críticos e reflexivos, dotando-o de valores morais e de responsabilidade social, viabilizando também a base de convivência entre professor e aluno de forma a estabelecer um espaço de interação saudável e promissora.

Entendemos que um ensino centrado no estudante, responsável pela sua aprendizagem, oportunize o desenvolvimento de suas competências socioemocionais potencializando a participação, estimulando a sua criatividade e o aprimoramento de sua criticidade e autonomia.

A questão da autonomia na construção de um conhecimento significativo e permanente e o desenvolvimento de atitudes profissionais e cidadãs por parte dos estudantes representam o foco dessa pesquisa que se preocupa com a temática de formação do professor de matemática para além do domínio dos conteúdos, focando numa formação capaz de enraizar a cultura da Matemática suficiente para a transformação da realidade que o cerca, buscando compreender como essa formação pode ter efetiva intervenção no processo de aprender para ensinar Matemática.

Por fim, convém salientar que não há no meio acadêmico muitas pesquisas ou materiais didáticos que explorem tal metodologia nos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos, porém, apostamos na eficácia de tal metodologia devido aos bons resultados que ela apresenta em áreas como a Pedagogia, a Arquitetura e a Engenharia. Optamos também por escolhê-la, por

considerá-la promissora para o ensino de conceitos matemáticos relacionados à prática profissional docente, podendo ser eficaz para o ensino da Matemática.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

As temáticas mais relevantes da educação têm como aspecto crucial a necessidade de ressignificar o papel da escola, com o intuito maior de manter os estudantes comprometidos e engajados na sua aprendizagem.

Outro aspecto relevante dessas temáticas é a necessidade de revisão do currículo, que, por muitas vezes, se apresenta fragmentado e desconectado da realidade dos estudantes, fazendo com que muitos, por não enxergarem significado nos conceitos trabalhados, abandonem os estudos.

Segundo os dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), temos que:

O atraso ou abandono escolar atinge 12,5% dos adolescentes de 11 a 14 anos e 28,6% das pessoas de 15 a 17 anos. Entre os jovens de 18 a 24 anos, quase 75% estavam atrasados ou abandonaram os estudos, sendo que 11,0% estavam atrasados e 63,5% não frequentavam escola e não tinham concluído o ensino obrigatório. (IBGE, 2020).

Paulo Freire (1996) dizia que a educação é sobretudo um diálogo, que o currículo escolar deve ser relevante para a realidade do aluno, partindo de sua cultura, e que a educação é uma forma de emancipação: aprender a ir da “consciência do real” (o mundo tal como ele é) para a “consciência do possível” (o mundo tal como ele pode ser) (BLIKSTEIN, 2010, p. 4).

Nesse sentido, buscamos contemplar nessa pesquisa caminhos que tenham como foco o direcionamento de ações que visem a melhoria e o aperfeiçoamento da prática pedagógica pelo professor, ao mesmo tempo em que se busca compreender e explorar metodologias ativas como a PBL, sugerindo sua aplicação para a formação de professores de matemática, acreditando ser possível contribuir para o desenvolvimento de uma consciência crítica profissional, capaz de gerar transformação e impactar positivamente o contexto escolar.

Além disso, justifica-se direcionar essa pesquisa ao estudo dos números reais, com o intuito de auxiliar professores de Matemática para o direcionamento de

um processo significativo de ensino, capaz de conduzir os estudantes à exploração de grande variedade de ideias que os induzam a incorporar os contextos do mundo real aos conceitos matemáticos, buscando minimizar defasagens nas suas aprendizagens e, também, garantir sua permanência na escola, e sobretudo, contribuir para uma formação emancipatória.

Outro aspecto essencial explorado na pesquisa diz respeito ao desenvolvimento de competências socioemocionais por meio da utilização de metodologias ativas, em especial a PBL. Aqui enfatizamos a necessidade de se contemplar a formação integral do estudante a partir da exploração da Aprendizagem Baseada em Problemas na formação de professores, na qual, por meio da aplicação, experimentação e reflexão da metodologia, eles possam compreender e desenvolver habilidades essenciais, como a inteligência emocional, compartilhando, posteriormente, a experiência com os estudantes.

É primordial saber lidar com as emoções e sentimentos para se conseguir estabelecer boas relações com as pessoas. E nesse sentido destacamos a PBL favorável ao desenvolvimento de tal habilidade, uma vez que ela propicia o trabalho em equipe, frisando a importância da inteligência emocional no gerir das relações.

Entendemos que as relações sociais potencializam a aprendizagem, além disso, desenvolver o estudante na sua completude, significa prioritariamente dar suporte ao professor de modo a garantir a ele formação sólida, priorizando não somente o domínio dos conteúdos, como também a articulação entre teoria e prática, além do contato com metodologias ativas que busquem aperfeiçoar as suas práticas pedagógicas articuladas com o desenvolvimento de competências fundamentais.

Ao se dar importância ao papel do professor no contexto escolar, há a exigência de se refletir sobre a sua formação, pois diante da responsabilidade de garantir um ensino significativo aos estudantes, torna-se imprescindível que o professor domine em profundidade e extensão os objetos de estudo a serem lecionados, suas propriedades e aplicações, sua organização estrutural e sequencial, buscando associar os conteúdos à aplicabilidade social, além de estabelecer relações entre as diversas áreas do conhecimento.

Nesse sentido, a PBL propõe a integração entre as disciplinas como uma inovação para o ensino de forma a salientar que é possível estabelecer conexão

entre o ensino baseado em disciplinas e aquele baseado em problemas na qual se busca integrar os conhecimentos de maneira interdisciplinar.

Tal metodologia têm como premissa o envolvimento do estudante em situações-problemas relevantes à sua atuação profissional:

O ensino baseado em problemas trabalha questões relevantes, atuais, para quais a sociedade, as empresas ou a vida real ainda não encontraram solução. Ao analisar mais profundamente essas questões, os alunos aprendem e utilizam disciplinas e teorias consideradas necessárias à resolução de determinado problema, isto é, os problemas definem as disciplinas e vice-versa (ENEMARK; KJAERSDAM, 2009, p. 24).

A renovação do Ensino Médio sugerida pelo Plano Nacional de Educação (PNE), defende na Meta 3, estratégia 3.1, práticas pedagógicas com abordagens interdisciplinares:

3.1) institucionalizar programa nacional de renovação do ensino médio, a fim de incentivar práticas pedagógicas com abordagens interdisciplinares estruturadas pela relação entre teoria e prática, por meio de currículos escolares que organizem, de maneira flexível e diversificada, conteúdos obrigatórios e eletivos articulados em dimensões como ciência, trabalho, linguagens, tecnologia, cultura e esporte [...] (BRASIL, 2014).

Entretanto esta mudança não é tarefa simples, embora a cultura da interdisciplinaridade não esteja presente apenas dentro da escola, mas em diversos contextos sociais, fazendo com que os conhecimentos desenvolvidos se relacionem entre si. Daí a importância da escola em desenvolver educação interdisciplinar estabelecendo conexão entre os conhecimentos, ofertando, sobretudo, a construção de aprendizagens que integrem as diferentes áreas do saber.

Nessa perspectiva, encontra-se a PBL, uma metodologia de ensino que propõe o conhecimento não restrito a campos delimitados de especialização, sugerindo assim a integração de conceitos interdisciplinares.

Sendo assim, espera-se integrar conhecimentos acerca do conceito dos Números Reais na formação do professor de Matemática por meio de uma metodologia interdisciplinar na sua ação educativa. Buscando, então, minimizar as defasagens de conceitos matemáticos relacionados ao objeto de estudo, desenvolvendo competências fundamentais, ao mesmo tempo em que se auxilia

estudantes e professores a se apropriarem de uma nova leitura de mundo por meio de práticas transformadoras.

## 1.2 PROBLEMA DA PESQUISA

A problemática que direciona a pesquisa envolve a busca de encaminhamentos ou respostas para a seguinte questão:

- Quais são as possibilidades e desafios de elaborar uma proposta de ensino relacionada ao conceito dos números reais a partir do constructo teórico da metodologia ativa, em especial a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) para a formação de professores de Matemática de maneira a desenvolver competências fundamentais?

## 1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA

O objetivo do estudo foi explorar possibilidades e desafios relacionados ao conceito dos números reais a partir do constructo teórico da metodologia PBL para a formação de professores de Matemática buscando contribuir significativamente para o aperfeiçoamento da prática pedagógica.

Dentre os objetivos específicos estão:

- ✓ Propor um rol de problemas de acordo com os preceitos da PBL abordando o conceito dos números reais a fim de direcionar os professores de Matemática a uma aprendizagem significativa acerca do assunto.
- ✓ Investigar, do ponto de vista exploratório, a viabilidade da implementação de uma metodologia ativa, a saber, a PBL, integrada às premissas da interdisciplinaridade voltada aos processos de ensino e de aprendizagem dos números reais.
- ✓ Associar a PBL favorável ao desenvolvimento de competências socioemocionais na formação de professores de Matemática de maneira a validar sua contribuição para a formação integral do estudante.



A presente dissertação está estruturada em três seções. Na primeira seção são apresentados os aspectos gerais acerca da pesquisa, destacando a justificativa, os objetivos, as questões de pesquisa, bem como a fundamentação metodológica e os referenciais teóricos.

Na segunda seção são exploradas as principais ideias a respeito da metodologia de ensino adotada, a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL), compreendendo o percurso histórico, seus teóricos, as vantagens e as desvantagens, a sua relação com o desenvolvimento de competências socioemocionais, bem como a sugestão de eficácia desta metodologia para a formação de professores.

Ainda na segunda seção, discorreremos a respeito da Formação de Professores, abordando a formação inicial e continuada do professor de Matemática, com o propósito de compreender de que maneira elas acontecem e propor uma metodologia de ensino compatível com as necessidades apresentadas pela sociedade atual.

Para encerrar a segunda seção, traremos considerações a respeito do objeto matemático de estudo, o conjunto dos Números Reais. Nele é apresentada revisão bibliográfica explorando pesquisas que dissertam acerca das principais dificuldades apresentadas pelos estudantes da Educação Básica em torno de seu ensino.

Na terceira seção teremos as situações-problema relacionadas ao conceito dos números reais e as orientações didáticas para a formação de professores de Matemática, bem como os desdobramentos das sugestões para possíveis resoluções. Nesta seção são explorados aspectos relevantes da PBL, propondo a aplicação da sequência nos moldes da metodologia.

Por fim, encerramos a dissertação apresentando as considerações e o produto educacional.

#### 1.4 FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA/TEÓRICA

A presente proposta de trabalho pauta-se numa abordagem qualitativa contemplada sob perspectiva exploratória, a fim de investigar as potencialidades da Aprendizagem Baseada em Problemas abordando o conceito dos números reais para a formação inicial e continuada de professores de Matemática.

A fundamentação da pesquisa exploratória nesse caso, se dá pela exploração de três eixos fundamentais: o primeiro diz respeito aos conhecimentos acerca da metodologia adotada, a PBL; o segundo busca conhecimentos sobre a formação inicial e continuada dos professores de Matemática, e o terceiro eixo explora conhecimentos acerca do conceito de Números Reais.

Para Gil (2007, p. 44), os exemplos mais característicos desse tipo de pesquisa tratam de investigações sobre ideologias ou aqueles que se propõem à análise das diversas posições acerca de um problema.

A abordagem qualitativa foi escolhida para direcionar este estudo, uma vez que apresenta características importantes ao pesquisador como a abordagem descritiva, ou seja, tudo que faz parte do contexto pode ser descrito e oferecer elementos para esclarecer pontos do objeto de estudo.

Dessa forma, buscamos ter contato com o maior número de textos (livros, dissertações e artigos) sobre os eixos: Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL), conceito dos Números Reais e formação de professores.

Em relação a PBL foram estudadas dissertações e teses que pontuaram desde as origens da metodologia até suas aplicações, destacando sua possível eficácia para o desenvolvimento de competências socioemocionais e formação de professores.

Quanto ao tema Formação de Professores, fundamentamos nossa pesquisa em autores como FREIRE (1996), PONTE (2002), FIORENTINI (2008), entre outros. Além de um levantamento significativo de teses e dissertações voltadas ao tema.

A partir das obras encontradas, selecionamos nas referências bibliográficas outros textos pertinentes. Ao reunir quantidade significativa de referências começamos, portanto, a delinear a revisão da literatura:

Fazer a revisão da literatura em torno de uma questão é, para o pesquisador, revisar todos os trabalhos disponíveis, objetivando selecionar tudo o que possa servir em sua pesquisa. Nela tenta encontrar essencialmente os saberes e as pesquisas relacionadas com sua questão; deles se serve para alimentar seus conhecimentos, afinar suas perspectivas teóricas, precisar e objetivar seu aparelho conceitual. Aproveita para tornar ainda mais conscientes e articuladas suas intenções e, desse modo, vendo como outros procederam em suas perspectivas, vislumbrar sua própria maneira de fazê-lo. (LAVILLE; DIONNE, 1997, p. 112).

Vale ressaltar que para compor a revisão da literatura a respeito do tema Conceito dos Números Reais, fizemos levantamento de dissertações e artigos nos periódicos do programa de pós-graduação de duas instituições de ensino superior, a saber: Universidade de São Paulo (USP) e Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC). Tais estudos apontam dificuldades de aprendizagem acerca dos conteúdos matemáticos devido à falta de conhecimento referentes aos números reais e suas propriedades. Assim, as dissertações desenvolvidas no programa de pós-graduação da USP-SP e da PUC-SP estão presentes nessa revisão bibliográfica como fontes de pesquisa. A escolha de tais instituições de ensino se deve ao fato de considerarmos instituições de referência em Educação no estado de São Paulo, colaborando significativamente com a produção de pesquisas de qualidade e relevantes ao tema buscado.

Foram selecionados quatro trabalhos, para os quais a análise foi precedida da leitura integral dos textos, determinada pela área: Educação, Campo de conhecimento: Matemática, tendo em conta a especificidade do recorte temático: Números Reais.

As principais contribuições dessas pesquisas estão na sistematização das dificuldades de estudantes e professores da Educação Básica acerca dos processos de ensino e de aprendizagem dos Números Reais.

No Quadro 1 descrevemos os respectivos trabalhos na ordem em que aparecem no texto desta pesquisa:

**Quadro 1** – Descrição dos respectivos trabalhos que compõem a revisão bibliográfica referente aos Números Reais

<b>Autor e Ano</b>	<b>Discriminação do trabalho e Título</b>
COSTA, Letícia Vieira Oliveira (2009)	Dissertação de Mestrado: Números Reais no Ensino Fundamental: alguns obstáculos epistemológicos.
BARTOLOMEU, Vivaldo de Souza (2010)	Dissertação de Mestrado: Conhecimentos e dificuldades dos estudantes do ensino médio relacionadas ao conjunto dos números reais.
SILVA, Benedito Antônio da e PENTEADO, Cristina Berndt (2009)	Artigo: Fundamentos dos números Reais: Concepção de professores viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio.
SANTOS, Alan Silva (2017)	Dissertação de Mestrado: Um estudo sobre o Conceito de Densidade do conjunto dos Números Racionais e do conjunto dos Números Irracionais: Uma abordagem com tecnologias.

Fonte: Elaborado pela autora.

Autores como LIMA (2012ab), ÁVILA (2006) e NIVEN (1984) também fundamentaram a pesquisa quanto ao tema Números Reais, compondo os estudos na elaboração de orientações didáticas referentes às situações-problema.

Em relação ao produto educacional, optamos em propor problemas exemplares e suas respectivas orientações didáticas, de acordo com os preceitos da metodologia de ensino adotada direcionados a professores e futuros professores de Matemática da Educação Básica.

### 1.5 REFERENCIAIS TEÓRICOS

Os referenciais teóricos que direcionam a pesquisa são de alguns autores que contribuíram para que se pudesse propor um modo de pensar a educação valorizando o pensamento crítico e reflexivo, ressaltando habilidades para a resolução de situações-problemas por meio de práticas transformadoras que contribuam para a formação integral do estudante.

Num primeiro momento, a pesquisa é referenciada em autores que dissertam a respeito da metodologia de ensino adotada, a PBL. Dessa forma, ao se buscar as raízes da PBL houve a necessidade de fundamentação em premissas de vários teóricos, dentre eles, John Dewey, um filósofo e pedagogo norte-americano, Jerome Bruner, um psicólogo estadunidense e Paulo Freire, um educador e filósofo brasileiro.

No artigo “Como preparar os professores Brasileiros da Educação Básica para a Aprendizagem Baseada em Problemas?” (SILVA FILHO *et al.*, 2010, p. 10), há um quadro de referências pedagógicas que mostra as contribuições de diversos pensadores relacionados com as ideias da PBL (Quadro 2):

**Quadro 2 – Referências Pedagógicas do PBL**

Pensador	Relações de suas ideias com PBL
John Dewey	Problematização e análise críticas da realidade, construção dialógica do conhecimento e estímulo à colaboração; associação da teoria com a prática, valorização das situações de experimentação e da capacidade de pensar do aprendiz, construção de cenários investigativos.

Pensador	Relações de suas ideias com PBL
Jerome Bruner	Aprendizagem por descoberta; aprofundamento na investigação e na complexidade de conteúdos e teorias (“currículo em espiral”); elaboração de perguntas que estimulem o interesse, a curiosidade e a capacidade de construção de conhecimentos pelos aprendizes.
Paulo Freire	Problematização e combate à “Educação Bancária” alienante; desenvolvimento de uma postura crítica da realidade por parte dos aprendizes; valorização da cultura dos aprendizes.
Jean Piaget	Aprendizagem pela atividade do aprendiz, estímulo pela procura/construção do conhecimento; importância da construção de estratégias mediadoras para a construção do conhecimento.
Lev Vygotsky	Valorização dos conteúdos de aprendizagem como resultados dos processos históricos culturais e sociais; importância do professor como mediador da aprendizagem.
Carl Rogers	Ensino centrado nos aprendizes; professor atuando como facilitador da aprendizagem; construção da aprendizagem a partir do confronto do aprendiz com problemas de natureza social, ética, filosófica e/ou pessoal.
David Paul; Ausubel e Joseph Novak	Valorização dos conhecimentos prévios dos aprendizes como pressuposto para o desenvolvimento de aprendizagens significativas; aprendizagem construída a partir das relações entre os novos conhecimentos e os conhecimentos prévios; uso de mapas conceituais.

Fonte: (SILVA FILHO, *et al.*, 2010, p. 10).

Nesse aspecto, destacaremos os três primeiros pensadores: Dewey, Bruner e Freire que fundamentaram a pesquisa no campo da PBL.

As premissas de John Dewey (1959) enfatizam a conexão entre fazer, pensar e aprender. Para que o estudante aprenda:

[...] “deve se dar algo para fazer e o fazer é de tal natureza que exige o pensamento ou conexões intencionais” (DEWEY, 1944, p. 154).

Assim, para o estudante aprender, o professor deve fornecer-lhe uma tarefa desafiadora, que pode ser a devolução de uma situação-problema, sendo este algo que exija o pensamento, as conexões intencionais e as reflexões a respeito do objeto do conhecimento em questão.

Segundo Dorigon e Romanowski (2008), nos estudos sobre Dewey (1979), o pensamento reflexivo tem uma função instrumental, origina-se no confronto com situações problemáticas, e sua finalidade é prover o professor de meios mais adequados de comportamento para enfrentar essas situações.

Analisando o papel da reflexão na experiência, observa-se que o pensamento, ou reflexão, é o discernimento da relação entre o que tentamos fazer e o que acontece como consequência. Se não tivermos abertura intelectual, não é possível uma experiência significativa, e, sendo assim, percebemos dois diferentes tipos de experiência conforme à proporção que damos à reflexão, denominadas pelos psicólogos de experiência e erro (DEWEY, 1979, p.165).

Nessa perspectiva, se enquadra a essência da PBL, uma metodologia ativa que busca proporcionar aos estudantes a oportunidade de serem ativos, participativos e responsáveis pela construção do seu conhecimento.

O segundo nome mais citado entre os autores pesquisados foi Jerome Bruner, um dos estudiosos que deixa contribuições importantes na psicologia cognitiva e nas teorias da aprendizagem dentro do campo da psicologia educacional.

Bruner, também contribuiu muito para a psicologia do desenvolvimento e a psicologia educacional, principalmente por ter um interesse em como as crianças aprendem. Ele argumentou que **o objetivo de ensinar não é transmitir conhecimentos, mas sim ensinar aos alunos a pensar e resolver problemas por si mesmos** (SARGIANI, 2016 apud TANGERINO, 2017, p. 45, grifos do autor).

Para Bruner (*apud* PONTE, 2002, p. 93) a aquisição do conhecimento faz-se a partir de problemas que se levantam, expectativas que se criam, hipóteses que se formulam e verificam, descobertas que se fazem. Ele argumenta que ao descobrir relações críticas pela resolução de problemas, os próprios estudantes constroem conexões de forma que o conhecimento relevante se torna disponível para a resolução dos problemas.

Assim, esse aprendizado tem como finalidade:

- ✓ Estimular os estudantes para aprendizagem autônoma, enfatizar a autoestima e a segurança.
- ✓ Desenvolver estratégias metacognitivas (aprender a aprender).
- ✓ Superar as limitações da aprendizagem mecanicista.

São conceitos encontrados na PBL, visto que tal metodologia visa estimular a aprendizagem autônoma e colocar o estudante no centro do processo de maneira a contribuir para a sua formação integral.

De acordo com Silva Filho (2010, p. 10), temos como o terceiro pensador mais apontado nas referências pedagógicas da PBL, o educador e filósofo brasileiro Paulo Freire, que afirma:

A educação libertadora, problematizadora, já não pode ser o ato de depositar, ou de narrar, ou de transferir, ou de transmitir “conhecimentos” e valores aos educandos, meros pacientes, à maneira da educação ‘bancária’, mas um ato cognoscente. ... O antagonismo entre as duas concepções, uma, a ‘bancária’ [grifos do autor], que serve à dominação; outra, a problematizadora, que serve à libertação, toma corpo exatamente aí. Enquanto a primeira, necessariamente, mantém a contradição educador-educando, a segunda realiza a superação (FREIRE, 2005, p. 78).

Em suas obras, Paulo Freire idealizou uma educação humanitária e acessível. Foi defensor de uma educação libertadora e transformadora, capaz de compreender e modificar o mundo. Assim, suas contribuições são de extrema relevância para a educação, visto a compreensão do papel fundamental da escola.

A crítica à educação bancária e o anúncio de uma pedagogia libertadora, problematizadora e conscientizadora prioriza os ideais dessa pesquisa, que propõe uma metodologia de ensino capaz de transcender a mera transmissão de conhecimentos fazendo com que o estudante se torne reflexivo no processo de ensino e aprendizagem.

É indispensável destacar que Paulo Freire foi um incansável defensor da liberdade, da reflexão, da justiça, da ética, do diálogo, da autonomia do ser humano e de questões complexas advindas da sociedade.

Para o educador/problematicador os educandos não são seus “recipientes dóceis de depósitos” (FREIRE, 2005, p. 80), pois, a educação emancipatória e libertadora, propõe que eles se tornem investigadores críticos num diálogo constante com o professor. São vistos como seres pensantes, reflexivos e criativos. “Se os homens são estes seres da busca e se sua vocação ontológica é humanizar-se, podem, cedo ou tarde, perceber a contradição em que a ‘educação bancária’ pretende mantê-los e engajar-se na luta por sua libertação” (FREIRE, 2005, p. 71).

Freire propõe uma educação autônoma, capaz de desenvolver no educando habilidades de responsabilidade, consciência, reflexão e transformação. A relação professor-aluno ocorre de maneira a superar o estigma da “superioridade docente”, pois se estabelece uma Educação Humanitária nas “trocas de conhecimentos”:

Enquanto a educação bancária tem como objetivo realizar uma divisão entre ‘os que sabem e os que não sabem, entre oprimidos e opressores’, negando o diálogo, a educação problematizadora, em contrapartida, ‘funda-se justamente na relação dialógico-dialética entre educador e educando: ambos aprendem juntos’ (FREIRE, 2005, p. 69).

Dessa forma, a presente pesquisa defende que a metodologia descrita busca contribuir para a libertação de práticas educacionais de natureza bancária visando uma formação docente autônoma, crítica e reflexiva.

Pautamos a pesquisa também em Ribeiro (2008), que traz estudos voltados às experiências com a Aprendizagem Baseada em Problemas no Ensino Superior.

Ribeiro descreve tal metodologia como aquela que proporciona uma dinâmica capaz de oferecer aos estudantes o protagonismo na sua própria aprendizagem.

O PBL é uma metodologia de ensino e aprendizagem que utiliza problemas coerentes para com a futura atuação dos alunos como profissionais e cidadãos – para iniciar, focar e motivar a aprendizagem dos conhecimentos conceituais, procedimentais e atitudinais objetivados (RIBEIRO, 2008, p. 24).

Nessa metodologia o conhecimento construído na busca da solução dos problemas e as habilidades, atitudes e competências desenvolvidas no processo são mais importantes que a solução em si. É esta uma das características que torna a PBL compatível com a aprendizagem significativa, e sobretudo favorável à aquisição de conhecimentos a partir do processo de construção que coloca o estudante em contato com a sua vida profissional futura.

Assim, a Aprendizagem Baseada em Problemas parece eficaz para atender às necessidades da sociedade atual. As transformações que vêm ocorrendo provocam impactos significativos na relação ensino e aprendizagem. Tais transformações exigem mudanças que permitam trazer respostas compatíveis com as demandas dos estudantes que vivem em uma sociedade cada vez mais dinâmica.



Para dar subsídios ao exposto, a pesquisa discute a importância da formação inicial e continuada do professor de Matemática, visto a necessidade de investir numa formação docente capaz de acompanhar as transformações que ocorrem dentro e fora do espaço escolar. Essa formação docente se faz necessária para que os professores consigam ofertar aprendizagem significativa aos estudantes de maneira a minimizar defasagens de conceitos matemáticos.

Pensando na formação inicial do professor de Matemática, defendemos uma proposta curricular para a licenciatura baseada no princípio de uma formação não somente com o pleno domínio dos conceitos matemáticos, mas também dotada de conhecimentos necessários para explorar a Matemática na sua essência, intervindo no contexto social, como ferramenta eficaz de aplicabilidade na resolução de situações-problema.

Dessa forma, para abordar questões relevantes na formação do professor de Matemática, adotamos como um dos referenciais teóricos João Pedro da Ponte, doutor em Educação Matemática pela Universidade da Geórgia (EUA). Ponte chama a atenção para um saber particular do professor, que relaciona conhecimentos da disciplina específica com o contexto pedagógico e descreve a importância da formação inicial do professor de Matemática dando ênfase à necessidade do vínculo com a prática profissional, enfatizando também a lógica investigativa como processo de construção do conhecimento profissional.

Debruçando-se sobre a problemática, Ponte (1998) afirma que a formação está habitualmente ligada à ideia da frequência de dispositivos estruturados, em que a lógica predominante é de fora para dentro, da teoria para a prática, por meio da transferência de conhecimentos e técnicas numa área considerada carente.

Dessa forma, reivindica-se a formação pedagógica sólida e não fragmentada; o desenvolvimento do conteúdo específico na ótica do ensino; a valorização da relação “prática-teoria-prática”, a articulação entre a teoria e a prática desde o começo do curso, a revisão do modelo curricular adotado; a utilização de metodologias de ensino em que o estudante se coloque como centro do processo; o acompanhamento e a supervisão permanente nos estágios curriculares; a prática pedagógica; a interdisciplinaridade; a delimitação dos saberes da docência; a autonomia pedagógica, a constituição de uma identidade profissional docente.

Neste estudo assume-se, pois, que:

O professor deve ser visto como um ser humano com potencialidades e necessidades diversas, que importa descobrir, valorizar e ajudar a desenvolver (PONTE *et al.*, 1998a, p. 222).

A reflexão teórica sobre o desenvolvimento profissional dos professores coloca à investigação diversos desafios. O primeiro deles seria o de investigar a formação docente, de maneira a compreender o processo dessa formação, levando em consideração as práticas profissionais e as experiências de vida.

Busca-se a necessidade de enfatizar a formação docente voltada para sua amplitude de maneira a considerar a relevância de uma formação que contemple uma metodologia de ensino ativa centrada no estudante.

O professor não é um mero técnico nem um simples transmissor de conhecimento, mas um profissional que tem de ser capaz de identificar os problemas que surgem na sua actividade, procurando construir soluções adequadas. Para isso é necessário que possua, ele próprio, competências significativas no domínio da análise crítica de situações e da produção de novo conhecimento visando a sua transformação (PONTE, 2002, p. 3).

A formação docente que se espera para atender às demandas da sociedade atual deve contemplar a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do exercício da cidadania, do mundo do trabalho e ao cumprimento da democracia.

Para explicitar sobre a formação continuada do professor de Matemática, adotamos autores como Nóvoa (1992), Imbernón (2005), Candau (2013), Fiorentini e Lorenzato (2009), entre outros, com o intuito de reforçar a importância de formação que contribua para o desenvolvimento docente de forma a contemplar a reflexão crítica sobre prática em torno de três eixos: a escola como locus de formação, a valorização do saber docente e o ciclo de vida dos professores.

Ainda pensando na formação docente, adotamos como objeto matemático de estudo, o conjunto dos Números Reais.

A noção de Números Reais está presente na maioria dos conteúdos de Matemática, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, e, como evidenciam pesquisas nacionais e internacionais como as de Robinet (1986), Fischbein, Jehiam e Cohen (1995); Silva e Penteadó (2009), muitas das dificuldades dos estudantes na aprendizagem de limite e continuidade de funções, por exemplo,

são decorrentes da falta de compreensão de propriedades do conjunto dos Números Reais.

Sendo assim, para dissertar acerca do exposto, buscamos fundamentação teórica no matemático brasileiro, mestre e doutor, Elon Lages Lima, no matemático estadunidense Ivan Niven com o livro “Números Racionais e Irracionais” e no matemático, educador, mestre e doutor Geraldo Severo de Souza Ávila. O presente trabalho apresenta também revisão bibliográfica a respeito do conceito dos Números Reais com diversos autores que dissertam acerca do assunto. Esse levantamento foi feito no Portal de Periódicos da CAPES.

Nessa perspectiva, a pesquisa busca articular o conceito de Números Reais às práticas profissionais dos docentes em formação e dos futuros docentes, visto que as situações-problema propostas tendem a estabelecer conexões entre os conhecimentos matemáticos e os conhecimentos pedagógicos ou os conhecimentos de natureza teórica com os de natureza prática articulando-os conforme a metodologia de ensino proposta.

## 2 A APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS

Iniciamos por um breve histórico acerca da metodologia, seus pressupostos teóricos e seus objetivos educacionais. Discorreremos em seguida sobre a perspectiva da PBL, de forma a destacar o papel do professor, do estudante e do processo de aplicação. Descrevemos as vantagens e as desvantagens de sua utilização a partir de autores que vivenciaram a sua elaboração, buscando fundamentar sua possível eficácia em estudos que defendem a sua aplicabilidade para a formação de professores, de forma a destacá-la também como promissora no desenvolvimento de competências socioemocionais.

Em seguida, tecemos observações acerca da formação de professores, buscando articular aspectos da metodologia que mostram ser favoráveis à formação docente. Em seguida, discorreremos sobre a formação inicial e continuada do professor de matemática, de modo a destacar autores que defendem a importância da formação docente num viés crítico e reflexivo.

Por fim, falamos sobre o objeto matemático de estudo, o conjunto dos Números Reais, ressaltando a essencialidade de se fundamentar de maneira clara e aprofundada, tanto aos professores que ensinam Matemática, quanto aos estudantes da Educação Básica, o conceito de número real. Considerando ainda, aspectos relevantes ligados à aprendizagem de tal conjunto numérico, apresentamos revisão bibliográfica com base em estudos desenvolvidos no âmbito da Educação Matemática.

Propor uma mudança de paradigma no âmbito educacional, descentralizando o papel do professor e valorizando a autonomia do estudante. Essa é a principal reflexão trazida na pesquisa, que enfatiza a necessidade da utilização de metodologias ativas. “Embora alguns professores façam uso da discussão como estratégia pedagógica, a aula expositiva ainda representa a forma mais utilizada na atuação docente e outros recursos pedagógicos” (SOUSA, 2011, p. 27). Nessa perspectiva, defendemos a Aprendizagem Baseada em Problemas como metodologia promissora capaz de oferecer aos estudantes o protagonismo na sua própria aprendizagem.

A Aprendizagem Baseada em Problemas representa uma estratégia em que os estudantes trabalham com o objetivo de resolver um problema. É uma metodologia centrada no estudante, que deixa de ser o receptor passivo do

conhecimento e passa a ser o agente principal responsável por seu aprendizado. Diferindo assim do ensino instrucional, que costuma apresentar aulas expositivas centradas na figura do professor, visto como o único detentor do saber. “A atuação do professor não segue as linhas do ensino instrucional, já que a sua função é a de facilitador na construção do conhecimento e não de centralizador do saber” (GIL, 2008, p. 175-176).

Dessa forma, nesta seção são exploradas as principais ideias a respeito da metodologia de ensino adotada, a Aprendizagem Baseada em Problemas, compreendendo o percurso histórico, seus pressupostos teóricos, suas principais características, bem como disponibilizar a discussão a respeito de sua possível contribuição para a formação de professores de matemática buscando articulá-la como promissora ao desenvolvimento de competências socioemocionais.

## 2.1 BREVE HISTÓRICO E PRESSUPOSTOS TEÓRICOS DA APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS

A aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) é uma metodologia de ensino inicialmente implantada na Escola de Medicina da Universidade McMaster em Hamilton, no Canadá, no final dos anos 1960. Segundo Schmidt (1993), ela foi inspirada no método de casos de ensino da Escola de Direito da Universidade de Harvard, nos Estados Unidos, na década de 1920 e no modelo desenvolvido na Universidade Case Western Reserve, também no Estados Unidos, para o ensino de Medicina nos anos 1950.

Para Barrows (1996 *apud* RIBEIRO, 2005, p. 32) sua implantação na Universidade McMaster veio em resposta ao tédio e ao descontentamento dos estudantes devido ao grande volume de conhecimentos percebidos como irrelevantes à sua prática médica. Esta iniciativa também foi decorrente, segundo Barrows (1996), do fato de que os formandos deixavam o curso com muitos conceitos, porém, poucos conhecimentos e estratégias aplicados às informações de um diagnóstico.

No Brasil, foi implantada na Escola de Saúde Pública do Ceará em 1993, na Faculdade de Medicina de Marília (FAMEMA), em 1997 e no curso de Ciências Médicas da Universidade de Londrina (UEL), em 1998.

Por ser considerado como o método que melhor se adapta ao estudo científico, são várias as escolas de medicina, ao redor do mundo, que se utilizam da PBL, entre elas: a Escola de Medicina de Harvard (Estados Unidos), a Universidade de Limburg, em Maastricht (Holanda), a Universidade de Newcastle (Austrália), a Universidade de Novo México (Estados Unidos), a Faculdade de Medicina da Universidade de Hong Kong (China) e a Escola de Ciências, Artes e Humanidades da Universidade de São Paulo (Brasil).

Da mesma forma, vale lembrar da Universidade de Aalborg, na Dinamarca, que adota em seu sistema de ensino há mais de 30 anos abordagem baseada em problemas e projetos como foco principal na aprendizagem dos estudantes.

Ao longo dos anos, a PBL tem se modificado em relação ao modelo da Universidade McMaster com o propósito de se adaptar a novos contextos educacionais. Segundo Ribeiro (2008), ela tem se mostrado eficaz para fundamentar aplicações em outros campos do conhecimento. Atualmente, foi inserida em outras áreas como Enfermagem, Pedagogia, Engenharia e Administração.

Embora sua história seja relativamente contemporânea, a PBL não pode ser considerada uma metodologia de ensino recente, pois sua aprendizagem advém de um problema, e isso tem ocorrido desde os primórdios da civilização.

Dewey ao enfatizar a “conexão entre fazer, pensar e aprender” corrobora a premissa da PBL, que valoriza a construção do conhecimento por meio da vivência. De acordo com Dewey:

A experiência reflexiva compreende: 1) perplexidade, confusão e dúvida, devidas ao fato de que a pessoa está envolvida em uma situação incompleta cujo caráter não ficou plenamente determinado ainda; 2) uma previsão conjectural – uma tentativa de interpretação dos elementos dados, atribuindo-lhes uma tendência para produzir certas consequências; 3) um cuidadoso exame (observação, inspeção, exploração, análise) de todas as considerações possíveis que definam e esclareçam o problema a resolver; 4) a consequente elaboração de uma tentativa de hipótese para torná-lo mais preciso e mais coerente, harmonizando-se com uma série maior de circunstâncias; 5) tomar como base a hipótese concebida, para o plano de ação aplicável ao existente estado de coisas; fazer alguma coisa para produzir o resultado previsto e por esse modo pôr em prova a hipótese (DEWEY, 1959, p. 164).

Nessa perspectiva, podemos dizer que Dewey foi um dos precursores em reconhecer a importância de se trabalhar a capacidade de pensar do estudante,

acreditando que, para o sucesso da aprendizagem, havia a necessidade de pessoas dispostas em grupos se comunicando, trocando ideias, sentimentos e experiências sobre as situações cotidianas.

Dewey reconhecia a relevância do meio social para a construção do conhecimento, e isso acontecia por meio de situações-problemas a serem exploradas, sendo desenvolvidos novos conhecimentos a partir da experiência crítico reflexiva.

Partindo desse pressuposto, entende-se que a aprendizagem não ocorre espontaneamente, há a necessidade do estímulo de alguns pontos essenciais, como: o entrosamento do estudante em situações de experimentação, atividades de seu interesse, existência de um problema a resolver, valorização dos conhecimentos prévios e a oportunidade de praticar suas ideias. Dessa forma, reflexão e ação devem estar ligadas e estabelecer conexão o tempo todo.

De acordo com os pressupostos da PBL, existe uma conexão direta com os apontamentos de John Dewey, que acredita que o conhecimento se inicia por um problema e se encerra com a sua resolução, passando por um processo de interrogação, reflexão, interpretação, execução e apropriação.

Para Schmidt (1993 *apud* RIBEIRO, 2005, p. 32-33), “[...] a PBL em seu formato original, teria suas raízes no princípio da aprendizagem autônoma de Dewey e na ideia de Bruner de que a motivação intrínseca (epistêmica) atua como uma força interna que leva as pessoas a conhecer melhor o mundo”. A filosofia de Dewey fundamentava-se nos conceitos da educação como reconstrução da experiência e crescimento e na motivação como força motriz da aprendizagem.

Segundo Penaforte (2001 *apud* BOROCHOVICIUS; TORTELLA, 2014, p. 268), Jerome Seymour Bruner, psicólogo americano, foi o principal proponente do modelo da Aprendizagem pela Descoberta (APD), que consistia na utilização de problemas com discussão em grupos para desenvolver habilidades de raciocínio e motivar os discentes em aprender com situações da realidade, facilitando a assimilação e a retenção da informação.

Para Bruner (1973 *apud* PONTE, 2003, p. 95), a aprendizagem se dá em três processos, que ocorrem quase que simultaneamente: “1. Aquisição de nova informação, confirmando ou contradizendo a informação previamente estabelecida pelo estudante; 2. Transformação da informação adaptando-a a novas ideias; 3. Avaliação da adequação da informação”.

Assim, para que esses processos se desenvolvam é necessário que haja curiosidade por parte do estudante, podendo ser estimulado por atividades de seu interesse. Surge, então, a necessidade de confrontá-los em situações-problemas que os desafiem, fazendo com que busquem informações e mobilizem seus conhecimentos prévios na resolução:

[...] Um episódio de aprendizagem pode ser breve ou longo, conter muitas ou poucas ideias. A duração de um episódio depende das condições em que cada aprendiz ou aluno pode sustentá-lo, conforme o que espera do seu esforço, no sentido de coisas exteriores, tais como notas ou graus ou também o que ganha em compreensão e conhecimento (BRUNER, 1973, p. 45).

De acordo com Mamede (2001 *apud* BOROCHOVICIUS; TORTELLA, 2014, p. 271), a perspectiva da PBL é delineada nos princípios derivados da psicologia cognitiva, caracterizada como forma de aprendizagem e instrução colaborativa, construtivista e contextual.

Schmidt (1993) defende a PBL como um método de aprendizagem e instrução, pautada no pressuposto de que o conhecimento prévio em relação a um assunto, ativado nessa abordagem durante a análise inicial do problema, determina a natureza e a quantidade de conhecimentos novos que podem ser processados.

Porém, a existência de conhecimentos prévios, embora necessária, não é condição suficiente para que os estudantes entendam e memorizem novos conhecimentos. Estes precisam antes ser elaborados ativamente por meio de discussões e reflexões em grupo, só depois novos conhecimentos serão apreendidos.

A Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) ou *Problem-Based Learning* (PBL), como é conhecida mundialmente é, portanto, metodologia de ensino-aprendizagem caracterizada pelo uso de problemas da vida real para estimular o desenvolvimento do pensamento crítico e das habilidades de solução de problemas e a aquisição de conceitos fundamentais da área do conhecimento em questão (RIBEIRO, 2008, p. 13).

A PBL tem como premissa básica o uso de problemas da vida real ou realísticos para estimular o desenvolvimento conceitual, procedimental e atitudinal do discente.



Conforme Mamede (2001 *apud* BOROCHOVICIUS; TORTELLA, 2014, p. 273), o método do PBL se configura como estratégia educacional e filosofia curricular, em que os discentes autodirigidos constroem o conhecimento de forma ativa e colaborativa e aprendem de forma contextualizada, apropriando-se de um saber com significado pessoal.

Originalmente, a sua implementação abrange todo o curso, sendo orientado por situações-problema que formam a espinha dorsal de seu currículo. Porém, existem relatos de aplicação bem-sucedida da PBL como uma estratégia educacional parcial, isto é, em disciplinas isoladas dentro de um currículo convencional ou mesmo em partes de disciplinas.

A PBL é uma estratégia que pode direcionar toda a organização curricular de um curso, com necessidade de mobilização do corpo docente, acadêmico e administrativo da instituição, o que demanda alterações estruturais e trabalho integrado dos departamentos e disciplinas que compõem o currículo dos cursos, possibilitando ao estudante a participação na construção de seu processo de conhecimento (CYRINO; TORALLES-PEREIRA, 2004, p. 20).

As diferentes implementações da PBL têm em comum um processo que pode ser resumido no seguinte conjunto de atividades:

(1) apresenta-se um problema aos alunos que, em grupos organizam suas ideias, tentam defini-lo e solucioná-lo com o conhecimento que já possuem; (2) por meio de discussão, os alunos levantam e anotam questões de aprendizagem (learning issues) acerca dos aspectos do problema que não compreendem; (3) os alunos priorizam as questões de aprendizagem levantadas e planejam quando, como, onde e por quem estas questões serão investigadas para serem posteriormente compartilhadas com o grupo; (4) quando os alunos se reencontram, exploram as questões de aprendizagem anteriores, integrando seus novos conhecimentos ao contexto do problema; e (5) depois de terminado o trabalho com o problema, os alunos avaliam o processo, a si mesmos e seus pares de modo a desenvolverem habilidades de auto avaliação e avaliação construtiva de colegas, imprescindíveis para uma aprendizagem autônoma eficaz (DUCH, 2000; BARROWS, 2000, *apud* RIBEIRO; MIZUKAMI, 2004, p. 91).

Nesta perspectiva, muitas atividades educacionais poderiam ser consideradas PBL, tais como projetos e pesquisas, porém para Woods (2000) da *McMaster University*, no ambiente de aprendizagem PBL a aprendizagem deve ser direcionada por um problema. Ou seja, um problema de fim aberto, que não comporta uma

solução correta única, deve preceder à teoria, atuando como o foco da aprendizagem, e promover a integração dos conceitos e habilidades necessários para sua solução (BARROWS, 2001). Esta é a principal característica que distingue a PBL de outros processos de ensino e de aprendizagem (RIBEIRO; MIZUKAMI, 2004, p. 91).

### **2.1.1 Objetivos Educacionais da Aprendizagem Baseada em Problemas**

Os objetivos educacionais da PBL necessitam estar pautados no Projeto Político Pedagógico do Curso, atendendo às Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN).

Originalmente, a PBL é implementada em todo o curso e orientada por um conjunto de problemas que formam a espinha dorsal de seu currículo. Porém, existem relatos de aplicação bem-sucedida da PBL como uma estratégia educacional parcial, isto é, em disciplinas isoladas dentro de um currículo convencional (WILKERSON; GIJSELAERS, 1996 *apud* RIBEIRO; MIZUKAMI, 2004, p. 91).

Segundo Mamede *et al.* (2001), os fundamentos da PBL remetem-se a bases teóricas de educadores como: Dewey, Piaget, Ausubel, Paulo Freire, dentre outros e está pautado em teorias construtivistas que valorizam o aprender a aprender do estudante.

Apesar da nomenclatura, a PBL não é simplesmente um conjunto de técnicas para solucionar problemas. Pode se afirmar que as técnicas de resolução de problemas são indispensáveis nessa metodologia, porém seus objetivos não se limitam a elas. Para Masetto (2004), ele se difere dos currículos e das disciplinas concebidas para desenvolver habilidades de resolução de problemas, pois seus objetivos educacionais são mais amplos. Visa desenvolver a aprendizagem de uma base de competências integrada e estruturada por meio de problemas reais, desenvolvendo também, habilidades de uma aprendizagem autônoma e o trabalho em equipe tal como ocorre em situações práticas (BARROWS, 1996 *apud* RIBEIRO, 2005, p. 36).

Angelo e Bertoni (2011 *apud* SOUZA, 2016, p. 48) observam que a PBL é uma forma de ensino e aprendizagem colaborativa, construtivista e contextualizada, na qual situações-problema são utilizadas para iniciar, direcionar e motivar a

aprendizagem de conceitos, teorias e desenvolvimento de habilidades e atitudes no contexto de sala de aula, isto é, sem a necessidade de conceber disciplinas específicas para este fim.

Sakay (1996 *apud* TANGERINO, 2017, p. 50) mostra os objetivos da metodologia de estudo por meio de problemas:

É baseado no estudo de problemas propostos com a finalidade de fazer com que o aluno estude determinados conteúdos. Embora não constitua a única prática pedagógica, predomina para o aprendizado de conteúdos cognitivos e integração de disciplinas. Esta metodologia é formativa à medida que estimula uma atitude ativa do aluno em busca do conhecimento e não meramente informativa como é o caso da prática pedagógica tradicional.

No que se refere ao formato de implantação da PBL, embora a metodologia tenha sido concebida originalmente como proposta curricular, existe uma variedade de modelos em sua implantação. A PBL pode ser implantada em um núcleo central do currículo no qual problemas são resolvidos e outras disciplinas dão suporte a esse núcleo central, inclusive com aulas expositivas. Nesse caso, a nomenclatura passa a ser “PBL Híbrido”. Há também o formato conhecido como “PBL Parcial”, quando é implantado em uma ou mais disciplinas de um currículo convencional. A PBL pode ser utilizada também em momentos específicos de aulas expositivas, o qual recebe a denominação de “PBL Pontual”, esse formato é empregado quando há a necessidade de integrar conhecimentos ou aprofundar determinados conteúdos (RIBEIRO, 2008, p. 21-22).

Para Bridges (1992 *apud* BOROCHOVICIUS; TORTELLA, 2014, p. 274), a PBL é uma estratégia instrutiva que tem as seguintes características:

1. O ponto de partida para a aprendizagem é um problema (isto é, um estímulo para o qual um indivíduo não tenha uma resposta imediata);
2. O problema deve permitir que os alunos estejam aptos a enfrentar o mercado como futuros profissionais;
3. O conhecimento que os alunos devem adquirir durante a sua formação profissional é organizada em torno de problemas em vez de disciplinas;
4. Estudantes, individualmente ou coletivamente, assumem uma importante responsabilidade pelas suas próprias instruções e aprendizagens;

5. A maior parte do aprendizado ocorre dentro do contexto de pequenos grupos em vez de exposições.

Segundo Hadgraft e Holecet (1995 *apud* RIBEIRO, 2005, p. 35), o PBL contempla os seguintes objetivos educacionais:

- ✓ Aprendizagem ativa, por meio da colocação de perguntas e busca de respostas;
- ✓ Aprendizagem integrada por intermédio da colocação de problemas para cuja solução é necessário o conhecimento de várias subáreas;
- ✓ Aprendizagem cumulativa, mediante a colocação de problemas gradualmente mais complexos até atingir aqueles geralmente enfrentados por profissionais iniciantes;
- ✓ Aprendizagem para a compreensão, ao invés de para a retenção de informações, mediante a alocação de tempo para a reflexão, *feedback* frequente e oportunidades para praticar o que foi aprendido.

Nessa perspectiva, os objetivos educacionais do PBL parecem satisfazer alguns aspectos importantes à educação profissional, com uma formação capaz de articular teoria e prática, oportunizando ao estudante o contato com situações-problemas que simulem sua inserção na futura área de atuação, promovendo assim, além do domínio do conhecimento específico, o desenvolvimento de habilidades e atitudes profissionais práticas.

### **2.1.2 O Papel do Professor na Aprendizagem Baseada em Problemas**

Na metodologia de ensino convencional, há a instrução centrada na figura do professor, visto como o “detentor do saber”. A organização da sala de aula contempla sua imagem, com alunos dispostos em filas indianas que observam passivamente sua explanação acerca de um conteúdo.

Na perspectiva da metodologia de ensino PBL, há o saber descentralizado na figura do professor. Enemark e Kjaersdam (2009, p. 34) afirmam que o “[...] professor desce do púlpito e abre mão do papel do líder, para atuar lado a lado com os alunos”.

Dessa maneira, o professor assume o papel de mediador. Segundo Ribeiro (2005, p. 61) os mediadores têm a função de “[...] orientar, explicar conceitos, sanar dúvidas com relação aos requisitos do projeto e as tarefas a serem cumpridas”.

Seu papel não se restringe a meras instruções, a PBL exige dele maior visibilidade, participação, reflexão, planejamento, trabalho cooperativo e coletivo (com outros colegas, administradores educacionais, empregadores e sociedade) para a tomada de decisões num viés crítico e democrático.

Na metodologia PBL, cabe ao professor ser o estimulador (mediador) para criar no estudante o desejo pela busca do conhecimento e da descoberta, e, portanto, incitá-lo a questionar, pesquisar e refletir para conseguir solucionar as dificuldades e resolver as situações-problemas apresentadas.

De acordo com Delisle (2000 *apud* SOUSA, 2011, p. 42-43), o professor de PBL atua em três fases:

1. Em uma primeira etapa, desenvolve o problema de modo que sejam abordados os conteúdos do currículo. Essa etapa começa antes do período letivo, quando o professor deverá decidir se o PBL será usado em todo conteúdo do currículo ou em algum conteúdo específico.
2. Na segunda etapa, o professor orienta os alunos no tratamento do problema. Ela representa uma etapa particularmente difícil, porque o professor precisa guiar, sem conduzir; apoiar, sem dirigir. E mais, orientar os alunos sem parecer que está escondendo a resposta (RIBEIRO, 2008, p. 37). Em resumo, o professor,

Prepara o ambiente, ajuda os alunos a relacionarem-se com o problema, arranja uma estrutura de trabalho, aborda o problema com os alunos, reequaciona o problema, facilita a produção de um produto ou de um desempenho e estimula a autoavaliação (DELISLE, 2000, p. 23).

3. Por fim, na terceira etapa, o professor avalia o problema, o aluno e sua própria atuação e pondera a eficácia do problema no desenvolvimento de conhecimentos e competências. Se for o caso, pode modificar o problema, quando perceber que a resolução não resultou em progresso dos alunos. O professor avalia também o desempenho do aluno, não só em função de uma classificação, mas também porque isso os ajuda a

progredir. O professor precisa fazer com que sua prática na PBL também seja alvo de constante avaliação, refletindo se cumpriu o objetivo da aula que é permitir que os alunos desenvolvam autonomia de pensamento, abstendo-se de fornecer-lhes informações e de direcioná-los (DELISLE, 2000, p. 24-25).

Dessa forma, há o professor atuando como tutor, um mediador nos processos de ensino e de aprendizagem, oportunizando aos estudantes o desenvolvimento do senso de responsabilidade, autonomia, liderança e autoconhecimento. Mennin e Majoor (2002, p. 1-2) discutem que o tutor “[...] auxilia o grupo a fixar padrões para aprofundar e ampliar o conhecimento, desenvolver habilidades de comunicação, adotar comportamentos e atitudes de autoavaliação dos seus pares”.

Nessa perspectiva, Escrivão Filho e Ribeiro (2009) apontam que o professor deve elaborar problemas com situações que desafiam a curiosidade dos alunos por conhecimento. Isto implica que nem sempre as respostas são as esperadas pelo professor. Há sempre um grau de imprevisibilidade na condução da aula, um conteúdo não programado pode aparecer na discussão dos problemas, embora isso possa ser minimizado com a entrega antecipada dos relatórios finais antes da entrega da apresentação das soluções para a sistematização.

Porém, ressaltamos que a atuação na PBL exige aprimoramento pedagógico, oferecendo assim aos professores capacitação docente. “Devido a esses aspectos, fica clara a necessidade de capacitação docente para atuar na PBL, mesmo daqueles professores que favorecem esta abordagem e/ou têm experiência no modelo convencional de ensino, já que a grande maioria deles utiliza basicamente dois métodos: a aula expositiva e as discussões conduzidas pelo professor” (BRIDGES; HALLINGER, 1998 *apud* RIBEIRO, 2005, p. 51).

Outro ponto importante é a gestão das relações em sala de aula. É comum a ocorrência de conflitos, especialmente com relação à formação de equipes, ao exercício de liderar, avaliar, trabalhar colaborativamente. O ambiente educacional na sala de aula PBL permite o diálogo entre os alunos e com o professor. Há, ainda, um componente afetivo importante: com a PBL a interação entre os alunos e entre os alunos e o professor é muito maior (ESCRIVÃO FILHO; RIBEIRO, 2009, p. 29). Ou seja, o professor na perspectiva do PBL deve assumir o papel de facilitador tanto das relações de interatividade quanto da aprendizagem:

O facilitador tem que levar em conta o comportamento dos alunos, personalidades e dificuldades, e adotar uma atitude que incentiva os alunos a iniciar a discussão, fazer perguntas, desafiar declarações e pedir esclarecimentos. Às vezes, inicialmente, o facilitador pode ter que trabalhar muito duro para gerenciar o grupo sem parecer ser autoritário, mas eventualmente, o grupo deve ser capaz de funcionar eficazmente na ausência do moderador. (WOOD, 2004b, p. 3)

Desse modo, Freire (2014) afirma que os educadores não devem ser os responsáveis em informar ou transmitir o conhecimento aos educandos e sim ensiná-los a construí-los, ou seja, os educadores devem orientar os caminhos para que os educandos sejam capazes de trilhá-los de maneira autônoma e responsável, validando assim, o processo de construção e apropriação desse conhecimento.

Nessa perspectiva, talvez esteja a maior mudança de paradigma da metodologia, que descentraliza do professor toda a “responsabilidade” pela aprendizagem dos estudantes. As carteiras enfileiradas, os estudantes passivos e o professor à frente da sala para o controle e “depósito” dos conhecimentos dão espaço a salas de aula “desorganizadas”, estudantes ativos e protagonistas, e o professor mediando o conhecimento lado a lado, num processo participativo e colaborativo.

### **2.1.3 O papel do Estudante na Aprendizagem Baseada em Problemas**

Diferentemente da metodologia de ensino convencional em que o estudante é visto como um agente passivo e toda a responsabilidade de inserção de novos conhecimentos advém do professor, há na abordagem PBL uma mudança de paradigma, na qual os estudantes devem assumir o papel de atores reflexivos, ativos e participativos no processo de aprendizagem.

O PBL exige dos estudantes o desenvolvimento de uma ampla gama de habilidades para disponibilizá-las, para aprender efetivamente – equipes trabalhando habilidades, habilidades de informação e, talvez, o mais importante para o desenvolvimento profissional, uma alta ordem das habilidades cognitivas. Em vez de aceitar tranquilamente a informação transmitida para eles através das muitas formas tradicionais de ensino, os alunos agora têm de se envolver criticamente com o conhecimento que eles vêm adquirindo para eles próprios. (MacDONALD, 2001, p. 3)

Ressaltamos que a PBL se trata de uma metodologia de ensino centrada no estudante, permitindo que o próprio se torne agente autônomo na busca de resolução de problemas, fazendo com que o processo de resolução, como a pesquisa, a discussão e a interação em grupo se constituam como fenômenos de aprendizagem.

Assim, não difere de outras metodologias, na PBL, os estudantes também são os principais responsáveis pela construção de sua aprendizagem:

O método PBL exige que os alunos se tornem responsáveis pela sua própria aprendizagem. O professor no PBL é um facilitador da aprendizagem dos alunos, e suas intervenções tendem a diminuir quando os alunos assumem progressivamente a responsabilidade de seus próprios processos de aprendizagem (HMELO-SILVER; BARROWS, 2006, p. 24).

Na perspectiva de ensino PBL, observamos também mudança na organização dos estudantes, que não se encontram dispostos em fileiras indianas. Nesse cenário, os discentes se encontram em círculos deliberando sobre algum assunto e o professor transitando entre os grupos.

Os alunos da PBL aprendem de forma colaborativa com os membros do seu grupo e percebem que é necessária a participação de todos para atingir o sucesso na aprendizagem. Além disso, a Aprendizagem Baseada em Problemas exige do aluno a tomada de decisão sobre como e o que aprender (DELISLE, 2000, p. 18).

Em razão do trabalho em grupo, a PBL privilegia o aspecto colaborativo na educação, porquanto há mais comunicação entre os alunos, que estabelecem mais parcerias entre si e com o professor (RIBEIRO, 2008, p. 41). Desse modo, a PBL permite nos estudantes o desenvolvimento de habilidades em grupo como a valorização da diversidade, a motivação, a conduta ética, a cidadania, a criatividade, a cooperação e a capacidade de se adaptar.

Sobre o aspecto da colaboração nos grupos da PBL, Delisle (2000, p. 19) considera que,

Nos vários grupos, os alunos podem trabalhar em conjunto para investigar diferentes questões de aprendizagem [...]. Depois, partilham a informação com toda a turma; portanto, cada grupo depende dos restantes para encontrar parte da informação e, no final resolver o *puzzle*.



Assim, Woods (2001 *apud* RIBEIRO, 2005, p. 49) explicita algumas tarefas que os alunos devem seguir ao assumirem a responsabilidade pela sua própria aprendizagem:

- ✓ Exploração do problema, levantamento de hipóteses, identificação de questões de aprendizagem e sua elaboração;
- ✓ Tentativa de solução do problema com o que sabem, observando a pertinência de seu conhecimento atual;
- ✓ Identificação do que não sabem e do que precisam saber para solucionar o problema;
- ✓ Priorização das questões de aprendizagem, estabelecimento de metas e objetivos de aprendizagem, alocação de recursos de modo a saberem o que, quando e quanto é esperado por eles;
- ✓ Planejamento e delegação de responsabilidades para o estudo autônomo da equipe;
- ✓ Compartilhamento eficaz do novo conhecimento de forma que todos os membros aprendam os conhecimentos pesquisados pela equipe;
- ✓ Aplicação do conhecimento na solução do problema;
- ✓ Avaliação do novo conhecimento, da solução do problema e da eficácia do processo utilizado e reflexão sobre o processo.

Dessa forma, os estudantes exercem dois papéis de destaque: líderes e secretários. Segundo Iochida (2001), os líderes ou coordenadores são responsáveis pelo direcionamento dos encontros e das discussões, fazendo com que todos participem. Os secretários ou relatores registram as discussões, facilitando a participação de todos; constroem a lista de objetivos, referências a serem usadas e, ao final, entregam um relatório ao tutor.

Barreto *et al.* (2007 *apud* SANTOS, 2014, p. 46-47) descrevem e detalham os papéis dos estudantes:

1. Coordenador / Líder
  - ✓ O Coordenador é um aluno do grupo tutorial.

- ✓ Deve orientar os colegas na discussão do problema, segundo a metodologia dos 07 passos, favorecendo a participação de todos e mantendo o foco das discussões no problema.
- ✓ Desestimular a monopolização ou a polarização das discussões entre poucos membros do grupo, favorecer a participação de todos.
- ✓ Apoiar as atividades do secretário.
- ✓ Estimular a apresentação de hipóteses e o aprofundamento das discussões pelos colegas.
- ✓ Respeitar posições individuais e garantir que estas sejam discutidas pelo grupo com seriedade, e que tenham representação nos objetivos de aprendizado sempre que o grupo não conseguir refutá-las adequadamente.
- ✓ Resumir as discussões quando pertinente.
- ✓ Exigir que os objetivos de aprendizado sejam apresentados pelo grupo, de forma clara, objetiva e compreensível para todos, e que sejam específicos e não amplos e generalizados.
- ✓ Solicitar auxílio do tutor quando pertinente e estar atento às orientações do tutor quando estas forem oferecidas espontaneamente.

## 2. Secretário / Relator

- ✓ Deve anotar em quadro, de forma legível e compreensível, as discussões e os eventos ocorridos no grupo tutorial de modo a facilitar uma boa visão dos trabalhos por parte de todos os envolvidos.
- ✓ Ser claro e conciso, sempre que possível, em suas anotações e fiel às discussões ocorridas, para isso, deve solicitar a ajuda do coordenador do trabalho e do tutor.
- ✓ Respeitar as opiniões do grupo e evitar privilegiar suas próprias opiniões com as quais concorde.
- ✓ Anotar com rigor os objetivos de aprendizado apontados pelo grupo.
- ✓ Anotar as discussões posteriores e classificá-las segundo os objetivos de aprendizado anteriormente apontados.

Se possível, todos os integrantes do grupo devem exercer os papéis de coordenador/líder e secretário/relator, para que, dessa forma, cada estudante tenha a experiência de ser líder e secretário do grupo de estudo, proporcionando a ele

uma ampla experiência, obtida em cada função uma vivência e uma visão diferenciada do trabalho em equipe.

#### **2.1.4 O problema na Aprendizagem Baseada em Problemas**

Conforme o próprio termo esclarece, na Aprendizagem Baseada em Problemas, o foco central de todo processo são os problemas. A “[...] aprendizagem por problemas é uma condição da existência humana. Nas nossas tentativas para resolver muitos problemas do cotidiano, a aprendizagem ocorre” (BARROWS; TAMBLYN, 1980, p. 15 *apud* SOUZA, 2016, p. 55).

Em linhas gerais, há o método PBL interpretado como “[...] uma coleção de problemas cuidadosamente construídos, os quais são apresentados a pequenos grupos” (SCHMIDT *et al.*, 2007, p. 92). O problema na PBL contempla uma situação passível de os alunos encontrarem em suas futuras carreiras profissionais. Ele é estruturado de tal forma que o gerenciamento adequado ou inadequado da situação problemática afeta os resultados obtidos (RIBEIRO, 2008, p. 30). Dessa forma, para a resolução desses problemas normalmente são necessárias algumas pressupostas explicações teóricas.

O problema na PBL deve necessariamente apresentar algumas características, as quais respondem aos fundamentos e objetivos educacionais inerentes ao método: a) deve ser de fim aberto, ou seja, comportar várias respostas igualmente válidas (mesmo não havendo uma resposta correta única, é claro que pode haver uma melhor solução); b) deve ser relevante ao exercício profissional dos alunos; c) deve ser típica, quer dizer, pode ser facilmente encontrada na prática profissional (RIBEIRO, 2008, p. 28).

Nessa perspectiva, o problema é uma situação incerta assentada na experiência do estudante e, por esse motivo, o faz pensar verdadeiramente para resolvê-lo e tornar a situação determinada. Se o papel fundamental do professor na PBL é estimular o pensamento crítico e o autoaprendizado, o papel do aluno é, efetivamente, pensar e não só replicar ou memorizar informações (SOUZA, 2011, p. 45). Para tanto, Dewey argumenta que tal habilidade deve ser desenvolvida em um contexto propício,

Provavelmente, a causa mais frequente pela qual a escola não consegue garantir que os alunos pensem verdadeiramente é que não se provê uma situação experimentada, de tal natureza que obrigue a pensar, exatamente como o fazem as situações extra-curriculares-problema na aprendizagem baseada em problemas (DEWEY, 1959a, p. 104-105 *apud* SOUSA, 2011, p. 45).

Segundo Escrivão Filho e Ribeiro (2009), a característica mais importante do problema PBL é a sua fraca estruturação, isto é, quando uma situação-problema não determina um caminho único de investigação:

Dentre esses critérios de escolha de problemas, talvez o que mais afeta o processo PBL seja o grau de estruturação. Os problemas nesta abordagem devem, na medida do possível, espelhar situações profissionais reais, ou seja, ser indefinidos, ter informações insuficientes e perguntas não respondidas. Como ocorre na prática profissional, na PBL os alunos não devem ter todas as informações relevantes e tampouco conhecer as ações necessárias para sua solução (RIBEIRO, 2005, p. 44).

Schmidt (1996 *apud* CAPRARA, 2001, p. 145-150) distingue quatro tipos de conhecimentos que correspondem a quatro tipos de problemas:

1. O conhecimento do tipo descritivo que se refere aos fatos observáveis. Nesse caso, o tipo de conhecimento fica vinculado ao problema descritivo, que apresenta um evento de forma neutra e os alunos devem aprofundar o tema, dar sentido ao evento de forma descritiva.
2. O conhecimento explicativo que consiste na elaboração de teorias e na identificação de princípios. O tipo de problema relacionado a esse conhecimento é o explicativo, cuja solução depende de os alunos estabelecerem relações de causa-efeito para explicar determinado fenômeno. Assim, o conhecimento descritivo e o explicativo articulam-se para a construção de conceitos. O resultado dessa articulação pode ser classificado como conhecimento conceitual.
3. O conhecimento de processo, ou procedimental, que se refere ao modo de realizar uma determinada atividade, ou seja, às habilidades adquiridas. Esse conhecimento está vinculado ao problema do tipo obstáculo de processo, no qual há um personagem que deve realizar uma tarefa, mas não sabe como.

4. O conhecimento do tipo normativo, ou atitudinal, que aborda dilemas e problemas éticos. O tipo de problema vinculado a esse conhecimento é denominado problema dilema, porque fornece uma situação na qual os alunos expressam suas considerações de acordo com seus próprios valores morais e éticos. O texto apresenta duas possíveis propostas e o aluno deve argumentar acerca da sua escolha.

Convém ressaltar que os quatro tipos de conhecimentos citados anteriormente, têm como propósito estimular o desenvolvimento conceitual, procedimental, atitudinal e socioemocional do estudante. Assim, de acordo com a definição do conteúdo e o tipo de problema relacionado ao conhecimento proporcionado pelo conteúdo, é fundamental que a situação-problema na PBL direcione todo o processo de aprendizagem e funcione como ponto de partida para a construção do conhecimento, o que quer dizer que ela representa um acontecimento ou conjunto de acontecimentos preparados por professores especialistas na matéria (RIBAS, 2004, p. 11). Optar pela metodologia PBL liberta o professor das amarras dos livros didáticos. Nesse âmbito, qualquer situação, dentro ou fora da escola, pode fornecer elementos para o desenvolvimento de problemas que tenham relação com a vivência dos alunos (DELISLE, 2000, p. 26).

Dessa forma, entendemos que tais conhecimentos possam embasar a formação inicial e continuada do professor de Matemática, de maneira a contribuir com uma formação pautada numa metodologia de ensino que se aproprie de situações-problema que contemplem a articulação entre os três aspectos: conceito, procedimento e atitude.

#### **2.1.5 O Processo na Aprendizagem Baseada em problemas**

De acordo com Lochida (2001), Park (2006), Sakai e Lima (1996) Schmidt (1983) *apud* Soares (2008, p. 78) existem sete passos que facilitam a aplicação do PBL:

1. Distribuição e leitura do problema e identificação dos termos desconhecidos;

2. Interpretação e discussão do texto. Identificação do problema central e das palavras-chave;
3. Levantamento do conhecimento prévio com formulação de hipóteses (brainstorm);
4. Resumo das hipóteses possíveis elaborando uma síntese da discussão;
5. Elaboração dos objetivos de aprendizagem e identificação das estratégias de pesquisa a serem percorridas;
6. Pesquisa e elaboração individual concernentes aos objetivos propostos;
7. Retorno, integração das informações e resolução do caso.

Ao explorar o processo, percebemos que cada componente é de extrema importância para que os objetivos sejam atingidos de maneira satisfatória. Assim, Lochida (2001), Park (2006), Sakai e Lima (1996) e Schmidt (1983) *apud* Soares (2008, p. 79-81) esclarecem cada parte do processo.

Veremos a seguir, os componentes de maneira mais detalhada:

1. **Distribuição e leitura do problema e identificação dos termos desconhecidos.** Leitura atenta do problema para compreender o contexto geral apresentado e identificar os termos não entendidos, podendo utilizar o dicionário para ajuda. Caso o termo seja desconhecido por todos, deve incluí-lo entre os objetivos/questões de aprendizado. Alunos e professores determinam o que é conhecido e quais informações adicionais são necessárias para facilitar o processo de resolução do problema.
2. **Interpretação e discussão do texto. Identificação do problema central e das palavras-chaves.** É necessário que o professor ensine aos alunos como reunir dados como de entrevista, pesquisa, biblioteca e como interpretar dados estatísticos simples. Promover a identificação dos problemas sem a pretensão de explicar o porquê; cada membro da equipe deve levantar no mínimo uma hipótese/afirmativa sobre o contexto, sem sofrer influência, crítica ou pressão pela equipe.
3. **Levantamento do conhecimento prévio com formulação de hipóteses (brainstorm).** É neste momento que ocorre a primeira sessão tutorial, em que se discutem os conhecimentos prévios do grupo com possíveis

diagnósticos e meios para comprová-los. Os integrantes podem se lembrar de coisas diferentes, fazendo da discussão uma oportunidade de aprender, sendo importante o respeito pela opinião do outro, aprendendo a silenciar e aceitar as ideias dos outros colegas. Todos devem se sentir à vontade para expressar-se e entender a importância da discussão de suas ideias para fundamentar as hipóteses extraídas do texto fragmentado no passo anterior. Após a anotação de várias ideias as melhores são selecionadas.

4. **Resumo das hipóteses possíveis elaborando uma síntese da discussão.** Os estudantes discutem os pontos positivos e negativos, explorando todas as possibilidades de informações que eles reuniram para cada solução. Define-se o problema com base nas hipóteses fundamentadas, chegando a um consenso sobre a questão do problema utilizada na formulação dos objetivos, que será o próximo passo.
5. **Elaboração dos objetivos de aprendizagem e identificação das estratégias de pesquisa a serem percorridas.** Identificados os problemas no passo anterior, começa-se a discutir e identificar os pontos obscuros, assuntos ou temas que precisam ser estudados para a resolução do problema. Nesse passo é importante ser objetivo, pois não haverá tempo para estudar tudo sobre o assunto. A pesquisa deve buscar conceitos que respondam à questão, com base no aprendizado prévio dos membros da equipe, de disciplinas anteriores e de experiências pessoais, sem consultar bibliografias.
6. **Pesquisa e elaboração individual concernentes aos objetivos propostos.** Nesta etapa, já está definido o que cada um deve estudar. Portanto, deve buscar informações em mais de uma fonte e ter como objetivo a troca dessas informações, de fontes diversificadas, na discussão em grupo. Neste momento, o professor deve encorajar os alunos a procurar dados em lugares não comumente procurados por eles. Especialistas podem ser consultados para, assim, observarem os problemas de uma perspectiva diferente e estarem abertos a novas ideias.
7. **Retorno, integração das informações e resolução do caso.** A segunda reunião tutorial integra as informações trazidas, para resolver o caso, sem

a pretensão de esgotar os temas discutidos. Assim, cada equipe prepara uma apresentação para a classe e desenvolve um relatório escrito, a ser entregue ao professor, incluindo referências e dados usados.

Segundo Berbel (1998, p. 146), os sete passos da Aprendizagem Baseada em Problemas compreendem duas fases: na primeira, a discussão é focada na identificação do problema, elaboração de hipóteses de solução e identificação de assuntos relevantes para a solução dos problemas; na segunda, os conhecimentos prévios são confrontados com os conhecimentos científicos que o aluno busca de forma autônoma, em cujo processo é realizado um exercício de pensar sobre o pensar. De volta ao grupo tutorial, o problema é discutido novamente e as informações são integradas para resolver o problema. No entanto, mesmo com o problema resolvido não há a pretensão de que o tema esteja esgotado.

Convém ressaltar que, ainda que existam distinções acerca dos passos ou etapas para a realização da PBL, ela é descrita como uma estratégia de ensino e aprendizagem que possui cinco características fundamentais:

1. O ponto de partida para a aprendizagem é um problema;
2. O contexto do problema faz referência a uma situação que os alunos poderão enfrentar como futuros profissionais;
3. O conhecimento que os alunos devem adquirir durante a sua formação profissional é organizado em torno de problemas em vez de disciplinas;
4. Os alunos, individual e coletivamente, assumem uma maior responsabilidade na sua própria instrução e aprendizagem;
5. A maior parte do aprendizado ocorre no contexto de pequenos grupos, em vez de aulas expositivas (BRIDGES, 1992, p. 5-6 *apud* SOUSA, 2011, p. 31).

Embora a metodologia de ensino abordada contemple alguns passos diretivos para a sua aplicação, é importante destacar, mais uma vez, que a PBL não se restringe a um conjunto de técnicas para a resolução de problemas. Assim, em experiências práticas, associadas à implantação da PBL em cursos de Engenharia, Ribeiro (2008) reforça que:

A PBL é uma metodologia de ensino e aprendizagem que utiliza problemas, coerentes para com a futura atuação dos alunos como profissionais e cidadãos, para iniciar, focar e motivar a aprendizagem dos conhecimentos conceituais, procedimentais, atitudinais objetivados (RIBEIRO, 2008, p. 24).



Dessa forma, o foco da Aprendizagem Baseada em Problemas está amparado na organização de conteúdos curriculares em torno de cenários de problemas, em vez de assuntos ou disciplinas. O trabalho em grupos ou equipes permite que os alunos se envolvam com a situação complexa apresentada. São eles que devem decidir quais são as informações necessárias e quais as habilidades que precisam desenvolver para gerir a situação de forma eficaz (SAVIN-BADEN, 2000 *apud* SOUZA, 2016, p. 47-48).

Rodrigues e Figueiredo (1996) salientam ainda que, para a implantação da PBL como metodologia de ensino, há a necessidade de atender a alguns pré-requisitos:

- ✓ Espaço livre para o autoaprendizado do aluno.
- ✓ Revisão no papel do docente.
- ✓ Revisão no conceito de autonomia departamental.
- ✓ Mudança dos critérios de seleção dos alunos.
- ✓ Investimentos financeiros na infraestrutura.

### **2.1.6 Vantagens e Desvantagens da Aprendizagem Baseada em Problemas**

Geralmente os métodos de ensino aplicados podem apresentar alguns pontos positivos e negativos no que diz respeito ao ensino e aprendizagem de diversos conceitos. No entanto, com a metodologia de ensino aqui apresentada, no caso a PBL, também temos presentes algumas vantagens e limitações.

Dentre as vantagens destacadas na aplicação e resultados da metodologia, estão o desenvolvimento de habilidades e atitudes, como oralidade, capacidade argumentativa, escrita e trabalho em grupo que são necessárias a todos os profissionais, independentemente de suas responsabilidades:

O benefício geralmente atribuído a essa metodologia diz respeito ao favorecimento da aquisição do conhecimento de forma mais significativa e duradoura e ao desenvolvimento de habilidades e atitudes profissionais por parte dos alunos (RIBEIRO, 2008, p. 41).

Os alunos se envolvem mais na aprendizagem, dado que sentem que têm a capacidade de interagir com a realidade e ver os resultados dessa interação. Conseqüentemente, desenvolvem maior compreensão da matéria, uma vez que eles próprios buscam a informação e a aplicam na resolução do problema (DELISLE, 2000, p. 16).

Outra vantagem apresentada nesta metodologia é a possibilidade de aumentar a autonomia dos estudantes, visto que eles se apresentam como protagonistas na resolução das situações-problemas, possibilitando assim o desenvolvimento da capacidade de tomar decisões, bem como o desenvolvimento das habilidades de interação e argumentação para a explanação e as discussões acerca do conteúdo.

Segundo Barrows (2007 *apud* RIBEIRO, 2005), diferentemente da metodologia convencional, a construção do conhecimento é apenas uma parte do processo, o foco da metodologia está no desenvolvimento de determinadas características que serão úteis na vida profissional futura do estudante, independentemente do caminho profissional escolhido, como, capacidade de aprendizagem autônoma e habilidades de trabalhar em grupo. Ribas (2004, p. 17) defende que o estudante “[...] deve ter a oportunidade de refletir sobre seu próprio processo de aprendizagem”.

Nessa perspectiva, a PBL promove nos estudantes a observação e a avaliação sobre o próprio processo de aprendizagem, uma vez que eles criam suas próprias estratégias para a definição do problema, buscam a informação para solucioná-lo, analisam os dados, constroem hipóteses e, por fim, avaliam o resultado (SOUSA, 2011, p. 49). Em razão do trabalho em grupo, o PBL privilegia o aspecto colaborativo na educação, porquanto há mais comunicação entre os alunos, que estabelecem mais parcerias entre si e com o professor (RIBEIRO, 2008, p. 41).

As vantagens do PBL em relação aos professores são as dinâmicas interdisciplinares de trabalho com problemas – reais ou simulados – que também são alavancas para promover o sentimento de grupo entre os docentes, estimulando a troca de informações e experiências entre estes e entre os departamentos.

Com relação às desvantagens, os alunos eventualmente sofrem com a imprecisão no conhecimento das teorias mais sofisticadas e a insuficiência de conhecimentos prévios (RIBEIRO, 2008, p. 41). Dessa forma, o autor salienta que os estudantes podem “se perder” na fundamentação da pesquisa, com o excesso de

informações desnecessárias ou com a escassez de informações que seriam úteis para embasar de maneira precisa as teorias fundamentais que os auxiliariam na resolução das situações-problema.

A PBL impele o aluno a trabalhar em grupo. Essa característica pode frustrar aqueles que têm dificuldades em trabalhar dessa forma, ou que não sintam segurança para explicitar seu conhecimento no grupo (RIBEIRO, 2008, p. 41). A este respeito, Kaufman e Mann (2001 *apud* RIBEIRO; MIZUKAMI, 2004, p. 95) colocam que, embora a PBL deva promover o aprimoramento das habilidades comunicativas e interpessoais dos alunos, isso deve ser feito de acordo com a personalidade e o nível de bem-estar de cada um. No caso de alunos mais introvertidos, estes autores sugerem, como acabou ocorrendo nesta implementação, que os requisitos são negociáveis da metodologia, tais como a participação, sejam explicitados aos alunos e que os benefícios advindos do desenvolvimento e do aprimoramento destas habilidades sejam ressaltados.

Embora vistos como desvantagens da metodologia pelo ponto de vista de alguns estudantes introvertidos, acreditamos que a dinâmica da PBL pode oferecer a eles pontos positivos nesse aspecto, tais como o desenvolvimento da oralidade, argumentação e cooperação ao trabalho em grupo, visto que tais atitudes são fundamentais à vida profissional.

No que concerne aos professores, se, por um lado, a PBL encoraja o diálogo acadêmico, por outro lado, parece ser um tanto complexo para o professor trabalhar todo conteúdo de uma disciplina através de problemas e motivar os alunos a aprenderem conteúdos básicos que não fazem parte do problema, mas que serão utilizados em sua resolução. Da mesma forma, é especialmente difícil para o professor avaliar o desempenho individual do aluno uma vez que todo processo de aprendizagem ocorre em grupo (RIBEIRO, 2008, p. 41).

Por fim, há um custo elevado para implantar a PBL, especialmente a PBL curricular, considerando que seu emprego implica formar os tutores, equipar salas para que sejam adequadas à discussão em grupo, ampliar o acesso à informação (computadores, laboratórios, biblioteca atualizada), dado que na PBL há o uso intensivo de recursos para a obtenção da informação (SÁ, 2001 *apud* SOUSA, 2011, p. 51).

### **2.1.7 A Aprendizagem Baseada em Problemas e as Competências Socioemocionais**

O mundo moderno tem passado por inúmeras transformações, trazendo, assim, a necessidade de inovação e reformulação do papel da escola, quanto as formas de propagar o saber e ensinar de maneira permanente.

Diante disso, percebemos a necessidade da formação integral do indivíduo, no sentido de inserção dos conhecimentos, habilidades e atitudes que os tornam sujeitos “completos”. Assim, temos no contexto educacional contemporâneo, um dos maiores desafios: “promover o desenvolvimento integral do ser humano. Sobre esse assunto Morin afirma que o ser humano é a um só tempo físico, biológico, psíquico, cultural, histórico e social” (MORIN, 2003, p. 15).

Mediante o exposto, nos deparamos com a extrema necessidade de formar indivíduos na sua integralidade, porém tais recomendações não dependem somente dos conteúdos acadêmicos com foco na inserção ao mercado de trabalho, tal formação deve ser voltada para a sua existência, para o exercício da cidadania, para fazer valer a democracia, para dominar uma atitude permanente de aprendizado, alcançando êxito no seu projeto de vida, no prosseguimento dos estudos, num desejo de empreender ou numa realização pessoal.

Sabemos que em nossa realidade há muitos desafios, e para desfrutar do sucesso escolar, pessoal e profissional, temos que tomar decisões, administrar conflitos, lidar com pressões, traçar metas, manter o foco, ministrar conquistas e frustrações. E para isso, é fundamental saber organizar certas situações, tentando ao máximo, minimizar as possíveis dificuldades cotidianas. E isso exige de nós uma série de atitudes, habilidades e competências.

Dentre as competências, destacamos as competências socioemocionais, que têm ganhado visibilidade em meio a tantas transformações da sociedade contemporânea, tornando-se imprescindível para obtenção de vitória mediante os desafios impostos. Assim, vemos na escola não somente a função de promover, nos seus estudantes, o desenvolvimento intelectual com a inserção dos conhecimentos historicamente produzidos, mas, também, a função de ser responsável por propiciar, para esses mesmos estudantes, o desenvolvimento de habilidades e competências que atendam a completude do ser humano.

A função da escola vai muito além da transmissão do conhecimento, pois é urgente e necessário fortalecer muitas e variadas competências nas nossas crianças e jovens, que lhes possibilitem construir uma vida produtiva e feliz em uma sociedade marcada pela velocidade das mudanças. Motivação, perseverança, capacidade de trabalhar em equipe e resiliência diante de situações difíceis são algumas das habilidades socioemocionais imprescindíveis na contemporaneidade... E no futuro dos nossos alunos (ABED, 2014, p. 14).

Segundo Santos e Primi (2014) “[...] pesquisas revelam que o conjunto de características socioemocionais contribui aproximadamente tanto quanto as cognitivas na determinação do êxito escolar, tal como medido por notas, probabilidade de abandono e escolaridade final atingida” (SANTOS; PRIMI, 2014, p. 27).

Sendo assim, é fundamental trabalhar as competências socioemocionais no âmbito escolar, sendo primordial também, reformular o olhar sobre os aspectos pedagógicos, investindo prioritariamente na formação do professor, oferecendo a ele condições para a construção de ambientes favoráveis à aprendizagem, a fim de realizar a mediação de forma consciente e responsável, reconhecendo e atuando nas múltiplas inteligências e nos diferentes estilos cognitivo-afetivos, buscando escolher, de maneira proposital, ferramentas que facilitem e estimulem a comunicação, a criatividade e o pensamento crítico dos estudantes.

A formação constitui, sem dúvida alguma, um dos elementos básicos do desenvolvimento profissional de qualquer profissão e, naturalmente, dos professores e constitui um importante instrumento para a qualidade do ensino. Proporcionar formação que desperte e desenvolva as competências emocionais nos profissionais de educação e fornecer-lhes ferramentas que lhes permitissem aumentar, por sua vez, essas competências aos seus discentes (COELHO, 2013, p. 66).

Nessas condições, pensar a formação do professor é cogitar, para a formação inicial, a reformulação dos cursos de licenciatura, para que disciplinas que abordem tais competências sejam inseridas.

Consideramos que logo na formação inicial destes profissionais deverá estar previsto no seu plano de estudos o desenvolvimento de Competências Emocionais. Não só para o futuro professor, mas também deverá contemplar a aprendizagem de metodologias que

desenvolvam essas mesmas competências nos alunos (CAMPOS *et al.*, 2016, p. 224).

Quanto aos profissionais que já atuam, deve haver o compromisso de políticas públicas em oferecer capacitações para que eles tenham a oportunidade de discutir, debater e refletir sobre as estratégias de aprendizagem que contemplem as competências socioemocionais.

Nesse contexto, é importante ressaltar, o professor necessita, por parte dessas políticas públicas e dos gestores, um olhar atencioso, de forma a ser cuidado, acolhido, ter melhores condições de trabalho e salários, para desenvolver em si competências fundamentais, para que, assim, consiga desenvolver nos estudantes habilidades que serão primordiais para a realização do seu projeto de vida.

O “chão da escola” precisa se transformar, mas é certo que nenhuma mudança será viável se os professores não tiverem o suporte necessário para assumir o papel de protagonistas privilegiados deste enredo, o que não é tarefa fácil, nem simples. Afinal, somos “seres do nosso tempo”, a maior parte dos educadores de hoje vivenciou uma escolarização tradicional, muitas vezes mecânica e esvaziada de sentidos. Ser “autor de mudanças” exige dos professores o desenvolvimento de suas próprias habilidades. Estes, para tanto, precisam que os gestores da escola cumpram seu papel na valorização, formação e apoio da equipe docente, ancorados por políticas públicas claras, consistentes e eficazes (ABED, 2014, p. 8).

Vale lembrar que ao falar da formação do professor, nossa maior preocupação é em assegurar a ele espaços de reflexão sobre a prática pedagógica, de maneira a fazer com que os professores tenham autonomia para a tomada de decisões e participem de maneira efetiva dos rumos que alicerçam a educação. Nesse sentido, cabe ressaltar que o professor não é um simples “cumpridor de tarefas” e, sendo assim, necessita estar “a par” de todas as decisões que orientam o seu trabalho, sendo primordial estar presente na sua formação a criticidade, já que o maior objetivo da educação não é formar indivíduos que se adaptem à realidade existente, e sim capazes de transformar tais realidades.

Com essa perspectiva, com o objetivo de capacitar os estudantes pautados em aspectos críticos, reflexivos, dotados de valores morais e capazes de atuar para a transformação da sociedade, podemos identificar a necessidade de explorar em sala de aula as competências socioemocionais. Tal capacitação fundamentada por

Paulo Freire, deve viabilizar a base da convivência entre os envolvidos, de forma que professores e estudantes estabeleçam um espaço de interação saudável, com pessoas mais solidárias, conscientes socialmente, capazes de ministrar conflitos e estabelecer vínculos afetivos. Abed (2014), destaca que:

O trabalho pedagógico com vistas ao desenvolvimento socioemocional não deve ser considerado como ‘mais uma tarefa do professor’, mas sim como um caminho para melhorar as relações interpessoais na sala de aula e construir um clima favorável à aprendizagem (ABED, 2014, p. 122).

Dessa forma, para se estabelecer ambientes de interação, o professor deve adotar como premissa a prática do diálogo, que potencializa espaços de escuta, discussão, reflexão e tomada de decisões coletivas. Nesse sentido, Lopes (2009) afirma que

[...] quanto mais o professor compreender a dimensão do diálogo como postura necessária em suas aulas, maiores avanços conquistará em relação aos alunos, pois desse modo, sentir-se-ão mais curiosos e mobilizados para transformarem a realidade. Quando o professor atua nessa perspectiva, ele não é visto como um mero transmissor de conhecimentos, mas como um mediador, alguém capaz de articular as experiências dos alunos com o mundo, levando-os a refletir sobre seu entorno, assumindo um papel mais humanizador em sua prática docente” (LOPES, 2009, p. 5).

Sendo assim, convém apresentar aos professores as habilidades socioemocionais que são discutidas como relevantes para o direcionamento do trabalho pedagógico na escola. No meio acadêmico, pesquisadores tem se dedicado ao estudo em torno de tais competências, havendo, dessa forma, um consenso em elencar as habilidades socioemocionais em cinco grandes domínios: os chamados “Big Five”. Os cinco domínios propostos nos “Big Five” são:

1. **Openness** (Abertura a experiências) => estar disposto e interessado pelas experiências – curiosidade, imaginação, criatividade, prazer pelo aprender.
2. **Conscientiousness** (Conscienciosidade) => ser organizado, esforçado e responsável pela própria aprendizagem – perseverança, autonomia, autorregulação, controle da impulsividade.

3. **Extraversion** (Extroversão) => orientar os interesses e energia para o mundo exterior – autoconfiança, sociabilidade, entusiasmo.
4. **Agreeableness** (Amabilidade – Cooperatividade) => atuar em grupo de forma cooperativa e colaborativa – tolerância, simpatia, altruísmo.
5. **Neuroticism** (Estabilidade emocional) => demonstrar previsibilidade e consistência nas reações emocionais – autocontrole, calma, serenidade (ABED, 2014, p. 16).

Porém, é importante destacar que os cinco domínios propostos devem ser vistos como orientadores ao trabalho pedagógico e não como proposta educativa em si, conforme defendido por Zambianco (2020):

Cabe ressaltar que o constructo do Big Five, usado em programas para desenvolvimento de competências socioemocionais, é, em sua origem, uma medição para verificação de traços de personalidade, nascendo com o objetivo de promover uma avaliação para tornar visível a personalidade humana. Não estaria direcionado, então, como proposta educativa em si, embora tais programas sejam usados no ambiente escolar. No entanto, no Brasil, esse referencial serviu de pano de fundo para a elaboração de propostas educacionais [...] basta dizer que temos um olhar suspeito em apoiar propostas educacionais em larga escala, baseadas em uma teoria da personalidade que se originou em uma avaliação, sendo que não ficam claras as intencionalidades dos resultados dessa medição e nossa preocupação é a rotulação das muitas crianças e adolescentes, sem o cuidado devido para apoiá-los em seu desenvolvimento (ZAMBIANCO, 2020, p. 73-74).

Nessa linha, a autora traz com pertinência uma preocupação que aflige educadores brasileiros em relação a políticas públicas neoliberais voltadas ao setor educacional, que por muitas vezes, não são claras e são implantadas sem a participação dos reais interessados, os professores e a comunidade escolar. Tal espaço para debate e discussão deve ser ofertado àqueles que atuam na linha de frente da educação, que conhecem os reais problemas enfrentados em sala de aula e que possuem competência para opinar e atuar na tomada de decisões.

A educação não pode perder o foco que é formar o indivíduo na sua integralidade, assegurando a ele condição de se desenvolver em todas as suas dimensões, intelectual, emocional, cultural, física e social, tornando-se capaz de adquirir autonomia e criticidade para a construção do seu projeto de vida. Dessa



forma, não podemos admitir que políticas públicas mal intencionadas mudem o foco da educação, visando no setor educacional a formação de capital humano tendo as escolas como o único objetivo a geração de lucro sobre pessoas. Embora vivamos numa sociedade capitalista, não podemos permitir que transformem a educação num “grande negócio”, no qual empresas faturam incansavelmente em cima da exclusão de pessoas. Nesse aspecto, Saviani (2008), traz com relevância a compreensão tecida sobre a educação:

[...] um investimento em capital humano individual que habilita as pessoas para a competição pelos empregos disponíveis. O acesso a diferentes graus de escolaridade amplia as condições de empregabilidade do indivíduo, o que, entretanto, não lhe garante emprego, pelo simples fato de que, na forma atual do desenvolvimento capitalista, não há emprego para todos: a economia pode crescer convivendo com altas taxas de desemprego e com grandes contingentes populacionais excluídos do processo (SAVIANI, 2008, p. 430).

Assim, temos que resgatar a educação inclusiva que ofereça aos estudantes processos formativos que contemplem de fato a sua integralidade, sendo capazes de fazê-los refletir sobre o seu papel na sociedade, de forma a interferir sobre a sua realidade de maneira consciente, responsável, ao mesmo tempo, humana e solidária.

Ao falar das competências socioemocionais se faz necessário destacar também, a inteligência emocional, indispensável no equilíbrio das relações. De maneira análoga, podemos dizer que todo indivíduo precisa saber lidar com as suas emoções e sentimentos para conseguir estabelecer boas relações com as outras pessoas. Isso significa o desenvolvimento da inteligência emocional, um dos principais conceitos associados às competências socioemocionais.

A IE é a capacidade de perceber, avaliar e expressar emoções com precisão; a capacidade de acessar e/ou gerar sentimentos quando estes facilitam o pensamento; a capacidade de entender as emoções e o conhecimento emocional e a capacidade de regular emoções para promover o crescimento emocional e intelectual (MAYER; SALOVEY, 1997, p. 401).

Segundo Goleman (2001), a Inteligência Emocional é definida como “[...] capacidade de identificar nossos próprios sentimentos e os dos outros, de motivar a

nós mesmos e de gerenciar bem as emoções dentro de nós e em nossos relacionamentos” (GOLEMAN, 2001, p. 337).

Nesse aspecto, é importante considerar o desenvolvimento da inteligência emocional desde a infância, com o intuito de contribuir com a formação de pessoas mais equilibradas emocionalmente, capazes de se relacionar de maneira empática. “Todas as emoções são, em essência, impulsos para lidar com a vida que a evolução nos infundiu” (GOLEMAN, 1995, p. 20).

Vimos, portanto que trabalhar as emoções, é algo preponderante para a formação docente, levando em consideração os desafios enfrentados na profissão, sendo primordial tolerar pressões, angústias e frustrações, podendo assim, desenvolver habilidades como o autoconhecimento, a resiliência e o trabalho em equipe. Além disso, o professor necessita estabelecer distância segura de envolvimento com os seus estudantes, no sentido de se precaver em relação às emoções externas. O docente deve sim, mostrar afeto, buscar ter um relacionamento amigável, ser bom ouvinte, porém, não se envolver integralmente com os problemas trazidos pelos seus estudantes, já que muitas vezes são queixas de origem social ou pessoal que não lhe cabe resolvê-las. Saber diferenciar suas emoções com a de seus discentes, não absorvendo essas questões para si, é fundamental, pois ao contrário, poderá acarretar o abalo da sua saúde mental e emocional, trazendo sentimentos como tristeza, raiva, impotência e desânimo.

Sobre os domínios propostos no Big Five, percebemos que eles possuem relevância para o desenvolvimento cognitivo da aprendizagem explorados na escola. Porém, se torna primordial, a reformulação da didática, a mudança de olhar em como se dá a aprendizagem, e o mais importante, a responsabilidade sobre o papel do professor ao compreender as singularidades de cada indivíduo, respeitando sua personalidade no decorrer do processo. Dessa forma, planejar aulas que atendam as características individuais, ao mesmo tempo em que consigam estimular competências pertinentes ao desenvolvimento da autonomia se torna imprescindível para o professor. Há a necessidade de elaborar aulas que sejam “apetitosas”, que explorem o paladar do aprendiz, da mesma forma que contemple o desenvolvimento das competências socioemocionais citadas no “Big Five”.

O cuidado do professor ao preparar suas aulas deveria ser equivalente ao de um bom cozinheiro esmerando-se na confecção de

suas iguarias. O corpo desconhece o valor nutritivo do alimento, mas sente sua carência. Cabe ao mestre-cozinhador introduzir nos pratos os ingredientes nutritivos. O professor deve ter muita criatividade para tornar sua aula apetitosa. Os temperos fundamentais são alegria, bom humor, interação, respeito humano e disciplina (TIBA, 2006, p. 132).

Utilizando a analogia trazida por Tiba (2006), podemos destacar a função primordial do professor na ação e reflexão de sua prática pedagógica. Suas aulas devem possuir um tempero especial na vida do estudante, devem ser ricas em conteúdo, ao mesmo tempo, saborosas e fáceis de ingerir. Isso nos remete a pensar em quais tipos de metodologias de ensino tal profissional deve adotar para que aconteçam aulas dessa natureza.

Podemos lembrar das características da PBL, que possui muitos dos requisitos propostos citados aqui, sendo uma metodologia de ensino ativa, que foge ao formato instrucionista, possuindo características mais dinâmicas, centradas no protagonismo, no trabalho coletivo e em premissas que parecem contribuir com a formação integral do estudante.

A PBL exige dos estudantes o desenvolvimento de uma ampla gama de habilidades para disponibilizá-las, para aprender efetivamente – equipes trabalhando habilidades, habilidades de informação e, talvez, o mais importante para o desenvolvimento profissional, uma alta ordem das habilidades cognitivas. Em vez de aceitar tranquilamente a informação transmitida para eles através das muitas formas tradicionais de ensino, os alunos agora têm de se envolver criticamente com o conhecimento que eles vêm adquirindo para eles próprios. (MacDONALD, 2001, p. 3)

Tal proposta de ensino busca contemplar um ambiente acolhedor, no sentido de receber o aprendiz, reconhecendo-o como sujeito único, que possui habilidades e limitações, e o mais importante, que possui uma história. Dar voz ao estudante, significa se abrir para conhecê-lo, ouvir sobre suas conquistas, suas frustrações, seus sonhos, seu ponto de vista em relação ao mundo e, assim, buscar conexão entre o que se ensina e o que se almeja. Nessa perspectiva, Freire (1996) complementa:

Como prática estritamente humana jamais pude entender a educação como experiência fria, sem alma, em que os sentimentos e as emoções, os desejos, os sonhos devessem ser reprimidos por uma espécie de ditadura racionalista. Nem tampouco jamais

compreendi a prática educativa como uma experiência a que faltasse rigor em que se gera a necessária disciplina intelectual (FREIRE, 1996, p. 146).

Nesse aspecto, desenvolvendo aulas num ambiente agradável, onde haja diálogo e empatia entre as pessoas, percebemos que se torna muito mais fácil desenvolver qualquer aprendizagem, pois ali se estabelece relações de confiança, e assim o aprendizado flui de uma maneira muito mais significativa e prazerosa.

Estabelecer um bom vínculo diz respeito a desenvolver a confiança e o respeito mútuo entre professor e aluno, sem que isso prejudique os diferentes papéis de cada um e a autoridade do professor como aquele que medeia e organiza os contornos da cena pedagógica. 'Ser amigo' não significa colocar-se no mesmo patamar do aluno, mas sim ocupar o seu próprio lugar na relação de ensino-aprendizagem de modo amoroso, cultivando o respeito mútuo (GARCIA *et al.*, 2013, p. 40).

É importante conhecer cada estudante e a realidade que o cerca, tentando desenvolver um relacionamento em que a empatia, o acolhimento e a presença contribuam para a renovação de suas perspectivas e seu comprometimento com o percurso escolhido.

Nessa perspectiva, rerepresentaremos os cinco constructos do Big Five a fim de associá-los aos preceitos educacionais da PBL:

1. **Openness (Abertura a experiências):** o primeiro domínio diz respeito ao interesse do estudante pelas experiências, no sentido de estar disposto e interessado, desenvolvendo habilidades como a curiosidade, a imaginação, a criatividade e o prazer pelo aprender.

Dessa forma, vemos na PBL a oportunidade de direcionar o trabalho do professor ao planejamento de aulas que contemplem as habilidades mencionadas, a começar pela mudança de paradigma de ensino fugindo do modelo convencional. Nessa metodologia, o estudante passa a ser o centro do processo, seus conhecimentos prévios são considerados e a gama de problemas apresentados expõem a realidade profissional do aprendiz.

Um dos preceitos da PBL é motivar a aprendizagem oferecendo um ensino descaracterizado da ideia de que o estudante é um receptor passivo. Nesse viés,

temos como aliada às ideias de Paulo Freire que considerava as relações entre professores e estudantes no ensino instrucional como essencialmente narradoras, através da transmissão dos conteúdos, surgindo assim, a dura crítica à educação bancária:

A 'educação bancária', caracterizada por Freire, é constituída pela simples narração ou dissertação de conteúdos do professor para o aluno, em um processo que ignora a dinâmica e a complexidade da realidade concreta que construímos e da qual fazemos parte. Na educação bancária, a realidade é considerada como algo estático e fragmentado, desvinculada do cotidiano do aprendiz, que passa a ser um receptor passivo de informações do agente ativo do processo educacional, o 'educador' (PIERINI; LOPES; ALVES, 2019, p. 181).

Acreditamos que um ensino centrado no estudante, responsável pela sua aprendizagem, oportuniza o desenvolvimento de competências socioemocionais, pois potencializa a participação, estimula a criatividade e desenvolve também a criticidade. Na PBL, os estudantes

[...] Aprendem a regular o processo de forma apropriada, eventualmente encontrando protocolos de aprendizagem que funcionam para eles. Tendo em vista que a aprendizagem é autodeterminada e adquirida pelas próprias 'escavações' ou estudos, os aprendizes se tornam participantes ativos, investindo e engajando-se pessoalmente na facilitação da própria aprendizagem. As recompensas se tornam internas e menos atribuídas pelo professor. A aprendizagem, o ritmo, o conteúdo, o estilo, a autoavaliação e a determinação dos recursos se tornam um esforço colaborativo entre professores e estudantes (GLASGOW, 1996, p. 26).

Portanto, temos na PBL a elaboração de uma proposta educativa que ultrapassa a simples transmissão de conhecimentos, potencializando no estudante a busca pela construção de sua aprendizagem.

2. **Conscientiousness (Conscienciosidade):** o segundo domínio diz respeito à organização por parte do estudante, ao esforço e à responsabilidade pela própria aprendizagem, tendo como características fundamentais a perseverança, a autonomia, a autorregulação e o controle da impulsividade.

Nesse aspecto, podemos associar aos objetivos educacionais da PBL, além dos fatores já expostos anteriormente, a questão do desenvolvimento da autonomia, tão essencial para a formação do estudante.

Ainda pautados em Paulo Freire, podemos citar o proposto de uma prática educativa que conduza ao desenvolvimento da autonomia em situações que explorem o saber trazido pelo aprendiz. Dessa forma, temos que a PBL:

[...] como processo de ensino-aprendizagem implica uma nova estruturação organizacional e de práticas no ambiente escolar, onde são geradas condições para que os alunos se transformem em agentes ativos no processo educativo. Condições para que possam atuar coletivamente, aprender, criar e recriar conceitos, construir e reconstruir suas percepções do mundo, solucionando problemas e tornando-se mais capazes de atuar na melhoria da qualidade de vida social (PIERINI; LOPES; ALVES, 2019, p. 183).

Construir a autonomia no aprendiz é dar a ele condições de interagir, se manifestar, participar da tomada de decisões e refletir continuamente sobre sua aprendizagem. Dessa forma, acreditamos estimular a autorregulação e o controle da impulsividade mediante o fortalecimento do compromisso desse estudante por seu próprio processo de construção do conhecimento:

A regulação do próprio comportamento implica em autocontrole, em autonomia e responsabilidade sobre as próprias decisões e ações. Implica também no desenvolvimento da flexibilidade e na administração intencional da energia e tempo dedicados a cada tarefa (GARCIA *et al.*, 2013, p. 35).

3. **Extraversion (Extroversão):** temos como o terceiro domínio, o compromisso de orientar os interesses e energia para o mundo exterior dos estudantes, desenvolvendo assim, a autoconfiança, a sociabilidade e o entusiasmo.

Conforme já discutido anteriormente, surge mais uma vez, a necessidade de explorar com mais ênfase questões relativas à extroversão dos estudantes. Uma das desvantagens apresentadas na PBL diz respeito a adaptação de estudantes introvertidos a lidarem com a metodologia de ensino, conforme exposto por Solari (2004):

Com relação às desvantagens, temos a dificuldade da condução de um trabalho em grupo que demanda um nível de maturidade mínimo para aplicação, assim, docentes queixam-se do fato de que o trabalho em grupo dificulta a avaliação individual e as dificuldades dos estudantes individualistas em compartilhamento e dos estudantes excessivamente competitivos e introvertidos de se adaptarem à natureza participativa e colaborativa do PBL. Além disso, em grupos com pouca cooperação entre os membros, alunos maduros intelectualmente e com maior expressão verbal podem constranger aqueles menos articulados (SOLARI, 2004, p.53).

Nesse aspecto, vemos na PBL, a oportunidade de desenvolver nos estudantes introvertidos, extremamente competitivos e individualistas, habilidades como autoconfiança, cooperatividade e empatia, através da mediação da aprendizagem do trabalho em equipe.

Podemos arriscar e dizer também, que tal metodologia auxilia estudantes introvertidos a lidarem com suas limitações, pois a medida em que são estimulados a participar, saem de suas “zonas de conforto” e tendem a interagir com o grupo, enfrentando assim, suas frustrações e medos. Desse modo, a prática pedagógica do professor deve estar de acordo com o exposto, de maneira a apresentar espaços de aprendizagens desconhecidos e desafiadores:

Incentivar os alunos a enfrentar o novo (desconhecido) e o complexo (desafiante) estimula a curiosidade intelectual e o prazer pelo aprender em si mesmo. Implica em desenvolver a humildade e a aceitação dos próprios limites que, ao invés de paralisar, deveriam instigar a busca constante de ampliação dos recursos internos e enriquecimento pessoal (ABED, 2014, p. 67).

4. **Agreeableness (Amabilidade – Cooperatividade):** no quarto domínio é apresentada a competência de atuação em grupo de forma cooperativa e colaborativa, com o desenvolvimento de habilidades como a tolerância, a simpatia e o altruísmo.

Um dos preceitos da PBL é estabelecer o trabalho em grupo, corroborando com o desenvolvimento das habilidades citadas anteriormente.

Somos humanos porque aprendemos uns com os outros em situações em que a cooperação cria a vida, a sociedade e o próprio conhecimento. Não somos somente seres sociais. Somos sociais porque aprendemos a nos tornar cooperativos. Somos seres original

e essencial, interativos. Somos seres em que a relação do eu-outro, criadora de diferentes experiências de sermos um nós, nos faz seres de uma espécie conectiva. Convivemos sem cessar entre nós, e sabemos que nisto a pessoa de cada um conta e soma (BRANDÃO, 2005, p. 91).

O trabalho em equipe propicia um ambiente de interação, colabora com o desenvolvimento de vínculos afetivos, estabelece relações de confiança, empatia, solidariedade e respeito. Além disso, as relações sociais potencializam a aprendizagem, pois:

A aprendizagem humana é, acima de tudo, relacional – ocorre no seio de interações entre as pessoas. Portanto, as habilidades de qualidade social também são inerentes ao processo de ensino-aprendizagem. Para aprender, é necessário estabelecer vínculos saudáveis entre o ensinante, o aprendente e os objetos do conhecimento. É necessário inserir-se nos grupos sociais, acatar as regras estabelecidas para o convívio em sociedade, respeitar os direitos e deveres dos cidadãos. Saber expressar-se com clareza, preocupando-se com a compreensão do outro, é fundamental. É preciso saber trabalhar em equipe, estabelecer metas em comum, postergar a satisfação das necessidades individuais em prol dos objetivos grupais, e muitas outras habilidades de convivência, cooperação e colaboração (ABED, 2014, p. 21-22).

5. **Neuroticism (Estabilidade emocional):** o quinto e último domínio, se refere a mostrar previsibilidade e consistência nas reações emocionais, apresentando habilidades como autocontrole, calma e serenidade.

Para o desenvolvimento de tais competências, podemos associar mais uma vez, a importância do trabalho em equipe, frisando a importância da inteligência emocional no gerir das relações:

A educação emocional busca tornar um indivíduo mais inteligente emocionalmente. O que significa que ele terá mais chances de um convívio social estável. Além disso, será capaz de trabalhar em grupo, terá mais confiança diante dos desafios do dia a dia, estará mais apto ao relacionamento interpessoal e, principalmente, será mais otimista e equilibrado diante das exigências impostas pela sociedade (WEDDERHOFF, 2001, p. 5).

Podemos citar também a importância da relação professor aluno tão primordial à construção do conhecimento, e nesse viés, a PBL contribui com



proposta educativa diferenciada, onde o professor assume um papel de mediador, interagindo com os estudantes. Nesse formato, o docente provoca, desafia, estimula relações, organiza e orienta processos de estudo, podendo desenvolver assim, habilidades como o autocontrole, a autoconfiança, a responsabilidade e o equilíbrio emocional.

Segundo Goleman (1995):

As pessoas com prática emocional bem desenvolvida têm mais probabilidade de se sentirem satisfeitas e de serem eficientes em suas vidas, dominando os hábitos mentais que fomentam sua produtividade (GOLLEMAN, 1995, p. 49).

Constatamos, porém, mais uma premissa da PBL que proporciona a integração entre docentes e discentes, oportunizando o desenvolvimento de habilidades e atitudes como o respeito, a tolerância e a empatia, desenvolvendo também, a resiliência emocional por meio de situações-problemas que potencializam o contato dos estudantes com os desafios oriundos da profissão.

Dessa forma, acreditamos que a PBL parece satisfazer o desenvolvimento das competências socioemocionais, e conseqüentemente, da inteligência emocional através de prática de ensino voltada ao protagonismo discente, podendo contribuir, assim, com o almejado desenvolvimento integral do estudante.

## 2.2 FORMAÇÃO DE PROFESSORES

A formação de professores é um tema amplamente discutido e relevante no campo educacional, dada a sua pertinência e responsabilidade direta diante das práticas docentes que têm como finalidade transformar a educação. Para Freire (1996), “[...] ser professor é ter a certeza de que faz parte de sua tarefa docente não apenas ensinar conteúdos, mas também ensinar a pensar certo”.

Nessa perspectiva, entendemos que a formação de professores deve se consolidar num viés mais crítico e reflexivo de maneira a estruturar modelos de formação que preparem os professores para conhecer a realidade e construir uma consciência crítica. A começar pela inclusão dos professores em debates e escolhas que direcionam o setor educacional e que resultam em ações transformadoras em relação a si próprios e aos contextos em que atuam.

Dessa forma, nessa seção, abordaremos a formação de professores pautadas na construção de um profissional crítico e consciente, capaz de reconhecer sua importância social estabelecendo, assim, ações que fortaleçam a prática pedagógica e os saberes da experiência, o que autoriza um processo de posicionamentos teóricos e práticos conscientes que consigam intervir e transformar positivamente a realidade que o cerca.

### **2.2.1 A Formação de Professores e a Aprendizagem Baseada em Problemas**

São inúmeras expectativas e perspectivas que impulsionam pesquisas sobre a Formação de Professores, a fim de tentar descobrir quais práticas se mostram “eficazes” para formar indivíduos “competentes” ao ofício de professor. Para Perrenoud (1999, p. 7), se entende por competência “[...] a capacidade de agir eficazmente em determinado tipo de situação, apoiada em conhecimentos, mas sem limitar-se a eles”.

Segundo o autor, somente a base teórica é insuficiente para fundamentar os saberes da docência que constituem a competência da profissão, há a necessidade de fazer associações, inferências e estabelecer relações entre teoria e prática a partir de vivências da práxis num movimento dinâmico e articulado.

Na perspectiva da práxis docente, Vazquez define tal competência como “Atividade teórica e prática que transforma a natureza e a sociedade e, prática, na medida em que esta ação é consciente (VAZQUEZ, 1977, p. 35).”.

Nessa mesma perspectiva, Therrien (2006) destaca que:

[...] o trabalho docente é entendido enquanto práxis transformadora de um sujeito (professor) em interação situada com outro sujeito (aluno), onde a produção de saberes e de significados caracteriza e direciona o processo de comunicação, dialogicidade e entendimento entre ambos na direção de uma emancipação fundada no ser social. Nessa concepção, o trabalho docente é visto como um processo educativo de instrução e de formação humana, através da mediação e da interação entre professor e alunos, a partir dos conteúdos do ensino em direção à construção de uma sociabilidade verdadeiramente humana onde sujeitos constroem sua identidade no seio de uma coletividade (THERRIEN, 2006, p. 72).

Dessa forma, há uma notória discussão em torno da formação docente, fundamentada pela complexidade existente entre as esferas da Racionalidade Técnica e da Racionalidade Prática.

No paradigma da Racionalidade Técnica, a prática é vista como uma aplicação da teoria, o que supõe a superioridade do conhecimento teórico sobre os saberes práticos. No paradigma da Racionalidade Prática, experiências práticas são propostas desde os primeiros anos de formação, nesse caso, a prática é o ponto de partida para o professor refletir sobre suas ações e (re)elaborar teorias e práticas (SOUSA, 2011, p. 57).

Segundo Giroux (1997), na perspectiva da racionalidade técnica, os professores não são considerados como sujeitos reflexivos e sim meros cumpridores de tarefas preestabelecidas:

Quando os professores de fato entram no debate é para serem objeto de reformas educacionais que os reduzem ao status de técnicos de alto nível cumprindo ditames e objetivos decididos por especialistas um tanto afastados da realidade cotidiana da vida em sala de aula. A mensagem parece ser que os professores não contam quando se trata de examinar criticamente a natureza e processo de reforma educacional (GIROUX, 1997, p. 157).

A crítica à racionalidade técnica está presente nos diferentes setores da educação e, assim, tem gerado uma série de estudos que procuram compreender e superar a relação estreita e mecânica existente entre o conhecimento técnico-científico e a prática docente.

Nesse contexto, a insatisfação com a formação docente baseada na racionalidade técnica foi expressa em um estudo das grades curriculares e ementas de 94 cursos de licenciatura realizado por Bernardete Gatti, o qual aponta que não há uma articulação entre as disciplinas de formação específicas (conteúdo da área disciplinar) e a formação pedagógica (conteúdo da docência). Além disso, Gatti constatou que raras instituições especificam em que consistem os estágios supervisionados e sob que forma de orientação são realizados (GATTI, 2009 *apud* SOUSA, 2011, p. 57).

Desse modo, o modelo de formação docente pautado na racionalidade técnica mostrou-se insuficiente à realidade da prática profissional docente contemporânea, sendo necessário optar pela mudança de paradigma que defende o

modelo da racionalidade prática. Aproximando-se de uma definição de formação de professores, Garcia explicita que:

A Formação de Professores é área de conhecimentos, investigação e de propostas teóricas e práticas que (...) os professores – em formação ou em exercício – se implicam individualmente ou em equipe, em experiências de aprendizagem, através das quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos, competências e disposições, e que permite intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com o objetivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem (GARCIA, 1999, p. 26).

Na mesma linha, Pereira (1999) defende que a formação docente deve ser definida pelo modelo da racionalidade prática, pois:

O professor é considerado um profissional autônomo, que reflete, toma decisões e cria durante sua ação pedagógica, a qual é entendida como um fenômeno complexo, singular, instável e carregado de incertezas e conflitos de valores. De acordo com essa concepção, a prática não é apenas *lôcus* da aplicação de um conhecimento científico e pedagógico, mas espaço de criação e reflexão, em que novos conhecimentos são, constantemente, gerados e modificados (PEREIRA, 1999, p. 113).

Na perspectiva de professor reflexivo, salientamos também a importância do professor pesquisador, aquele que busca fundamentação teórica para o aperfeiçoamento de sua atuação. Freire (1996) reforça a importância da pesquisa quando afirma que:

Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino. Esses que fazeres se encontram um no corpo do outro. Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade (FREIRE, 1996, p. 29).

Convém destacar também, que um dos preceitos da PBL é a valorização da pesquisa no ensino, tornando-se ferramenta indispensável de aprendizagem dentro da metodologia. Dessa forma, ressaltamos que tal metodologia abordada valoriza a formação de professores pesquisadores, ao mesmo tempo em que aponta a

necessidade da busca por conhecimento teórico, metodológico e a compreensão da dimensão teoria e prática através da pesquisa.

Aquilo que outrora era considerado apenas como ponte entre a formação específica e a pedagógica, deve ser, na verdade, considerado como o eixo principal da formação profissional do professor. Este eixo, portanto, é aquele que articula a teoria e a prática do ensino e promove atividades que contribuem para a formação do professor-pesquisador numa perspectiva de formação contínua. (FIORENTINI; SOUZA E MELO, 1998, p. 132).

Assim, pensamos a formação docente voltada à possibilidade de explorar novas metodologias que redirecionem o ensino para a mudança de paradigma, de forma a protagonizar a aprendizagem do estudante. Para isso, destacamos que a PBL parece possibilitar a discussão para a formação de professores numa dimensão mais crítica e reflexiva, atendendo ao racionalismo prático. Acreditamos que a PBL acentue a importância do conhecimento teórico, o domínio dos conteúdos e estimule a articulação entre teoria e prática num movimento dinâmico, a fim de mobilizar os saberes necessários ao exercício profissional, social e cidadão do educando. Segundo Candau (2000):

A escola precisa ser espaço de formação de pessoas capazes de serem sujeitos de suas vidas, conscientes de suas opções, valores e projetos de referência e atores sociais comprometidos com um projeto de sociedade e humanidade (CANDAU, 2000, p. 13).

Segundo Freire (2014), a atuação no mundo possibilita o saber da história, para a compreensão da realidade a fim de intervir, gerar novos saberes e transformá-la. O conhecimento do professor em formação ou em exercício é fruto de diversos saberes. Saberes esses que são acessados na contextualização da ação docente e que se esbarram todo o tempo nos saberes da formação.

O trabalho do professor é dinâmico e contínuo, assim ele se encontra diante de situações complexas em seu dia a dia, para as quais precisa encontrar respostas rápidas que podem ser criativas ou improdutivas, dependendo de sua capacidade e habilidade de leitura de mundo a qual dispõe de suas responsabilidades para transformar ou não a realidade que o cerca. Dessa forma, acreditamos que o contato com metodologias ativas como a PBL na formação docente, oportuniza o desenvolvimento de uma formação ligada à experientiação, capacitando estratégias

de atuação em situações em que os profissionais, possivelmente, irão vivenciar em sua prática.

As contribuições que visam reflexão na ação para a transformação estão presentes na esfera da racionalidade prática.

No racionalismo prático o aluno aprende por meio do fazer ou da performance, na qual ele busca tornar-se especialista e é ajudado nisso por profissionais que o instigam a enxergar por si mesmo as relações entre os métodos empregados e os resultados atingidos. (SCHÖN, 2000, p. 25). O aluno assume o papel de um pesquisador da sua prática profissional, não apenas o de um replicador de métodos ou teorias. Assim, através da integração entre teoria e prática, situações de aprendizagem podem ser usadas na PBL para ajudar os alunos a refletir criticamente sobre questões da prática e compreender a integração entre os conteúdos específicos, pedagogia e tecnologia. (SOUSA, 2011, p. 60).

Diante do exposto, destacamos que a PBL para a formação de professores indica aproximação à vertente do paradigma da racionalidade prática, desenvolvendo o pensamento social-crítico, as habilidades, as atitudes, o conteúdo e o aprender a pensar de maneira permanente como pontos cruciais na formação de docentes mais autônomos, críticos e reflexivos.

### **2.2.2 Formação inicial do professor de Matemática**

A formação inicial do professor de Matemática visa formar profissionais competentes para o exercício da profissão. Segundo Ponte (2002), por trás desta afirmação, aparentemente simples e consensual, esconde-se uma imensidão de problemas. O que é um professor competente? De que conhecimentos necessita? Que capacidades deve ter na esfera cognitiva, afetiva e social?

Um dos temas mais discutidos e polêmicos no que concerne ao ensino de Matemática é a formação inicial do educador matemático. Para debater sobre esse assunto, recorreremos a autores que abordam as competências explícitas e implícitas nessa formação, dentre eles, Ponte (2002), na tentativa de chegar a um dos fatores indicadores das dificuldades do ensino da Matemática atual, retomar aspectos positivos, discutir as competências e habilidades dos recém-licenciados, observar seus limites profissionais, suas necessidades e os reflexos dessa realidade no ensino da Matemática.

Segundo Perez (1995):

[...] competência, no que se refere ao campo educacional da Matemática, não significa ter um vasto conhecimento de conteúdo matemático. Ser um professor competente não se resume apenas àquele professor que prepara muito bem os conteúdos a serem ministrados aos seus alunos, àquele que cumpre o programa, àquele que parte sempre do mais simples para o mais complexo. É mais que isso, competência implica liberdade, no sentido de que o aluno possa aprender a ser independente, aprender a questionar, a raciocinar, a duvidar do que já é sabido” (PEREZ, 1995, p. 29).

Começamos, portanto, a delinear pesquisas como a de Paiva (2002) que nos oferece um diagnóstico dos problemas na formação inicial do professor de Matemática, elencando que:

- ✓ Os cursos de forma geral privilegiam as disciplinas específicas, deixando as disciplinas pedagógicas para os anos finais sem, contudo, fazer a devida relação entre elas e o ensino de Matemática;
- ✓ Nos cursos de licenciatura a realidade escolar não é, na maioria das vezes, observada pelos futuros professores, muito menos analisada e discutida, não havendo espaço para a reflexão sobre os problemas educacionais brasileiros;
- ✓ O estágio supervisionado é desvinculado de uma reflexão a respeito das questões educacionais e de sua problemática;
- ✓ As crenças e concepções dos alunos, futuros docentes, não são consideradas com vistas a uma prática reflexiva e dialógica, nem tão pouco levam em consideração que muitos já possuem experiências profissionais como docentes. (PAIVA *apud* D'ANTONIO; ARAÚJO; PAVANELLO, 2012, p. 126).

Diante do exposto, nos debruçamos sob a problemática existente na formação inicial do professor de Matemática, destacando que os cursos de licenciatura em Matemática têm sido objeto de estudo em pesquisas, devido a extrema relevância do levantamento dos problemas apresentados. De acordo com Tardif (2014, p. 283), a maioria dos cursos universitários de formação docente continua sendo “[...] dominada por formas tradicionais de ensino e por lógicas

disciplinares, [...] os currículos universitários ainda são demasiado fragmentados, [...] oferecidos em unidades de ensino de curta duração e sem relação entre elas, com pouco impacto nos alunos”.

D'Ambrosio (2003) defende ainda uma reformulação radical dos currículos de licenciatura e vê a formação de professores de Matemática como um dos grandes desafios para o futuro (FÜRKOTTER; MORELATTI, 2007, p. 322).

Dessa forma, pesquisas internacionais como a de Lampert e Ball (1999 *apud* PONTE, 2002) apresentam um diagnóstico bastante negativo da formação inicial de professores de Matemática nos Estados Unidos, atentando aos problemas da formação inicial do professor de Matemática, que infelizmente, não ocorrem somente em nosso país. Segundo as pesquisadoras, tais dificuldades são resultado de cinco principais tipos de atitudes desenvolvidas em cursos de formação inicial:

- 1) não atendem as crenças, concepções e conhecimentos que os professores trazem para o curso de formação inicial;
- 2) não mostram a necessidade de um conhecimento profissional;
- 3) não dão a devida atenção ao conhecimento didático;
- 4) separam a teoria e a prática, tanto fisicamente como conceitualmente, sendo a teoria raramente examinada na prática e a prática pouco interrogada pela teoria;
- 5) dão reduzida importância à prática profissional (PONTE, 2002, p. 3-4).

#### Imbernón afirma ser necessário

[...] que a formação inicial do professor de Matemática seja flexível e que desenvolva uma atitude crítica no licenciando de maneira cooperadora e colegiada e uma constante receptividade para o novo, já que a formação inicial tem de preparar para uma profissão que demanda continuar estudando durante toda a vida profissional. [...] não se trata, pois, de aprender um ofício em que predominam estereótipos e técnicas predeterminadas sendo que se trata de aprender os fundamentos de uma cultura profissional, que significa saber por que se faz, o que se faz e quando e porque será necessário fazê-lo de um modo distinto” (PEREZ, 1999, p. 53-54).

Com isso, lembremos da responsabilidade das instituições promotoras de formação inicial docente em Matemática, pois os cursos de formação inicial de educadores matemáticos são os grandes responsáveis pelo preparo do profissional da docência, seu embasamento teórico, sua postura profissional, os conteúdos matemáticos a ser lecionados e toda uma estrutura lógico-cognitiva necessária ao



bom desempenho do que se dispõe a ensinar Matemática. Sendo responsável também pelo seu contato com a prática pedagógica.

Um dos princípios norteadores da Base Nacional Comum Curricular é a unidade teoria-prática, presente nas recentes Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica (2015) que define:

5º São princípios da Formação de Profissionais do Magistério da Educação Básica [...] [V – a articulação entre a teoria e a prática no processo de formação docente, fundada no domínio dos conhecimentos científicos e didáticos, contemplando a indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão]; (MEC, 2015, p. 43).

Sendo assim, a separação entre teoria e prática representa uma das principais dificuldades nos cursos de licenciatura. Nesse sentido, Barth (1993) confirma a importância tanto da teoria quanto da prática pedagógica para a formação do professor:

O desafio mais importante na formação dos professores e dos formadores é sem dúvida conseguir suscitar uma mudança conceptual na sua relação com o saber e a sua elaboração. O que é o saber? O que anima o processo ensino-aprendizagem? As nossas 'teorias' implícitas nesta área influenciam forçosamente a nossa prática pedagógica. Em geral, elaborámo-las durante a nossa própria experiência enquanto educandos. Por isso, deixam de ser satisfatórias tal como são para quem se tornou educador ou formador: ele precisa de ferramentas de análise para modificar e alargar a sua percepção intuitiva. Trata-se de uma verdadeira transformação conceptual, portanto duma nova compreensão daquilo que realizamos quando aprendemos e ensinamos. Aí é que reside o desafio da formação. (BARTH, 1993, p. 13).

Além disso, a Resolução CNE/CP nº 2, de 20 de dezembro de 2019, traz no seu artigo 7º a questão da “[...] organização curricular dos cursos destinados à Formação Inicial de Professores para a Educação Básica, em consonância com as aprendizagens prescritas na BNCC da Educação Básica” (MEC, 2019, p. 4), como um dos princípios norteadores o:

II – reconhecimento de que a formação de professores exige um conjunto de conhecimentos, habilidades, valores e atitudes, que estão inerentemente alicerçados na prática, a qual precisa ir muito além do momento de estágio obrigatório, devendo estar presente, desde o início do curso, tanto nos conteúdos educacionais e

pedagógicos quanto nos específicos da área do conhecimento a ser ministrado. (MEC, 2019, p. 4)

De acordo com tais exigências, temos a necessidade de uma reformulação no formato das licenciaturas que estabelecem a relação teoria e prática desde o primeiro ano do curso, indicando uma mudança significativa nos moldes das disciplinas de prática de ensino que atendem aos estágios supervisionados. Nesse sentido, defendemos o contato dos licenciandos com concepções de prática de ensino e de estágio numa perspectiva em que se busque diferentes formas de pensar a escola em suas relações com a sociedade e sua transformação na busca de elaboração e produção de conhecimento.

Em contrapartida ao exposto, Barreiro e Gebran (2006) relatam uma diferente realidade dos estágios supervisionados, explicitando que

De modo geral, os estágios têm se constituído de forma burocrática, com preenchimento de fichas e valorização de atividades que envolvem observação, participação e regência, desprovidas de uma meta investigativa. Dessa forma, por um lado se reforça a perspectiva do ensino como imitação de modelos, sem privilegiar a análise crítica do contexto escolar, da formação de professores, dos processos constitutivos da aula e, por outro lado, reforçam-se práticas institucionais não reflexivas, presentes nas unidades formadoras de professores e nas escolas de Educação básica, que concebem o estágio como o momento da prática e de aprendizagens de técnicas do bem fazer (BARREIRO; GEBRAN, 2006, p. 26-27).

De acordo com o exposto, vimos a importância da disciplina da prática de ensino, que oportuniza aos futuros professores, através dos estágios supervisionados, o primeiro contato com a sua área de atuação. Estar inserido nessa realidade representa uma preparação para as eventuais situações-problemas que os docentes irão enfrentar. Dessa forma, há a extrema necessidade de estágios supervisionados que atendam às características formativas, espaços de aprendizagens significativos que oportunizem aos futuros docentes momentos de interação e reflexão, relacionando os conteúdos matemáticos com as teorias de aprendizagem e as práticas de ensino.

Nesse aspecto, a pesquisa coordenada por Gatti e Nunes (2009) revela que a distribuição dos conteúdos da formação do professor de Matemática não se dá de forma similar entre os diversos cursos que existem no país, indicando que cada

currículo privilegia alguns campos em detrimento de outros. Segundo as autoras, podem-se identificar três tipos de cursos de licenciatura em Matemática:

1º os que investem em disciplinas de formação específica em Matemática, contemplando conteúdos discriminados nas Diretrizes Curriculares para Cursos de Matemática apenas para cursos de Bacharelado. São cursos que estudam de maneira bem aprofundada os conteúdos de Álgebra, Análise (incluem disciplinas intituladas por Equações Diferenciais, Variáveis Complexas, Cálculo Vetorial e Topologia) e Geometria – abordando Geometria das Transformações e as não euclidianas. As disciplinas pedagógicas nesses cursos são poucas, bem como as respectivas cargas horárias; 2º os que investem em uma formação básica de Matemática, procurando atender as Diretrizes Curriculares para Cursos de Matemática, e uma formação pedagógica, atribuída para a área da Educação, mas, alocando um espaço pequeno para disciplinas da área da Educação Matemática; 3º os que oferecem disciplinas de formação específica em Matemática, de forma a atender as Diretrizes Curriculares para Cursos de Matemática, e disciplinas atribuídas à área de Educação Matemática, como Didática da Matemática, Filosofia da Matemática, História da Matemática e Tópicos de Educação Matemática, e algumas disciplinas para a área de Educação (GATTI; NUNES, 2009, p. 109).

De acordo com o exposto, pode-se observar a priorização dos conteúdos específicos da área e a subordinação de conteúdos pedagógicos. Isso evidencia a pouca importância dada à prática profissional. Além disso, existem poucas disciplinas que contemplam as bases pedagógicas, os conteúdos históricos da Matemática e suas aplicações.

Segundo García Blanco (2003), o currículo dos cursos de formação de professores de Matemática deve abranger:

- o conhecimento de e sobre a Matemática, considerando também as variáveis curriculares;
- o conhecimento de e sobre o processo de geração das noções matemáticas;
- o conhecimento sobre as interações em sala de aula, tanto entre professor-aluno como entre aluno-aluno em sua dupla dimensão: arquitetura relacional (rotinas instrucionais) e negociação de significados (contrato didático);
- o conhecimento sobre o processo instrutivo – formas de trabalhar em classe, o papel do professor – que exige, também, o conhecimento sobre as representações instrucionais e o conhecimento sobre as características da relação tarefa-atividade (GARCÍA BLANCO, 2003, p. 71-72).

Nesse aspecto, Fiorentini e Nacarato (2004) afirma:

[...] eu considero a didática como uma parte da pedagogia. Enquanto a didática tem relação mais direta com o conteúdo que se ensina e aprende... A pedagogia vai além dos conteúdos, pois preocupa-se também com as dimensões sócio-afetiva, emocional, pessoal e ética, tendo como norte a formação de valores e de um sujeito emancipado sócio-politicamente (FIORENTINI; NACARATO, 2004, p. 2).

Ponte (2002) destaca ainda que “[...] um curso de formação inicial de professores de Matemática deve ser necessariamente diferente de um curso de Matemática que visa formar matemáticos para se dedicarem prioritariamente à investigação”. E, segundo García Blanco (2003), a formação inicial de professores deveria responder às demandas oriundas dos setores envolvidos e formar profissionais capazes de desenvolver “[...] suas tarefas no âmbito de sua própria e contínua aprendizagem e desenvolvimento profissional” (FÜRKOTTER; MORELATTI, 2007, p. 320).

Nessa perspectiva, os cursos de licenciaturas precisam se adequar para promover a articulação entre aquilo que é ensinado durante o processo formativo e a realidade prática tão relevante à atuação profissional. É imprescindível que o futuro docente se aproprie dos conteúdos específicos de sua área, bem como dos processos pedagógicos que irão auxiliá-los na tomada de decisões, tendo a oportunidade de experienciar as metodologias de ensino aplicadas. Mizukami *et al.* (2002, p. 12), afirma que

[...] aprender a ser professor, neste contexto, não é, portanto, tarefa que se conclua após estudos de um aparato de conteúdos e técnicas de transmissão deles. É uma aprendizagem que deve se dar por meio de situações práticas que sejam efetivamente problemáticas e que exijam o desenvolvimento de práticas reflexivas competentes. Exijam ainda, que além dos conhecimentos, sejam trabalhadas atitudes, as quais são consideradas tão importantes quanto os conhecimentos.

A necessidade de trabalhar a formação docente no sentido integral possibilita aos futuros profissionais a inserção da capacidade de contextualização dos conhecimentos matemáticos a fim de explorar as diferentes formas de vivenciar a Matemática, trazendo um aspecto mais significativo, ao mesmo tempo crítico, no ensino-aprendizagem, levando em consideração aspectos que vão além da

disciplina, como, por exemplo, trabalhar questões de valores, atitudes, competências socioemocionais no desenvolvimento da autonomia, tão relevante à prática cidadã.

Proporcionar uma formação que ofereça condições de apropriação de elementos que constituirão o saber docente é necessário para que, além de dominar o conhecimento matemático, por meio da construção desse conhecimento específico, o professor consiga transformá-lo em conhecimento matemático escolar. Portanto, as “[...] pesquisas vêm evidenciando a necessidade de que, em programas de formação, os conteúdos matemáticos sejam visitados e revisitados, mas é necessário pensar sob que olhar isso deveria acontecer” (NACARATO; PAIVA, 2008 *apud* ALBUQUERQUE; GONTIJO, 2013, p. 79).

Diante do exposto, nos cabe questionar a formação inicial de professores. Esta formação está focada em apenas integrar esse professor no sistema educativo existente ou ela tem por propósito formar professores que possam contribuir ativamente para a mudança desse sistema?

Trata-se de um dilema difícil de resolver. Segundo Ponte (2002), se a formação não preparar o jovem professor para se inserir nas escolas que existem, com os seus alunos e as suas culturas profissionais, corre-se o sério risco de formar professores completamente deslocados e inaptos para desempenhar o seu papel. Muitos deles podem mesmo abandonar o ensino. Se a formação não prepara os novos docentes para a mudança educativa e social, assume-se como mais uma força conservadora e, no fundo, complacente com os problemas existentes.

Entretanto, mais importante que identificar os saberes necessários aos professores é desvelar como eles se constroem e se desenvolvem durante todo o processo de formação, visto sobretudo, a necessidade de se consolidar a formação num viés crítico e reflexivo considerando os princípios pedagógicos estabelecidos nas normas curriculares nacionais.

Dessa maneira, faz-se necessário repensar a formação docente no Brasil, visto que a educação tem exigido professores não somente preparados para ministrar aulas e com a concepção de que para ensinar basta apenas dar aula sobre determinada disciplina, e sim, professores como mediadores no processo de aprendizagem, incentivando e motivando o aprendiz para que este possa se sentir responsável pela sua própria formação.

### **2.2.3 Formação Continuada do Professor de matemática**

São inúmeros os desafios impostos aos professores para que atendam às exigências dos tempos atuais. São exigências que reforçam a necessidade de aulas mais dinâmicas, atrativas, contextualizadas e que disponham da utilização das novas tecnologias digitais. Mas será que os docentes estão sendo formados para atender a tais exigências?

As discussões que permeiam o setor educacional colocam a formação docente como centros de pesquisas, atentando para a grande necessidade de uma prática educacional que colabore com as reais necessidades da sociedade contemporânea.

Vale ressaltar que a formação do professor não finaliza com o término da graduação, nem tampouco em cursos de especialização, o processo de formação docente deve ser permanente, ou seja, deve acontecer durante toda a vida profissional, como meio de contribuir para qualidade da Educação. Assim, surge a necessidade de se investir na formação continuada do professor. Compreende-se como formação continuada a educação continuada, o aperfeiçoamento de professores, a formação contínua, a formação permanente, a formação em exercício ou em serviço.

Nesse sentido, a fim de reforçar a obrigatoriedade de uma formação permanente, a formação continuada está prevista na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN ou LDB), Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996, no artigo 67 e inciso II:

Os sistemas de ensino promoverão a valorização dos profissionais da educação, assegurando-lhes, inclusive nos termos dos estatutos e dos planos de carreira do magistério público: Inciso II aperfeiçoamento profissional continuado, inclusive com licenciamento periódico remunerado para esse fim; [...] (BRASIL, 1996).

Além da LDB, temos o PNE (2014-2024) que estabelece diretrizes, estratégias e metas para as políticas públicas educacionais, contemplando todos os níveis de formação.

O terceiro bloco do documento trata da valorização dos profissionais da Educação. Dentre as metas estabelecidas, destacamos a meta 16:

Formar, em nível de pós-graduação, 50% (cinquenta por cento) dos professores da educação básica, até o último ano de vigência deste PNE, e garantir a todos (as) os (as) profissionais da educação básica formação continuada em sua área de atuação, considerando as necessidades, demandas e contextualizações dos sistemas de ensino. (BRASIL, 2014, p. 275).

Mas será que isso vem acontecendo efetivamente na Educação Brasileira? Ou a realidade prática que vem se consolidando se mostra diferente do exposto? Segundo Estrela (2006) o que se verifica na prática são propostas de formação docente desconectadas, descontinuadas e elaboradas por um pequeno grupo de pessoas, que por sua vez não valorizam a profissionalização dos professores e ignoram os seus saberes de experiência.

As reformas jurídicas decorrentes dos modelos teóricos de formação de professores e de modelos teóricos das organizações não partiram de uma caracterização objectiva da situação e não tiveram em consideração as culturas profissionais dos professores nem as culturas organizacionais das escolas (ESTRELA, 2006, p. 54).

Dentro desse aspecto, é notória a necessidade da construção de uma formação na qual os professores sejam centros do processo, que possam participar do planejamento, que tenham a oportunidade de se manifestar, discutir, expressar suas ideias, dialogar e opinar, contribuindo assim, para que os desenvolvimentos dessas práticas possam ter sentido e dar certo.

Faz-se necessário rever como ocorre a formação continuada dos professores e coloca-los no lugar de agentes da própria formação, não por obrigação, mas por desejo, vontade e até quem sabe, por necessidade, uma vez que ninguém nasce professor, faz-se professor. Aprende-se a ser professor. E o processo de aprender está intimamente ligado ao desejo (SILVA, 2011, p. 3).

A prática docente deve colaborar como foco de reflexão permeando ações que possibilitam ao professor compreender os problemas de seu cotidiano e se posicionar sobre eles. É imprescindível que a formação do professor se torne “[...] elemento de estímulo e de luta pelas melhorias sociais e trabalhistas e como promotora do estabelecimento de novos modelos relacionais na prática da formação e das relações de trabalho” (IMBERNÓN, 2005, p. 45-46).

Segundo Nóvoa (1995):

A formação não se constrói por acumulação (de cursos, de conhecimentos ou de técnicas), mas sim através de um trabalho de reflexividade crítica sobre as práticas e de (re) construção permanente de uma identidade pessoal. Por isso é tão importante *investir a pessoa* e dar um estatuto ao *saber da experiência* (NÓVOA, 1995, p. 25, grifos do autor).

É importante ressaltar que o professor é responsável pelo desenvolvimento de sua autonomia. Dessa forma, deve-se criar espaços favoráveis para que ele consiga exercer essa autonomia, de maneira a engajar participação efetiva que leve em consideração a experiência profissional, a cultura e os saberes adquiridos. Nesse aspecto, Libâneo (2004) escreve que:

[...] não há reforma educacional, não há proposta pedagógica sem professores, já que são os profissionais mais diretamente envolvidos com os processos e resultados da aprendizagem escolar (LIBÂNEO, 2004, p. 7).

Candau (1997 *apud* RIBEIRO, 2005, p. 8) “[...] considera que a formação continuada de professores deve se estruturar em torno de três eixos: a escola como locus privilegiado de formação, a valorização do saber docente e o ciclo de vida dos professores”. Tais eixos devem estar interligados, para que possam favorecer o desenvolvimento de uma formação permanente, capaz de atender às reais necessidades de melhoria na atuação dos professores dentro e fora do espaço escolar.

Assim, é fundamental pensar o trabalho docente como um lugar no qual o professor possa refletir sobre suas ações pelas vivências de suas práticas cotidianas, de maneira a ter disponibilidade de tempo e espaço para a construção dessa reflexão de forma individual e coletiva.

[...] a noção de professor reflexivo baseia-se na consciência da capacidade de pensamento e reflexão que caracteriza o ser humano como criativo e não como mero reproduzidor de ideias e práticas que lhe são exteriores. É central, nessa conceptualização, a noção do profissional como uma pessoa que, nas situações profissionais, tantas vezes incertas e imprevistas, atua de forma inteligente e flexível, situada e reativa (ALARCÃO, 2011, p. 44).



É nesse sentido que entendemos a formação do professor reflexivo que apresenta suas potencialidades, indagando constantemente sua prática, numa busca incessante por conhecimento. De acordo com Freire (1999, p. 43) “[...] na formação permanente dos professores, o momento fundamental é o da reflexão crítica sobre a prática”.

Nessa perspectiva, Nóvoa acrescenta que

[...] a formação pode estimular o desenvolvimento profissional dos professores, no quadro de uma autonomia contextualizada da profissão docente. Importa valorizar paradigmas de formação que promovam a preparação de professores reflexivos, que assumam a responsabilidade do seu próprio desenvolvimento profissional e que participem como protagonistas na implementação das políticas educativas (NÓVOA, 1995, p. 27).

No contexto da formação contínua, é de extrema importância destacar a necessidade de inclusão das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) no processo de capacitação, visto que tais ferramentas passam a fazer parte das novas exigências educacionais.

Dessa forma, um dos desafios da formação, vem sendo capacitar o professor em serviço para conseguir lidar com as novas tecnologias digitais num processo de articulação entre a apropriação e a produção do conhecimento.

Favoráveis ou não, é chegado o momento em que nós, profissionais da educação, que temos o conhecimento e a informação como nossas matérias-primas, enfrentarmos os desafios oriundos das novas tecnologias. Esses enfrentamentos não significam a adesão incondicional ou a oposição radical ao ambiente eletrônico, mas, ao contrário, significam criticamente conhecê-los para saber de suas vantagens e desvantagens, de seus riscos e possibilidades, para transformá-los em ferramentas e parceiros em alguns momentos e dispensá-los em outros instantes (KENSKI, 1998, p. 61).

A formação continuada de professores nessa perspectiva, deve assegurar para que o mesmo no desenvolvimento de suas atividades, reflita acerca do uso das tecnologias digitais, numa perspectiva de construção e reconstrução de conhecimentos, a fim de tornar seu trabalho mais abrangente e democrático.

A articulação entre tecnologia e educação requer a compreensão por parte dos profissionais de que os recursos tecnológicos não se constituem como um fim em si mesmos, ou seja, não podemos nos restringir somente à sua utilização. Há a

necessidade de articulação entre a sua utilização e o pedagógico como meio para se alcançar o objeto de estudo em questão, sendo esse, o conhecimento.

Convêm que os professores estejam interessados e cientes das possibilidades nas quais podem se servir das tecnologias digitais, aliando-as como ferramenta útil no ensino e aprendizagem. Segundo Kenski (2003, p. 77)

[...] é necessário, *sobretudo*, que os professores se sintam confortáveis para utilizar esses novos auxiliares didáticos. Estar confortável significa conhecê-los, dominar os principais procedimentos técnicos para sua utilização, avaliá-los criticamente e criar possibilidades pedagógicas, partindo da integração desses meios com o processo de ensino.

Nessa perspectiva, Mercado (1999) afirma:

As novas tecnologias criam novas chances de reformular as relações entre alunos e professores e de rever a relação da escola com o meio social, a diversificar os espaços de construção do conhecimento, ao revolucionar os processos e metodologias de aprendizagem, permitindo à escola um novo diálogo com os indivíduos e com o mundo (MERCADO, 1999, p. 27).

As tecnologias digitais possuem um papel relevante no campo educacional se atrelada à atuação do professor. Para isso, há a necessidade do desenvolvimento de estratégias de formação docente que articulem a apropriação do conhecimento e o direcionamento pedagógico, além de políticas públicas que garantam autonomia e segurança aos profissionais para que consigam, além de utilizar as novas tecnologias digitais, propagar o conhecimento, de maneira a desenvolver os saberes: cognitivo, intelectual e cultural dos estudantes.

Nessa perspectiva, acreditamos que o uso das tecnologias digitais voltadas para o Ensino de Matemática também consiga proporcionar melhoras na aprendizagem dos conceitos matemáticos, de maneira a romper com a cultura escolar das aulas convencionais compostas por explicação e resolução de exercícios.

Pensar a formação contínua do professor de Matemática requer buscar indagações que contribuam para melhorar sua prática pedagógica. Dessa forma, Fiorentini e Lorenzato (2006) pontuam a diferença entre o olhar do matemático e do educador matemático. Segundo ele:

O *matemático*, por exemplo, tende a conceber a matemática como um fim em si mesma, e, quando requerido a atuar na formação de professores de matemática, tende a promover uma educação *para* a matemática priorizando os conteúdos formais dela e uma prática voltada à formação 'de novos pesquisadores em matemática'. O *educador matemático*, em contrapartida, tende a conceber a matemática como um instrumento importante à formação intelectual e social de crianças, jovens e adultos e também do professor de matemática do ensino fundamental e médio e, por isso, tenta promover uma educação *pela* matemática (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 3).

Nesse aspecto, ressaltamos que, para haver a promoção de uma educação Matemática pela Matemática há de se ressignificar o ensino da disciplina, ou seja, convém refletir sobre a sua importância no cotidiano de vida das pessoas, priorizando sua inserção na vida do estudante como um conhecimento prazeroso e totalmente útil na resolução de problemas, ressaltando sua eficácia e aplicabilidade.

Segundo Monteiro e Pompeu Junior (2001, p. 38), “[...] o ensino da Matemática deve basear-se em propostas que valorizem o contexto sócio-cultural do educando, partindo de sua realidade, de indagações sobre ela” tratando-a “[...] como o procedimento que deverá considerar a Matemática como uma das formas de leitura do mundo”.

Dessa forma, para que os estudantes tenham êxito na compreensão e aprendizagem dos conceitos matemáticos, faz-se necessário um processo de formação contínua que proporcione o pleno domínio dos conteúdos matemáticos e dos conhecimentos pedagógicos, através da escola como locus de formação, valorizando os diversos saberes advindos da experiência profissional entre os pares, realizando a articulação entre eles. Garcia (1999) explicita que

[...] os professores em formação ou em exercício se implicam individualmente ou em equipe, em experiências de aprendizagem, através das quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos, competências e disposições, e que permite intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com o objetivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem (GARCIA, 1999, p. 26).

Para Fiorentini e Nacarato (2005, p. 38), “[...] a participação em projetos de formação continuada e a melhoria das condições profissionais e institucionais

podem contribuir para a produção e (re) elaboração dos saberes necessários à mudança curricular”.

Daí a importância da presença de um currículo de Matemática que oportunize a participação efetiva dos profissionais que atuam na linha de frente da Educação, trazendo o diálogo e a reflexão para atuação compatível com as expectativas de uma aprendizagem verdadeiramente significativa aos estudantes.

Os professores não se limitam a transmitir o currículo. Desenvolvem-no, definem-no e interpretam-no. Aquilo que pensam, acreditam e fazem ao nível da sala de aula é que dá forma, em última análise, ao tipo de aprendizagem oferecido aos mais novos (HARGREAVES, 1998, p. IX).

Destacar a função do professor como aquele que dá vida ao currículo em sala nos remete à necessidade da reflexão da prática pela prática, depois novamente, da prática pela transformação. Para Fiorentini e Castro (2003, p. 127), sem reflexão “[...] o professor mecaniza sua prática, cai na rotina, passando a trabalhar de forma repetitiva, reproduzindo o que está pronto e o que é mais acessível, fácil ou simples”.

Assim, os conceitos de reflexão sobre a ação se opõem à racionalidade técnica que predomina no ensino, e tentam de algum modo superar a desvinculação existente entre a teoria e a prática.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), a

Educação Matemática caracteriza-se como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a Matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar. Entretanto, sendo a prática educativa determinada pela prática social mais ampla, ela atende a determinadas finalidades humanas e a aspirações sociais concretas (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 5).

Nesse sentido, Giroux (1997) acrescenta que:

A linguagem da educação não é simplesmente teórica ou prática; é também contextual e deve ser compreendida em sua gênese e desenvolvimento como parte de uma rede mais ampla de tradições históricas e contemporâneas, de forma que possamos nos tornar autoconscientes dos princípios e práticas sociais que lhe dão significado (GIROUX, 1997, p. VIX).

Nesse aspecto, defendemos a formação continuada do professor de Matemática num viés crítico, no contexto da racionalidade prática, onde o professor se apresenta como sujeito reflexivo, capaz de tomar decisões, expor suas ideias e ter autonomia para desenvolver o ensino de uma Matemática coerente com as suas indagações. Nesse sentido, Fiorentini (1995, p. 4), aponta que:

Por trás de cada modo de ensinar, esconde-se uma particular concepção de aprendizagem, de ensino, de Matemática e de Educação. O modo de ensinar sofre influência também dos valores e finalidades que o professor atribui ao ensino de Matemática, da forma como concebe a relação professor-aluno e, além disso, da visão que tem de mundo, de sociedade e de homem.

Por isso a importância em dar subsídios ao desenvolvimento da criticidade na formação profissional, pois em sala é o professor quem planeja suas aulas e as direciona de maneira intencional, sendo indispensável que sua intencionalidade partisse de um viés crítico. Assim, Pinheiro (2005) descreve algumas propostas da Educação Matemática Crítica:

[...] preparar os alunos para a cidadania; estabelecer a matemática como um instrumento para analisar características críticas de relevância social; considerar os interesses dos alunos; considerar conflitos culturais nos quais a escolaridade se dá; refletir sobre a matemática, a qual pode ser instrumento problemático; estimular a comunicação em sala de aula, uma vez que as interrelações oferecem uma base à vida democrática (PINHEIRO, 2005, p. 63).

Freire, numa visão crítica sobre a metodologia utilizada frequentemente em sala de aula, define como educação bancária a que é realizada pelo professor sem consulta às necessidades e interesses dos estudantes. Por isso a importância de se tentar romper com a ideia de um ensino totalmente instrucionista, no qual o professor se apresenta como o único detentor do saber, e apostar em metodologias de ensino que diferem e tragam o protagonismo estudantil como eixo fundamental ao desenvolvimento da aprendizagem de conceitos matemáticos.

Pensando nisso propomos nessa pesquisa a integração da PBL à formação do professor de Matemática, acreditando que tal metodologia contribua para a promoção e o aperfeiçoamento da criticidade na Matemática, através da exploração de situações-problemas que utilizem os contextos sociais, oportunizando a estudantes e professores o diálogo constante para que haja a compreensão, o

fortalecimento entre os pares, a intervenção e a transformação da realidade que os cercam.

### 2.3 NÚMEROS REAIS

A apresentação dos números Reais no Ensino Fundamental é primordial para a compreensão e o desenvolvimento da abstração na disciplina de Matemática. Dessa forma, fundamentar o conceito dos Números Reais é imprescindível mediante as dificuldades apresentadas ao explorar sua definição, suas propriedades e operações.

É comum em sua prática pedagógica, o professor esbarrar, deparar-se com alguns equívocos dos discentes ao afirmarem, por exemplo, que  $-8$  é maior que  $-5$ , ou que  $1,80$  é maior que  $1,8$ . Surgem também indagações do tipo: quem é o sucessor do número  $1,5$ ? Ou qual é o antecessor de  $2,9$ ? Ou então, como localizar  $\frac{2}{5}$  na reta numérica? Enfim, muitos são os questionamentos e os erros que representam a necessidade por parte do professor em dar significado ao conjunto dos Números Reais, buscando estratégias que sejam capazes de superar as defasagens existentes em torno de tal conceito.

De acordo com o Currículo Paulista, as habilidades referentes aos Números Reais contempladas no 8º ano do Ensino Fundamental são:

- Compreender a necessidade das sucessivas ampliações dos conjuntos numéricos, culminando com os números irracionais;
- Saber representar os números reais na reta numerada;
- Incorporar a ideia básica de que os números irracionais somente podem ser utilizados em contextos práticos por meio de suas aproximações racionais, sabendo calcular a aproximação racional de um número irracional (SÃO PAULO, 2020, p. 63).

Nessa perspectiva, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta como expectativa aos estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental que:

[...] resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais (MEC, 2018, p. 267).

Dessa forma, é evidente a relevância de se refletir sobre a abordagem dos Números Reais e, sobretudo, construir uma proposta de ensino que proporcione uma aprendizagem significativa na construção desse número por parte dos estudantes.

Em relação a isso, Ramos (2014), destaca que:

Na educação básica, o estudo dos números, suas operações e propriedades é desenvolvido em todas as séries. No entanto, uma análise dos livros didáticos desse nível de ensino, revela um déficit com relação à apresentação dos números reais, que são expostos de forma superficial e sem uma teoria convincente. Além disso, falta uma maior exploração dos números irracionais, principalmente na sua identificação e representação decimal (RAMOS, 2014, p. 1).

Ainda nesse viés, Souza (2013) contribui acrescentando que:

Especificamente no ensino básico pode-se constatar, pela leitura de [18], que o conteúdo dos números reais, na maioria das vezes é equivocadamente, apresentado simplesmente como a união dos racionais com os irracionais criando assim um problema de circularidade nesse conceito. Observa-se a necessidade do conhecimento prévio dos reais para se definir os números irracionais (SOUZA, 2013, p. 14).

Diante disso, os estudantes acabam por construir esse campo numérico de maneira equivocada e a maneira como essas ideias são perpassadas esclarecem tais defasagens constatadas em situações do cotidiano. Em geral, muitos estudantes apresentam dificuldades em localizar um número irracional na reta numérica. Dificuldade em compreender sua incomensurabilidade. E até mesmo em compreendê-lo como um conjunto numérico.

Em geral, os alunos desse ciclo têm dificuldade em perceber os números irracionais como conjuntos, bem como a sua incomensurabilidade. Outra dificuldade que encontram é a localização na reta numérica, a percepção que a reta numérica não pode ser toda preenchida pelos números racionais causa certa estranheza a estes estudantes (RAMOS, 2014, p. 1).

Nessa perspectiva, Duarte (2013), salienta que:

O conteúdo 'conjuntos numéricos' normalmente é apresentado de maneira fragmentada em sem justificativas. Praticamente todos os livros utilizados nas escolas brasileiras ao tratar dos números, fazem simplesmente classificá-los em um determinado tipo: se o número tem tal característica chamamos de natural, se tem outra característica é racional e assim por diante (DUARTE, 2013, p. 1).

Sendo assim, temos nessa pesquisa a intenção de fornecer subsídios, tanto aos professores do Ensino de Fundamental e Médio, quanto aos futuros docentes de Matemática que desejam explorar os Números Reais. O nosso intuito em desenvolver o tema de forma mais esclarecedora e aprofundada se dá pelo desejo de tentar suprir necessidades que são encontradas na compreensão das propriedades, das operações e na definição acerca do conceito.

Para tanto, traremos a seguir uma revisão bibliográfica sobre o ensino e aprendizagem dos Números Reais, visando esclarecer algumas das defasagens de estudantes do Ensino Fundamental e Médio, apontando suas principais dificuldades, além de explorar pesquisas valiosas voltadas para a compreensão desse conjunto numérico. Esta etapa da investigação destina-se a delimitar o objeto de estudo, além de ser fundamental para a elaboração dos problemas direcionados à formação de professores de Matemática.

### **2.3.1 Revisão Bibliográfica**

A pesquisa em Educação Matemática busca desenvolver estudos e aprimorar conceitos voltados ao ensino e à aprendizagem em torno dessa disciplina. Configura-se como importante foco para o desenvolvimento dessa pesquisa, o conjunto dos Números Reais, cujo objetivo principal se volta para a compreensão e o aprimoramento de conhecimentos acerca dos Números Reais por parte dos professores e futuros professores de Matemática.

Nessa perspectiva, realizamos um levantamento de dissertações e artigos nos periódicos do programa de pós-graduação de duas instituições de Ensino Superior, a saber: USP-SP e PUC-SP. Tais estudos apontam dificuldades de aprendizagem acerca dos conteúdos matemáticos devido à falta de conhecimento referentes aos números reais e suas propriedades.

Foram selecionados quatro trabalhos, nos quais a análise foi precedida da leitura integral dos textos, determinada pela área: Educação, Campo de



conhecimento: Matemática, tendo em conta a especificidade do recorte temático: Números Reais.

As principais contribuições dessas pesquisas recaem sobre a sistematização das dificuldades de estudantes e professores da Educação Básica acerca dos processos de ensino e de aprendizagem dos Números Reais, contribuindo sobretudo para a reflexão e a construção das situações-problema apresentadas na seção 3, delineadas a partir da exploração dos estudos.

Assim, destacamos a importância da aprendizagem acerca do conceito de números reais, uma vez que o seu aprendizado é pertinente aos estudantes, que necessitam construir com clareza a sua fundamentação. Destacamos também que os professores precisam ter domínio sobre o conteúdo para poder mediar de forma competente a sua construção pelos estudantes.

Segundo Silva e Penteado (2009), pesquisas nacionais e internacionais revelam que muitos estudantes apresentam dificuldades na aprendizagem de limites, derivadas e continuidade de funções devido à falta de compreensão das propriedades dos Números Reais:

Pesquisas como as de Robinet (1986), Fischbein, Jehiam e Cohen (1995); e Tirosh (1995) apontam dificuldades de alunos no estudo de conteúdos matemáticos devido à 'falta de conhecimento' a respeito de números reais e de suas propriedades como, por exemplo, a caracterização dos números racionais e dos irracionais, e a noção de densidade dos reais (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 352).

Dessa forma, pretendeu-se fazer o levantamento de artigos e dissertações que apontassem dificuldades de estudantes e professores a respeito das propriedades e características dos Números Reais. Tais defasagens são apontadas em situações do cotidiano, em cálculos corriqueiros, onde se apresentam dúvidas e equívocos comumente repetidos e perpetuados. Compõem como foco de análise também os estudos que pontuam a importância e a presença dos Números Reais nos conteúdos de Matemática.

Queremos avaliar, em que medida, certas dificuldades influenciam na caracterização desse conjunto numérico. Cabe então perguntar: constituem obstáculos de aprendizagem aos professores e futuros professores de matemática a conceituação dos irracionais, a existência de grandezas incomensuráveis e o fato de o conjunto dos Racionais ser denso no conjunto dos Reais?

Para responder tal questionamento, temos como objetivo maior nesta seção, auxiliar esses professores, fundamentando a discussão teórica acerca das dificuldades apresentadas pelos estudantes referentes ao Conjunto dos Números Reais, a fim prepará-los para enfrentar os desafios pertinentes à sua prática profissional.

O primeiro estudo analisado foi realizado por Costa (2009), com o título “Números Reais no Ensino Fundamental: alguns obstáculos epistemológicos”, cujo objetivo principal era identificar alguns obstáculos epistemológicos relacionados à concepção dos Conjuntos Numéricos no ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental. A autora justifica sua pesquisa na tentativa de contornar as dificuldades que os estudantes apresentam na disciplina de Matemática detectadas em resultados de avaliações externas como Prova Brasil e Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) que trazem indícios de uma aprendizagem deficiente em Matemática.

Assim, na tentativa de compreender como ocorre a aprendizagem de forma adequada na construção do conhecimento, Costa (2009) recorre a estudos realizados a respeito da Epistemologia do Conhecimento tendo como referenciais os autores Bachelard e Brousseau.

A epistemologia de Gaston Bachelard afirma que a construção do conhecimento se dá com um movimento de ruptura frente ao conhecimento previamente estabelecido, com uma resistência à racionalização desse conhecimento denominados obstáculo epistemológico (COSTA, 2009, p. 5).

Já Brousseau traz a ideia de obstáculo epistemológico em Matemática como um obstáculo pertinente à resistência de um saber mal adaptado e o vê como um meio de interpretar determinados erros recorrentes e não aleatórios cometidos pelos estudantes quando lhes são ensinados alguns conceitos matemáticos.

A questão dessa pesquisa em análise foi delineada em torno do currículo de Matemática do Ensino Fundamental organizado em eixos. São eles: Números e operações (no Campo da Aritmética e da Álgebra), espaço e forma (no campo da Geometria), Grandezas e Medidas (que permite ligações entre os Campos da Aritmética, Álgebra e Geometria) e Tratamento da Informação.

Dessa forma, a pesquisa se concentrou em questionários para serem aplicados em todas as séries do ensino fundamental com o objetivo de verificar a

concepção que os alunos possuem dos números Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais.

Dentre as dificuldades apresentadas pelos estudantes, podemos destacar:

- ✓ Dificuldades sobre o princípio do valor posicional e da decomposição de números naturais nas suas diversas ordens;
- ✓ Falta de compreensão ao escrever números cuja posição apresenta ausência de alguma ordem;
- ✓ Dificuldades em conceitos básicos relativos às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão como: utilização do procedimento de reserva ou empréstimo;
- ✓ Não reconhecimento do número zero em algum dos fatores trazendo contrariedades nas operações;
- ✓ Ausência na compreensão das propriedades com Números Inteiros não identificando a possibilidade de subtrair um número maior de um número menor;
- ✓ Não respeito à ordem de resolução das operações em expressões numéricas;
- ✓ Dificuldades em localizar Números Racionais na reta real;
- ✓ Não reconhecimento das diferentes representações na escrita de um número racional;
- ✓ Dificuldades em calcular a parte de um todo discreto;
- ✓ Não validação das frações impróprias;
- ✓ Dificuldades nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão no Conjunto dos Números Racionais;
- ✓ Não reconhecimento do Conjunto dos Números Irracionais.

Nessa perspectiva, Costa (2009) traz os possíveis obstáculos epistemológicos de acordo com o conceito apresentado nos questionários. De maneira geral, pode-se observar que as propriedades dos Números Inteiros são generalizadas ao Conjunto dos Racionais, Irracionais e conseqüentemente aos Números Reais, ofertando aos estudantes conflitos na aprendizagem. Dentre os obstáculos levantados, podemos destacar:

- ✓ A ideia de que o zero não possui valor pode interferir na sua interpretação como algarismo utilizado para indicar ausência de alguma ordem do número;
- ✓ O antecessor e sucessor de um número natural interfere na compreensão de antecessor e sucessor no Conjunto dos Inteiros;
- ✓ A existência de sucessores e antecessores no Conjunto dos Números Inteiros interfere na compreensão dessa mesma existência no Conjunto dos números racionais;
- ✓ O padrão da escrita de um número inteiro interfere na compreensão e na identificação dos números irracionais.

Dessa forma, a autora realiza uma análise dos resultados obtidos nos questionários a partir dos descritores do Saeb e da Prova Brasil de Matemática do 5º ao 9º ano do ensino fundamental, identificando assim, que os estudantes de maneira geral, encontram-se no nível abaixo do básico.

Para a conclusão, é apresentada nova interpretação aos dados obtidos a partir de uma tese de doutorado de Rezende (2003) que traz algumas dificuldades iniciais de cálculo apresentadas por alunos ao ingressar no Ensino Superior, constatando que muitas dessas dificuldades relacionadas às operações de limites estão associadas às dificuldades em manipulações algébricas e não necessariamente em interpretação analítica.

Assim, a conclusão fica em torno do seguinte questionamento: “Será que o ensino de Matemática tem omitido ou evitado algumas noções básicas a respeito dos números e, com isso, cooperado para o aumento e não a superação das dificuldades dos nossos estudantes?” (REZENDE, 2003 *apud* COSTA, 2009, p. 154).

Diante de tal questão é possível perceber a necessidade de se trabalhar o contexto dos Números Reais de maneira a permear a necessária clareza de Número Real, sendo fundamental para o ensino da Matemática estabelecer conexões entre as propriedades desse Conjunto Numérico e a contextualização de tal conceito, bem como explorar também a caracterização de Densidade.

A pesquisa “Conhecimentos e dificuldades dos estudantes do ensino médio relacionadas ao conjunto dos números reais” de Bartolomeu (2010) tem por objetivo verificar os conhecimentos e dificuldades dos estudantes do Ensino Médio

relacionados ao conjunto dos Números Reais através de uma avaliação diagnóstica com 54 alunos da Rede Pública Estadual.

Para direcionar a pesquisa foram apresentadas as questões:

Quais são os conhecimentos e as dificuldades dos estudantes do Ensino Médio em relação aos números reais? (BARTOLOMEU, 2010, p. 20).

Uma das seções é dedicada à análise de dissertações e artigos que abordam as dificuldades dos estudantes em relação aos números reais, a densidade dos racionais e irracionais nos reais. E assim traz trabalhos como de Silva e Iglori (1998), Penteadó (2004), Dias (2002) e Soares, Ferreira e Moreira (1999).

A pesquisa traz como referenciais teóricos Luckesi (2005) e Zabala (2006) que descrevem a integração entre o processo de ensino e a avaliação com um imprescindível valor didático, defendendo a ideia de que esta não deve apenas classificar a aprendizagem em bom ou mau desempenho, mas sim ampliar suas possibilidades para uma avaliação diagnóstica que considere o caráter dinâmico do processo na construção de significados para uma aprendizagem efetiva, colocando o professor e o estudante como figuras centrais e essenciais.

Assim, optou-se nesse estudo em análise pela avaliação diagnóstica acreditando ser possível sua eficácia na compreensão e investigação das defasagens das mais diversas práticas educativas:

Realizá-la é subsidiar o alcance dos resultados almejados por meio de uma atribuição qualitativa quanto ao desempenho apresentado nas avaliações e através deste arquitetar medidas de intervenção e redirecionamento de ações envolvidas ao processo de aquisição de conhecimento (BARTOLOMEU, 2010, p. 38).

Lembrando que a avaliação diagnóstica foi composta por doze questões de múltipla escolha e três questões dissertativas abertas.

O objetivo do diagnóstico das questões de múltipla escolha foi avaliar os conhecimentos trazidos pelos estudantes acerca da definição dos números racionais e irracionais abordando suas diferentes representações, o conceito de imagem, a propriedade de densidade dos conjuntos numéricos, a localização de pontos no plano cartesiano, a localização de um número irracional num intervalo real, leitura e interpretação dos gráficos de funções afim e quadrática, propriedades dos radicais,

conceito de imagem da diagonal do cubo, a realização do cálculo exato de números irracionais através do Teorema de Pitágoras, localização de um número na reta através da soma de segmentos, conceito de comensurabilidade de um segmento, correspondência de um número racional com medida e comparação de números reais em suas diferentes representações.

As questões abertas pedem aos estudantes para descreverem o que são Números Racionais, Irracionais e Reais, trazendo assim como objetivo do diagnóstico que o aluno revele o conceito de definição dos conhecimentos trazidos acerca dos conjuntos trabalhados.

Nas considerações finais, Bartolomeu (2010) descreve a importância da avaliação diagnóstica, seu caráter subsidiário que possibilita ações construtivas e restauradoras frente às habilidades ou defasagens identificadas em relação aos conteúdos apresentados.

Por meio da avaliação desenvolvida notou-se que os estudantes são capazes de reconhecer as diferentes representações de números irracionais, comparar os números reais, ler e interpretar gráficos de funções com um maior desempenho em funções crescentes.

As dificuldades apresentadas foram em relação ao reconhecimento das diferentes representações e significados de número racional, em relacionar os conjuntos numéricos, localização de um número irracional apresentado na forma de radical e associação da geometria com a aritmética.

Bartolomeu (2010) ressalta ainda que a avaliação diagnóstica, de maneira geral, foi capaz de evidenciar lacunas na aprendizagem acerca dos números reais, visto que eram compostas por questões de nível básico. E assim, chama a atenção ao levantar uma reflexão acerca dos resultados obtidos, de maneira a ressaltar a importância dos métodos de ensino na construção dos conhecimentos matemáticos abordados.

O artigo “Fundamentos dos números Reais: Concepção de professores - viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio” de Silva e Penteado (2009) tem por objetivos discutir os saberes mobilizados por professores do Ensino Médio ao desenvolverem atividades sobre os Números Reais e abordar a viabilidade de se introduzir o estudo da propriedade da densidade na Educação Básica.

Para isso, foram levantadas pesquisas como as de Robinet (1986), Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) e Tirosh (1995), que apontam dificuldades de alunos no

estudo de conteúdos matemáticos devido à “falta de conhecimento” a respeito dos Números Reais e de suas propriedades como, por exemplo, a falta de noção na distinção entre os Conjuntos dos Números Racionais e Irracionais ou a incompreensão a respeito do conceito de Densidade dentro dos Reais.

As duas primeiras pesquisas trouxeram a forte ideia de que têm os estudantes ao descrever um Número Irracional como sendo aquele que possui uma representação decimal infinita, mesmo sendo uma representação periódica. Já a terceira mostrou o fato de os alunos estenderem para conjuntos infinitos propriedades de conjuntos finitos, ao afirmarem, por exemplo, que existem mais Números Naturais que Números Ímpares. Foi apresentada nas três pesquisas dificuldade em distinguir a cardinalidade do Conjunto dos Números Naturais e a dos Reais.

Duas outras pesquisas brasileiras que foram inspiradas nas referidas publicações também fundamentaram o artigo. A pesquisa intitulada “Concepções dos alunos sobre Números Reais” de Iglioni e Silva (2001), que constatou a confusão dos estudantes entre os conceitos de Número Racional e Irracional quanto à representação decimal e quanto à existência de sucessor de Número Real, em que alguns estudantes descreveram Número Irracional como sendo infinito ou aquele que contém infinitos dígitos após a vírgula ou ainda, as raízes. Identificaram Número Racional como sendo exato ou inteiro. Foi constatado também que o símbolo de reticências causa instabilidade nas respostas, mesmo se houver um número finito de dígitos, associando-o a um número irracional. A irracionalidade foi considerada como sendo sinônimo de número negativo em algumas respostas. A grande maioria dos entrevistados não identificou a igualdade entre as representações 1,999... e 2.

E a segunda realizada por Soares, Ferreira e Moreira (1999) mostrou que os estudantes identificam um Número Irracional aquele que não é exato, ou que possui infinitas casas decimais, isto é, associam os irracionais a um contexto não familiar ou bem compreendido, ou ainda, associam número irracional à imprecisão e a não exatidão.

Diante do levantamento das pesquisas, Silva e Penteado (2009) identificaram as seguintes concepções:

- ✓ duas grandezas quaisquer são sempre comensuráveis;

- ✓ as propriedades atribuídas à reta real continuavam válidas mesmo sem os números irracionais;
- ✓ a não distinção entre a cardinalidade dos naturais e a dos reais;
- ✓ mais números naturais que ímpares;
- ✓ identificação entre as representações 3,1416 e  $\pi$ ;
- ✓ também entre 2,7182 e  $e$ ;
- ✓ a classificação de 3,1416 como um número irracional;
- ✓ a identificação entre uma representação fracionária com número racional, independentemente da natureza do numerador e do denominador;
- ✓ a não identificação das representações 1,999... e 2 como sendo de um mesmo número;
- ✓ a definição de números irracionais como sendo somente aqueles com representação com raízes;
- ✓ a confusão entre número e um valor aproximado deste atribuindo-lhes o mesmo significado; a transposição da noção de sucessor dos números naturais para os números reais;
- ✓ o desconhecimento da existência de infinitos números entre dois reais.

Tais concepções acarretam a ideia de que um Número Racional é exato ou inteiro e que Número Irracional é aquele que possui uma representação decimal infinita ou um número que não é exato, que não é inteiro ou que é negativo e o desconhecimento da completude do conjunto dos números reais.

Silva e Penteado (2009) fundamentam sua pesquisa descrevendo as noções sobre a densidade e a representação dos Números Reais trazendo um breve histórico sobre o tema. É proposto então, realizar intervenção através de uma sequência de ensino com professores do Ensino Médio.

O trabalho foi motivado pelos resultados de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem dos números reais ao verificar que tais resultados mostravam lacunas presentes nos saberes mobilizados por estudantes e professores.

Assim nos propusemos investigar quais os saberes mobilizados por professores do ensino médio, ao analisarem questões envolvendo a categorização dos números reais em racionais e irracionais, como ponto de partida para o desenvolvimento de atividades que visam discutir, tanto a densidade do conjunto dos racionais como dos irracionais no conjunto dos números reais. Buscamos colher dados



sobre sua opinião quanto à viabilidade de eles, ou adaptando os procedimentos sugeridos pelas atividades realizadas ou criando novos, iniciar com seus alunos, o estudo dessa propriedade (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 355).

Dessa forma, foi realizada uma intervenção por meio da elaboração e aplicação de uma sequência de ensino e a análise de resultados composta por dez atividades fundamentadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, utilizando os registros da língua natural, fracionário, decimal e gráfico com a coordenação entre eles.

Para tanto, foi seguido o método de Duval que enfatiza a necessidade de se trabalhar com no mínimo dois registros de representação diferentes e de se realizar a articulação entre eles, criando, com isso, mais possibilidades para que ocorra a aquisição do conhecimento.

A expectativa era a de que tais atividades trouxessem uma reflexão a respeito da propriedade da densidade da reta ao sugerir questões que podem fazer aflorar noções e particularidades dos números reais que, geralmente, não são enfatizadas no ensino básico.

As duas primeiras questões foram nomeadas como diagnósticas e analisadas. A partir dos dados obtidos, foram elaboradas outras oito atividades com a meta de discutir elementos referentes à introdução do estudo da densidade dos números reais.

A segunda, foi composta por catorze afirmações para serem classificadas em verdadeiras ou falsas, além de diagnóstica também foi provocativa.

Dentre as afirmações apresentadas constam, por exemplo: “Entre dois números irracionais existe exatamente um número irracional”; “Entre dois números irracionais existe um número racional”. “Entre um número irracional e um racional existe um único número irracional “.

A sequência didática foi fundamentada nos princípios da Engenharia Didática cuja validação é substancialmente interna e decorrente da análise *a priori* e *a posteriori* das tarefas.

O primeiro objetivo das atividades era a obtenção de números racionais entre dois números racionais distintos por meio da média aritmética. E o segundo objetivo, era a obtenção de números irracionais entre dois irracionais distintos, sugerindo a troca de ao menos um algarismo entre eles.

Durante todo o experimento, Silva e Penteado (2009) constataram que professores ainda associavam a irracionalidade do número com a infinitude de sua representação, o que mostra que essa associação está fortemente presente nas concepções dos envolvidos e que estas se manifestam na prática, mas às vezes, permanecem mesmo depois de terem sido discutidas.

De maneira geral, foi observado pelos pesquisadores grande empenho por parte dos participantes e um perceptível envolvimento ao incorporarem em suas respostas os resultados das discussões. Percebeu-se também posicionamentos de professores que indicavam sua aprovação na formatação do instrumento empírico apresentado e na viabilidade da introdução do estudo da densidade na Educação Básica.

Nas considerações finais, Silva e Penteado (2009) evidenciam o fato de que inúmeras pesquisas em Educação Matemática apontam diversas dificuldades apresentadas pelos alunos a respeito da aprendizagem dos números reais, porém essas dificuldades podem ser enfrentadas muito antes da educação superior desde que se identifiquem as propriedades que fundamentam esses números e que se proponham e desenvolvam intervenções junto a alunos e professores da Educação Básica, com procedimentos que envolvam elementos do pensamento matemático avançado.

O ensino e aprendizagem dos números reais, como mostram pesquisas nacionais e internacionais, apresentam dificuldades muitas das quais, de difícil superação. Uma delas, a associação entre número racional e sua representação decimal infinita, tem presença garantida nos resultados das investigações realizadas em diferentes países e diferentes níveis de ensino. No desenrolar deste trabalho, em diversas situações, ela se manifestou mesmo depois de ter sido analisada e discutida com o coletivo dos participantes. Isto reforça a ideia de que uma concepção, em geral, se manifesta na prática, mas essa manifestação está muito longe de ela ser modificada. Foi a exaustiva constatação de tantas e tão sérias dificuldades apresentadas por estudantes que iniciam o curso de licenciatura em matemática, que não diferem muito daquelas apresentadas por concluintes do curso, que nos levou à indagação se não seria viável introduzir o estudo de propriedades dos números reais na educação básica (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 368).

O último trabalho analisado foi a pesquisa intitulada: “Um estudo sobre o conceito de densidade do conjunto dos Números Racionais e dos Números Irracionais: uma abordagem com tecnologias” de Santos (2017) que tem, por

objetivo, analisar por meio de uma sequência didática, as concepções dos estudantes do curso de licenciatura em Matemática sobre as características e propriedades dos Números Racionais e dos Números Irracionais.

As questões de pesquisa apresentadas foram:

Quais concepções acerca do conceito de densidade, características e propriedades, relativos ao conjunto dos números racionais e irracionais, são evidenciadas por licenciandos em Matemática quando envolvidos em uma sequência didática que emprega tecnologias digitais e não digitais? (SANTOS, 2017, p. 17).

Na expectativa de responder à questão, Santos (2017) fundamentou sua pesquisa na Teoria das Situações Didáticas – TDS de Guy Brousseau (1986), além de elementos teóricos relativos ao uso de tecnologias em Educação Matemática.

Dessa forma, o autor propõe a construção do trabalho a partir da constituição das situações didáticas no qual é oferecido aos estudantes a resolução de problemas adequados em relação ao conteúdo pretendido.

A pesquisa envolveu como sujeitos, dezenove alunos do primeiro semestre de um curso de licenciatura em Matemática, sendo aplicada uma sequência didática composta por três atividades.

A primeira atividade propunha a mobilização de conhecimentos acerca dos Números Racionais e Irracionais referentes à trigonometria (seno e cosseno de um ângulo e sua representação no ciclo trigonométrico), identidades trigonométricas e o teorema das raízes de um polinômio. A proposta seria diferenciar os Números Racionais dos Números Irracionais.

Na primeira atividade foi proposto aos estudantes determinar o seno e o cosseno de alguns ângulos, dentre os ângulos foram escolhidos os valores de seno de  $10^\circ$  e seno de  $50^\circ$ , por exemplo, na expectativa de que a obtenção desses números irracionais fosse por meio das identidades trigonométricas.

A atividade 2 trouxe a proposta do uso do *software* GeoGebra, um modelo digital que permite a exploração do conteúdo de maneira interativa, capaz de proporcionar aos envolvidos a visualização dos resultados, bem como suas variações.

Assim, dinâmicas investigativas de temas matemáticos com o emprego de mídias digitais, da maneira como se procurou fazer aqui,

se valem da tríade experimentação – visualização – dinamismo, que, por sua vez, se constituem nos atos de experimentar com uso de interfaces e visualizar os efeitos produzidos, com o apoio típico do dinamismo existentes nesses meios (SANTOS, 2017, p. 64).

Em uma das questões da segunda atividade é solicitado ao estudante uma descrição do funcionamento da aplicação a fim de verificar a sua compreensão sobre os Números Racionais e Irracionais por meio do controle dos deslizantes no *software GeoGebra*.

Em outra questão, ainda referente à segunda atividade, foi solicitado a identificação dos números através da verificação dos ângulos em diferentes unidades de modo a indicar um ângulo cujo resultado numérico do seno ou cosseno reconheceria o número como racional ou irracional.

As questões da terceira atividade foram adaptadas a partir do uso feito na dissertação de Sirotic e Zazkis (2007). Tal atividade aborda o entendimento referente ao conceito de densidade do conjunto dos números racionais e dos números irracionais.

Na primeira tarefa, os estudantes deveriam responder à questionamentos do tipo: “é sempre possível encontrar um número racional entre quaisquer dois números irracionais”. Determine “verdadeiro” ou “falso” e explique seu raciocínio. O intuito da atividade era abordar o conceito de densidade dos números racionais e irracionais, esperando que os alunos justificassem suas respostas a partir de algum dos três pontos de vistas discutidos em Sirotic e Zazkis (2007), quais sejam o formal (demonstração), algoritmo (resolução de algum caso, com uso de instrumentação matemática de argumentação) ou intuitivo (ainda que com base em algum conceito, uso de justificativas empregando relações não demonstradas entre infinitudes ou deduções em base formal, ou mesmo crenças) (SANTOS, 2017).

Na tarefa 2, a investigação para tratar da densidade dos números racionais e irracionais foi concebida pelo uso do GeoGebra. Um dos modelos era chamado de “racionais entre 2 racionais”, que exibia 8 controles deslizantes e a reta real. A intenção era fazer com que os estudantes percebessem que uma grande quantidade de números racionais poderia ser vista, levando-os a constatar a densidade do conjunto dos números racionais.

O segundo modelo, “Irracionais entre dois Irracionais” parte de um Número Irracional, porém possui o mesmo princípio de funcionamento do modelo anterior. O

intuito da atividade também é o de fomentar a discussão acerca da densidade dos números irracionais.

Assim, Santos (2017) faz uma análise sobre as representações numéricas como formas de apreensão de determinadas expressões do conhecimento matemático que foram chamadas de opacas ou transparentes no trabalho de Lesh, Post e Bear (1987).

Nas considerações finais, o autor descreve que, por diversas vezes, os participantes da pesquisa ao recorrerem a aspectos intuitivos do conhecimento matemático cometeram alguns equívocos. Equívocos esses que, por sua vez, apareceram ligados a temas como a infinitude dos conjuntos numéricos e à própria identificação do número, não o associando de maneira correta ao conjunto pertencente.

Da mesma forma, foi evidenciado que alguns dos sujeitos rejeitaram possíveis crenças ligadas ao carácter intuitivo, usando predominantemente o aspecto algorítmico do pensamento matemático. Para esses estudantes embora tivessem evidenciado alguns conhecimentos prévios, ainda se mostravam dependentes dos procedimentos do cálculo para garantir suas conjecturas.

Santos (2017) ressalta que as discussões e os debates existentes entre os estudantes contribuíram para criar progressos em relação ao tema tratado na pesquisa. Assim, acredita-se que as interfaces digitais tenham sido responsáveis por oportunizar experiências que permitiram reforçar a conjectura acerca da densidade dos números reais, contribuindo assim para que o grupo de estudantes passassem a compreender melhor os conceitos tratados.

Pode-se perceber que o estudo de Costa (2009) traz um levantamento das dificuldades dos estudantes do Ensino Fundamental nas operações e propriedades com os números reais, identificando assim, que eles se encontram distantes do nível adequado à série que cursam. Da mesma forma, a pesquisa de Bartolomeu (2010) – que tinha por objetivo verificar os conhecimentos e dificuldades dos estudantes do Ensino Médio relacionados ao conjunto dos números reais por meio de uma avaliação diagnóstica – também evidencia lacunas na aprendizagem acerca dos números reais em questões de nível básico.

Diante disso, é relevante mencionar a pesquisa de Silva e Penteadó (2009) aplicada aos professores do Ensino Médio a fim de destacar os saberes mobilizados nas atividades acerca dos números reais, constatando também que existem diversas

defasagens de aprendizagem a respeito das propriedades e operações envolvendo os números reais. Assim, nos cabe questionar se a formação inicial de professores de Matemática tem correspondido ao desenvolvimento de habilidades e competências pertinentes ao conjunto dos números reais, de forma a capacitar o professor para lidar com situações que necessitam da mobilização de conhecimentos pertinentes ao assunto.

Pressupõe-se, dessa maneira, que o professor não esteja apto para atender prontamente às diversas situações expostas em sala, visto que tais defasagens encontram-se em sua própria formação.

Por fim, analisamos o estudo de Santos (2017), que realizou um levantamento de dados através da aplicação de uma sequência didática num curso de licenciatura em Matemática, podendo constatar, porém, que as dificuldades permeadas nas atividades advinham de equívocos referentes à identificação do conjunto numérico, evidenciando assim, que alguns dos sujeitos se mostravam dependentes dos procedimentos do cálculo, ignorando aspectos intuitivos. Esse fato mostra a insegurança desses estudantes lidando com possíveis aprendizagens automáticas adquiridas no percurso de sua formação, e nos chama atenção à necessidade de se trabalhar o aspecto investigativo no ensino de Matemática para a construção de significados através de uma aprendizagem por descoberta.

Diante do exposto, percebemos que as defasagens referentes ao contexto dos Números Reais estão presentes nos diversos níveis de ensino, inclusive na formação inicial do professor de Matemática, que tende a repassar esses equívocos, ligados ao conceito dos Números Reais, para seus discentes. Dessa forma, a preocupação torna-se evidente devido ao fato de que sucessivos “erros” vêm sendo repetidos no processo de construção de conceitos ligados aos números reais, sem que haja sequer uma intervenção voltada para sanar tais dificuldades.

Sendo assim, cabe-nos repetir o questionamento apresentado por Rezende (2003), deixando nossa conclusão expressar-se em seus termos no intuito de abrir uma reflexão para engajar iniciativas capazes de transformar tal cenário: “Será que o ensino de Matemática tem omitido ou evitado algumas noções básicas a respeito dos números e, com isso, cooperado para o aumento e não a superação das dificuldades dos nossos estudantes?” (REZENDE, 2003 *apud* COSTA, 2009, p. 154).

### 3 SITUAÇÕES-PROBLEMA RELACIONADAS AO CONCEITO DE NÚMEROS REAIS E ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

De acordo com as considerações tecidas nas seções anteriores, desenvolvemos situações-problema que abordam o conceito dos Números Reais. Tais situações-problema foram elaboradas nos moldes da PBL e serão destinadas a professores e futuros professores de Matemática da Educação Básica.

O conjunto dos Números Reais é um objeto de estudo explorado no Ensino Fundamental e Médio, o seu aprendizado é de total pertinência, tanto aos estudantes, que necessitam construir com clareza o conhecimento acerca desse conceito, quanto aos professores, que necessitam ter total domínio para articular tal conteúdo às práticas cotidianas.

No decorrer da pesquisa, discutimos a importância do desenvolvimento das competências socioemocionais na formação docente, visto os desafios enfrentados na profissão, sendo primordial tolerar pressões, angústias e frustrações. Da mesma forma, destacamos a necessidade em se trabalhar as competências socioemocionais como algo preponderante para a formação integral do estudante.

Nessa perspectiva, é essencial que os atores envolvidos tenham conhecimento a respeito dos cinco constructos do Big Five (habilidades socioemocionais elencadas por pesquisadores em cinco grandes domínios) com o intuito de associá-los aos preceitos educacionais da PBL:

- ✓ **Openness (Abertura a experiências)** Diz respeito ao interesse do estudante pelas experiências, no sentido de estar disposto e interessado, desenvolvendo habilidades como a curiosidade, a imaginação, a criatividade e o prazer pelo aprender.
- ✓ **Conscientiousness (Conscienciosidade)** Se refere à organização por parte do estudante, ao esforço e a responsabilidade pela própria aprendizagem, tendo como características fundamentais a perseverança, a autonomia, a autorregulação e o controle da impulsividade.

- ✓ **Extraversion (Extroversão)** Traz o compromisso de orientar os interesses e energia para o mundo exterior dos estudantes, desenvolvendo assim, a autoconfiança, a sociabilidade e o entusiasmo.
- ✓ **Agreeableness (Amabilidade - Cooperatividade)** Apresenta as competências de atuação em grupo de forma cooperativa e colaborativa, com o desenvolvimento de habilidades como a tolerância, a simpatia e o altruísmo.
- ✓ **Neuroticism (Estabilidade emocional)** Se refere a mostrar previsibilidade e consistência nas reações emocionais, apresentando habilidades como autocontrole, calma e serenidade.

Como já exposto, a metodologia de ensino adotada, difere do ensino convencional. Sendo assim, é de fundamental importância que os participantes envolvidos tenham conhecimento a respeito das características e objetivos da PBL. Que estejam cientes de que todo o processo se dá por meio de mediações e possíveis consultorias, sendo exigido dos participantes, a consciência de que a construção da aprendizagem se dá de forma autogerida, ocorrendo também, através da interação entre os pares.

Como já exposto, a metodologia de ensino adotada, difere do ensino convencional. Sendo assim, é de fundamental importância que os participantes envolvidos tenham conhecimento a respeito das características e objetivos da PBL. Que estejam cientes de que todo o processo se dá por meio de mediações e possíveis consultorias, sendo exigido dos participantes, a consciência de que a construção da aprendizagem se dá de forma autogerida, ocorrendo também, através da interação entre os pares.

Para iniciarmos o processo, os docentes e futuros docentes deverão ser organizados em grupos pequenos, em torno de quatro ou cinco integrantes. Devem eleger um coordenador e um relator (ou secretário). O coordenador atuará como líder, encarregado de pontuar os diálogos entre o grupo. Já o relator terá a função de registrar os levantamentos mais importantes das reuniões, além de distribuir as tarefas a cada um dos membros. É preciso que haja rotatividade entre os participantes do grupo para que todos tenham a oportunidade de atuar nos diferentes papéis.

Propomos a aplicação da metodologia seguindo os sete passos:



1. Distribuição e leitura do problema e identificação dos termos desconhecidos;
2. Interpretação e discussão do texto. Identificação do problema central e das palavras-chave;
3. Levantamento do conhecimento prévio com formulação de hipóteses (*brainstorm*);
4. Resumo das hipóteses possíveis elaborando uma síntese da discussão;
5. Elaboração dos objetivos de aprendizagem e identificação das estratégias de pesquisa a serem percorridas;
6. Pesquisa e elaboração individual concernentes aos objetivos propostos;
7. Retorno, integração das informações e resolução do caso.

Alguns aspectos gerais também precisam ser esclarecidos. Existem três aspectos que são elementares em uma dinâmica de trabalho com a PBL. São eles: a análise do problema e o planejamento da pesquisa; o desenvolvimento das ações que levarão à resolução do problema; a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios (ARAÚJO; ARANTES, 2009 *apud* SOUZA, 2016, p. 79). Sendo assim, veremos detalhadamente cada um dos aspectos citados.

### **1. Análise do problema e o planejamento da pesquisa.**

É nessa etapa que o formador irá apresentar aos docentes ou futuros docentes, uma visão mais geral sobre a situação-problema proposta, levando-os a analisar a condução de problemas próximos às suas realidades profissionais. Para isso é necessário fazerem a leitura coletiva do problema, analisar o seu contexto e registrar as possíveis palavras ou termos desconhecidos para que sejam pesquisados posteriormente.

É importante nessa fase, despertar o interesse pelo problema e observar lacunas que deverão ser preenchidas, indicando a necessidade de estudos e pesquisas acerca dos temas abordados. Assim, os grupos deverão se organizar para o desenvolvimento de ações e trocas de experiências entre os membros da equipe. Parte-se, então, para a realização de um mapeamento, a busca de

informações sobre o problema, a elaboração de hipóteses e as definições das estratégias.

## **2. Desenvolvimento das ações para a resolução do problema.**

Nessa etapa ocorre o desenvolvimento de estudos, pesquisas e intervenções do formador para o encaminhamento das resoluções do problema. Pode ocorrer também, possíveis consultorias de outros professores ou profissionais de outras áreas.

As dinâmicas das aulas no formato da PBL são marcadas, geralmente, por vários encontros entre os integrantes do grupo, para que possam abrir espaços de discussões acerca do problema, oportunizando o surgimento de indagações, o levantamento de hipóteses e o planejamento de planos de ação. As pesquisas também são fundamentais nesse momento, pois através delas os integrantes farão os embasamentos teóricos necessários para compartilharem suas descobertas e informações com todos os membros da equipe para a tomada de decisões.

O professor formador atua como tutor (mediador), realiza orientações, analisa as interpretações e possibilita encaminhamentos a respeito da resolução do problema. O tutor também faz intervenções das dificuldades que possam surgir, tanto em relação aos conhecimentos gerais como ao comportamento que cada grupo possa apresentar de conhecimentos incompatíveis com a resolução do problema.

## **3. Socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios.**

Na última etapa do trabalho com problemas nos moldes da PBL, destacamos a necessidade da socialização por meio do compartilhamento dos conhecimentos produzidos através da apresentação de seminários aos demais grupos e ao tutor.

Para esse momento, propõe-se a construção de um relatório acadêmico-científico destacando a trajetória do projeto desenvolvido, as pesquisas realizadas e os resultados obtidos ao final da proposta.

É importante ressaltar também sugestões sobre o processo de avaliação dos encontros.

Araújo e Arantes (2009) sugerem como avaliações a produção e análise de relatórios, uma nota seria atribuída a um relatório científico parcial e a outra faria referência ao relatório científico final. Realizada uma média entre ambas, tem-se, então, a média final de cada estudante. Segundo esses autores, para que esses relatórios sejam elaborados, cada um deles deve compor as avaliações de todos os envolvidos no processo. Ou seja, no relatório parcial, deve constar a avaliação do tutor, a autoavaliação do estudante e a avaliação que o grupo faz de cada membro da equipe (SOUZA, 2016, p. 81).

Levemos em consideração também a nota a ser atribuída pela participação dos integrantes durante os momentos de tutoria, o envolvimento nas discussões e a apresentação dos seminários no momento da institucionalização.

Como a nossa proposta de trabalho é voltada a professores e futuros professores de matemática, sugerimos também como um dos quesitos avaliativos, a construção de planos de aula voltados a estudantes da Educação Básica, com as devidas orientações didáticas que levarão ao desenvolvimento da resolução de cada situação-problema.

Destacamos que durante as reuniões de aplicação da metodologia, haverá discussões entre os integrantes do grupo e a participação do tutor, que pontuará as intervenções e trará devolutivas acerca dos conhecimentos adquiridos e apresentados pelos participantes. Por fim, ocorrerá o momento de validação das soluções, sendo este a abertura para a exposição das ideias, a troca de experiências entre todos os grupos e a finalização exposta pelo tutor.

A seguir, serão apresentadas sugestões de situações-problemas e as devidas orientações didáticas mais específicas para cada resolução.

### 3.1 SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM – APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS

#### 3.1.1 Noções sobre Números Reais

##### Situação 1

**Objeto Matemático de estudo:** Números Racionais

**Público-alvo:** 8º Ano do Ensino Fundamental

**Relevância para a aprendizagem:**

Fundamentar o conceito de número racional é de extrema importância na Educação Básica, visto sua pertinência e utilização no contexto diário dos estudantes em situações que estão implícitas a relação de parte e todo, o cálculo com frações e números decimais. Nesta situação-problema, abordaremos a dízima periódica, com o objetivo principal de diagnosticar se os estudantes conseguiram ampliar seus conceitos a respeito dos conjuntos numéricos, em específico, compreendendo conceitualmente que todo número racional pode ser escrito como uma dízima periódica e, ainda, ter o conhecimento de que sempre é possível representar um racional como a soma de infinitas frações.

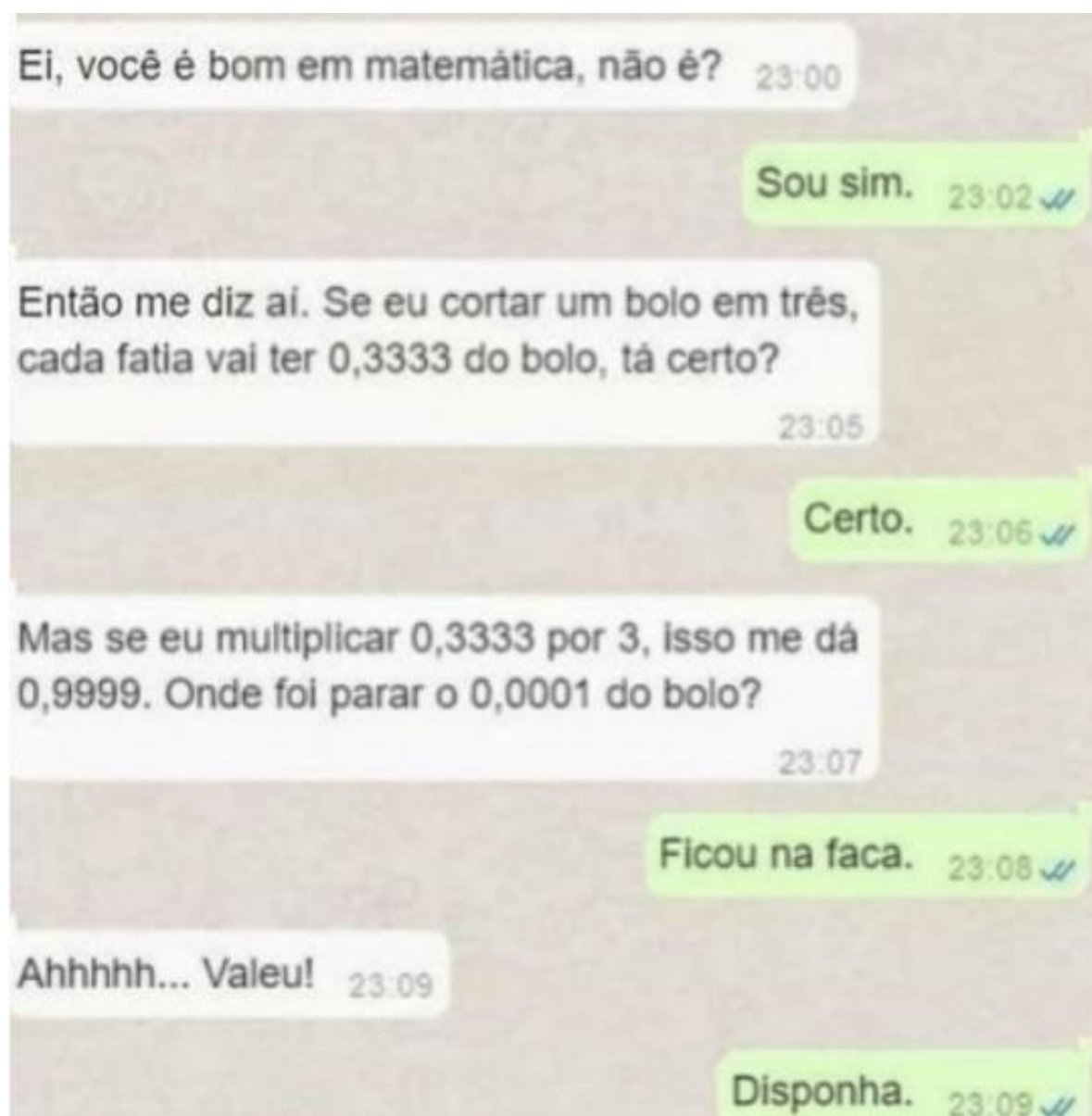
Ao apresentar as dízimas periódicas em um desenvolvimento formal e discutir questões que envolvem este assunto no âmbito do ensino básico, destaca-se também outro objetivo, que é desenvolver junto ao professor do Ensino Fundamental e Médio, uma relação de proximidade entre a fundamentação teórica da disciplina de Matemática aplicada e a Matemática produzida no seio escolar, analisando a relação entre frações e dízimas periódicas.

**Objetos do Conhecimento (BNCC):** Dízimas periódicas – fração geratriz

**Habilidades (BNCC):** (EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

**Problema 1**

Em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental, um grupo de estudantes apresentam ao professor de matemática um diálogo no aplicativo *WhatsApp*, questionando-o se a resposta explícita na conversa está correta (Figura 1).

**Figura 1** – Conversa no aplicativo *WhatsApp*

Fonte: Konrad55\_2020 (2020).

Dessa forma, faça uma análise e comente a resposta que você daria aos estudantes. Como você abordaria a resolução dessa questão justificando matematicamente a explicação para a construção acerca do conhecimento levantado?

### **Orientações Didáticas**

Inicialmente os professores ou futuros professores, organizados em grupos, irão indicar as palavras ou termos desconhecidos para começar a pesquisa.

Algumas questões poderão complementar o planejamento para a resolução ou encaminhamento da situação-problema. Caso essas questões não sejam propostas pelos professores que recebem a formação, elas poderão ser feitas pelo tutor:

- Qual o conceito de número racional?
- O que são dízimas periódicas?
- Dê a definição de fração geratriz.

Os participantes deverão debater tais questões e fundamentarão a pesquisa utilizando-se dos recursos disponíveis na escola. O tutor poderá indicar a leitura de livros, materiais didáticos, *sites* ou videoaulas da Internet que tratam sobre o objeto de conhecimento a ser pesquisado. Algumas indicações poderiam ser:

- ✓ Números: Racionais e Irracionais (NÍVEN, 1984).
- ✓ Introdução à teoria dos números (SANTOS, 2020).
- ✓ Site Professor Paulo Gama:

<https://webcache.googleusercontent.com/search?cd=1&ct=clnk&gl=br&hl=pt-BR&q=cache%3AbeNRL6oOgykJ%3Ahttps%3A%2F%2Fwww.professorpaulogama.com.br%2Fpost%2Fo-bolo-que-ficou-na-faca+>. Entre outros.

O diálogo exposto no aplicativo *WhatsApp* nos remete a uma situação do cotidiano, portanto, contextualizada com a realidade dos estudantes. Nesse primeiro momento, é importante que o professor saliente que  $\frac{1}{3}$  não é exatamente igual à sua forma decimal 0,3333..., já que ela é uma dízima periódica, com infinitas casas decimais. O correto é que o professor exponha que  $\frac{1}{3}$  é aproximadamente 0,3333 e não exatamente igual a 0,3333.

Assim, é importante o professor retomar, junto aos estudantes, o conceito de dízima periódica, explicando que elas pertencem ao conjunto dos números racionais, e que dessa forma podem ser expressas em forma de fração, ou seja, na forma  $\frac{a}{b}$  com  $b \neq 0$ .

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \right\}$ , em que  $a$  e  $b$  são números inteiros e  $b \neq 0$ .

É fundamental também que o professor retome o conceito de fração geratriz para ser possível desenvolver a resolução dessa questão.

Observemos assim, que o bolo foi dividido em três partes iguais, representado pela fração  $\frac{1}{3}$ . Se adicionarmos as três fatias, temos:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ . Ou seja, em se tratando da fração, não há erro algum, pois o resultado dá 1.

O aparente problema surge quando multiplicamos  $3 \times 0,333 = 0,999\dots$

O resultado de  $3 \times 0,333$  tem que ser igual a 1, mas aparentemente dá 0,9999.

O erro está em desprezarmos as casas decimais contidas na reticência, que, aliás é uma **dízima periódica**.

No Ensino Fundamental ao trabalharmos as dízimas periódicas, construímos com os estudantes o conceito de fração geratriz, com o intuito de determinar as frações que dão origem às dízimas periódicas. Assim, usamos tal procedimento:

1. Chamamos de  $x$  o valor de  $0,999\dots$ , ou seja,  $x = 0,999\dots$
2. Multiplicamos ambos os membros da igualdade por um valor conveniente a obter uma igualdade equivalente, com o objetivo de se eliminar a parte decimal. Assim, neste caso, se multiplicarmos ambos os membros da igualdade por 10 (aplicando o princípio multiplicativo), logo teremos:

$$10 \cdot x = 10,0,999\dots \quad 10x = 9,999\dots$$

Efetuando-se a subtração dos dois termos, obtemos  $10x - x = 9,999\dots - 0,999\dots$

$$9x = 9. \text{ Logo } x = 1.$$

Se na multiplicação feita pela pessoa que faz a pergunta no diálogo acrescentasse cada vez mais casas decimais, o valor obtido se aproxima cada vez mais de 1, o que na Matemática dizemos que o valor “tende” a 1.

Uma outra maneira de percebermos isso é notarmos que:

$$0,999\dots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + 0,00009 + \dots \quad (I)$$

Observa-se que o segundo membro da igualdade (I) forma uma soma infinita.

Os termos desta soma formam uma **Progressão Geométrica (PG) decrescente**, pois cada termo desta sequência é igual ao anterior multiplicado por 0,1.

Assim, temos a **PG infinita**: (0,9; 0,09; 0,009; 0,0009; 0,00009; ...). (II)

$$\text{Onde } a_1 = 0,9 \text{ e } q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0,09}{0,9} = 0,1$$

Como a igualdade (I) é a **soma (S) dos infinitos termos da PG (II)**, podemos calcular o valor dessa soma pela fórmula:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1 - q} \\ S &= \frac{0,9}{1 - 0,1} \\ S &= \frac{0,9}{0,9} \\ S &= 1 \end{aligned}$$

Mais uma vez percebemos que o valor 0,999... tende a 1.

Depois de posta a representação da fração geratriz, a resposta que o professor poderá formular junto aos estudantes poderá ser a de que o resto do bolo não ficou na faca e sim na aproximação dada pelo indagador.

## Situação 1.2

**Objeto Matemático de estudo:** Números Racionais



**Público-alvo:** 8º Ano do Ensino Fundamental

**Relevância para a aprendizagem:**

É muito comum entre os estudantes da Educação Básica a dificuldade de compreender o significado de alguns conceitos matemáticos, bem como aceitar a igualdade entre  $0,999\dots$  e  $1$ . Isso se deve principalmente ao fato de que, muitas vezes, o processo de construção do conceito de número real não é trabalhado de forma cuidadosa para que compreendam o significado e não apenas memorizem processos que muitas vezes não fazem sentido a eles.

Um dos objetivos dessa situação-problema é levar à reflexão sobre conceitos pertinentes à Análise Matemática, muitos deles introduzidos desde o Ensino Fundamental, identificando, por exemplo, maneiras de escrever um mesmo número racional nas formas decimal e fracionária, estabelecendo a conexão entre diferentes representações.

Essas conjecturas são essenciais para explorar experiências que servirão de suporte às reflexões que propiciarão a oportunidade de detectar obstáculos epistemológicos na construção de algumas ideias básicas da Matemática, bem como auxiliar no desenvolvimento de uma relação de proximidade entre a fundamentação teórica da Matemática aplicada com a Matemática produzida no âmbito escolar.

**Objetos do Conhecimento (BNCC):** Dízimas periódicas – fração geratriz.

**Habilidades (BNCC):** (EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

**Problema 1.2**

Em um diálogo sobre números reais e aproximações dois estudantes chegaram a um impasse em relação à seguinte questão: Podemos dizer que  $0,999\dots$  é igual a 1?

**O estudante A respondeu o seguinte:**

*Não podemos fazer essa afirmação, visto que  $0,999\dots$  é muito próximo de 1 mas não é exatamente igual a 1.*

**O estudante B respondeu o seguinte:**

*Sim, podemos fazer essa afirmação, já que  $0,999\dots$  é igual 1, não está muito próximo pois se trata do mesmo número indicado de duas formas distintas.*

Comente as respostas de cada um dos estudantes e acabe com o impasse justificando matematicamente a sua posição em relação ao debate.

### **Orientações Didáticas**

Elencamos a seguir algumas questões subjacentes que poderão complementar o planejamento para a resolução da situação-problema.

Inicialmente será fundamental indicar as palavras ou termos desconhecidos pelos integrantes a fim de iniciar o trabalho. Em seguida, o formador (tutor) poderá propor questões pertinentes aos participantes para que iniciem a pesquisa.

- O que são dízimas periódicas?
- Dê a definição de fração geratriz.
- Quais as frações Geratrizes do número  $0,999\dots$ ?

Os participantes, organizados em grupos, irão discutir sobre as questões e fundamentarão o estudo se utilizando dos recursos disponíveis na escola como livros, materiais didáticos, computadores com acesso à internet, entre outros. Assim, o tutor poderá recomendar algumas leituras ou videoaulas como:

- ✓ A Matemática do Ensino Médio (LIMA, 2006).

- ✓ Números: Racionais e Irracionais. (NÍVEN, 1984).
- ✓ Introdução a teoria dos números (SANTOS, 2020).
- ✓ Vídeo Isto é Matemática – T10E01 – “0,999999999... É Igual a Um”.  
Disponível em: <https://youtu.be/3by2j7YO30o>

Similar ao problema anterior, determinaremos a fração geratriz de uma dízima periódica utilizando o mesmo cálculo já apresentado. Porém, é importante lembrar que, primeiramente, o professor deve retomar junto aos estudantes o conceito de número racional a fim de explorar suas diferentes representações.

É fundamental também verificar se há lacunas na aprendizagem quanto a compreensão de dízima periódica e fração geratriz. Em caso afirmativo, o professor deverá retomar tais conceitos de forma a desenvolver tal habilidade para a construção acerca do conhecimento.

Isto posto, desenvolveremos o cálculo da fração geratriz como prova da igualdade entre 0,999... e 1:

$$\begin{aligned} X &= 0,999\dots \\ 10X &= 9,999\dots \\ 10X - X &= (9,999\dots) - (0,999\dots) \\ 9X &= 9 \quad \text{Logo } X = 1. \end{aligned}$$

Um outro argumento que podemos usar para mostrar esse fato, é usando um outro número decimal como base de teoria. Assim:

O número  $0,1111\dots = \frac{1}{9}$ , logo, se multiplicarmos ambos os lados por 9, obtemos  $0,9999\dots = \frac{9}{9} = 1$ .

Podemos também optar pela representação da adição de um número infinito de termos de uma progressão geométrica, em que o módulo da razão é maior do que zero e menor do que um:

$$0,9999\dots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots$$

Dessa forma, observa-se que a dízima periódica pode ser identificada com a adição de infinitas parcelas de números racionais, quer estas estejam representadas

na forma decimal ou fracionária. Esta expressão representa a adição de um número infinito de termos de uma progressão geométrica (PG) decrescente, cujo primeiro termo é  $a = \frac{9}{10} = 0,9$  e a razão  $q = \frac{1}{10} = 0,1$ .

No caso da PG ser como a apresentada anteriormente, onde  $a_1 = \frac{9}{10}$  e  $q = \frac{1}{10}$ , podemos calcular a soma de um número infinito de termos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Dessa forma, depois de o professor estar munido da fundamentação teórica acerca do objeto de conhecimento levantado, acreditamos que ele será capaz de construir matematicamente com os estudantes a demonstração da resolução, e facilmente responder os questionamentos iniciais levantados, afirmando que a colocação do estudante B está correta, pois podemos sim afirmar e demonstrar que o número 0,999... é igual a 1, já que 0,999... não está muito próximo de 1, e sim se trata do mesmo número indicado de duas formas distintas.

## Situação 2

**Objeto Matemático de estudo:** Números Irracionais

**Público-alvo:** 9º Ano do Ensino Fundamental

### Relevância para a aprendizagem

Diversos segmentos de reta podem ter suas medidas de comprimento expressas por números racionais. Entretanto, há segmentos de reta cujas medidas de comprimento não podem ser expressas por números racionais, surgindo assim a necessidade de apresentação de um novo conjunto numérico: o conjunto dos números irracionais.

Ao trabalhar a definição de número irracional é importante fundamentar com os estudantes que o conceito de cada tipo de número foi tecido ao longo dos anos e

que os números não são elementos estáticos, sendo os conjuntos numéricos “criados” pela necessidade lógica das operações. Dando embasamento teórico para a compreensão de que o conjunto dos números reais é formado pelos números racionais mais os números irracionais.

É fundamental, também, que os estudantes consigam identificar os números irracionais, uma vez que isso possibilitará a compreensão futura acerca do conjunto dos números reais. Tal situação-problema constitui-se em um momento de articulação e as suas diversas aplicações entre os eixos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, visto que existe a possibilidade de se discutir os números, suas representações e sua localização na reta real com o uso dos instrumentos clássicos de desenho como a régua e o compasso.

**Objetos do Conhecimento (BNCC):** Números irracionais – Números Reais.

**Habilidades (BNCC):**

- ✓ **(EF09MA01)** Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
- ✓ **(EF09MA02)** Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

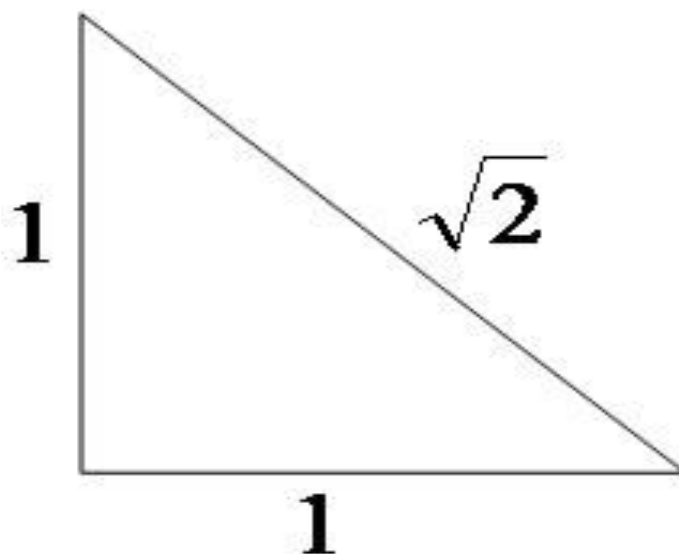
## **Problema 2**

**Analise a seguinte situação:**

Em uma aula de Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental, um professor aborda o estudo dos Números Reais contextualizando a descoberta dos números Irracionais através do Teorema de Pitágoras ao calcular a diagonal do quadrado, conforme versa a seguinte questão:

Consideremos a Figura 2 na qual temos um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 1. Usando esse triângulo e um compasso, marque na reta numérica um segmento cujo comprimento é representado por um número não racional que é o conhecido  $\sqrt{2}$ .

**Figura 2** – Triângulo retângulo isósceles



Diante de tal situação o aluno A faz o seguinte questionamento:

– *Podemos colocar a régua sobre o segmento  $\sqrt{2}$  e utilizar essa medida como padrão?*

Na sequência, o aluno B interroga:

– *Se não encontramos os números irracionais na régua, existe alguma relação entre a medida de um segmento e um número irracional?*

Comente as respostas que você daria a cada um dos estudantes. Como você abordaria a resolução dessa questão justificando matematicamente a explicação para a construção do conhecimento acerca do objeto matemático levantado?

### **Orientações Didáticas**

A seguir, algumas questões relevantes que poderão complementar o planejamento para a resolução da situação-problema. Caso essas questões não sejam propostas pelos professores ou futuros professores, organizados em grupos, elas poderão ser feitas pelo formador (tutor).

Inicialmente será fundamental indicar as palavras ou termos desconhecidos pelos integrantes do grupo a fim de iniciar a pesquisa.

- Dê a definição de Número Racional e Número Irracional;
- Qual a definição de Número Real?
- Defina Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis.

Os participantes irão debater sobre as questões e fundamentarão sua pesquisa se utilizando dos recursos disponíveis na escola como livros, computadores com acesso à internet, material didático, dentre outros.

O tutor poderá indicar livros e materiais que poderão auxiliá-los na fundamentação da pesquisa, tais como:

- ✓ Números: Racionais e Irracionais (NÍVEN, 1984).
- ✓ Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais. (ÁVILA, 1984).
- ✓ Análise Matemática para a licenciatura (ÁVILA, 2006).
- ✓ Análise Real (LIMA, 2012).
- ✓ Caderno do professor – Matemática – (8ª série/9º ano) – Volume 1 – Secretaria da Educação – São Paulo – (2014-2017). Entre outros.

Uma possível resolução dessa situação-problema seria, primeiramente, solicitar a fundamentação do conceito de Número Irracional.

Alguns autores relacionam a definição de números irracionais com a dos números racionais, surgindo assim, a necessidade de explorarmos um pouco sobre comensurabilidade entre segmentos e a respeito dos números fracionários e decimais.

De acordo com Níven (1984):

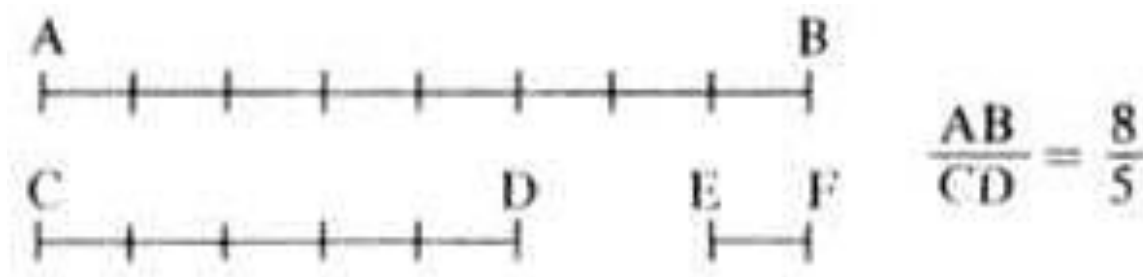
[...] Existem números reais que não são racionais. O número  $\sqrt{2}$  não é racional [...]. Qualquer número real, como  $\sqrt{2}$ , que não é racional, diz-se irracional. De acordo com esta definição, todo número real, ou é racional, ou é irracional. A reta, ou eixo, com um número associado a cada um de seus pontos, [...] é chamada reta real. Os pontos desta reta se dizem racionais ou irracionais conforme os números a eles associados sejam racionais ou irracionais. Observe que a definição acima, de número irracional, resume-se no seguinte: qualquer número real que não possa ser expresso como razão  $a/b$  de dois inteiros, diz-se irracional (NÍVEN, 1984, p. 60).

É de suma importância também fundamentar o que são grandezas comensuráveis e incommensuráveis.

De acordo com Ávila (1984), existem na Matemática conceitos que parecem muito simples a uma visão superficial, mas que, submetidos a uma análise criteriosa revelam aspectos verdadeiramente surpreendentes. Segundo ele, se tratarmos da reta na sua representação numérica em termos das abscissas de seus pontos poderemos mostrar que os conceitos de reta e de número não são tão simples como parecem.

Uma questão com que lidavam os matemáticos gregos no final do quinto século antes de Cristo era a de comparar grandezas da mesma espécie, como dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes. No caso de dois segmentos retilíneos AB e CD, dizer que a razão AB/CD é o número racional  $m/n$ , significava para eles (e ainda significa para nós) que existia um terceiro segmento EF tal que AB fosse  $m$  vezes EF e CD  $n$  vezes esse mesmo segmento EF. Na Figura 2, extraída do artigo do Professor Geraldo Ávila (1984), ilustramos essa situação com  $m = 8$  e  $n = 5$ .

**Figura 3** – representação dos segmentos AB e CD na razão de 8/5

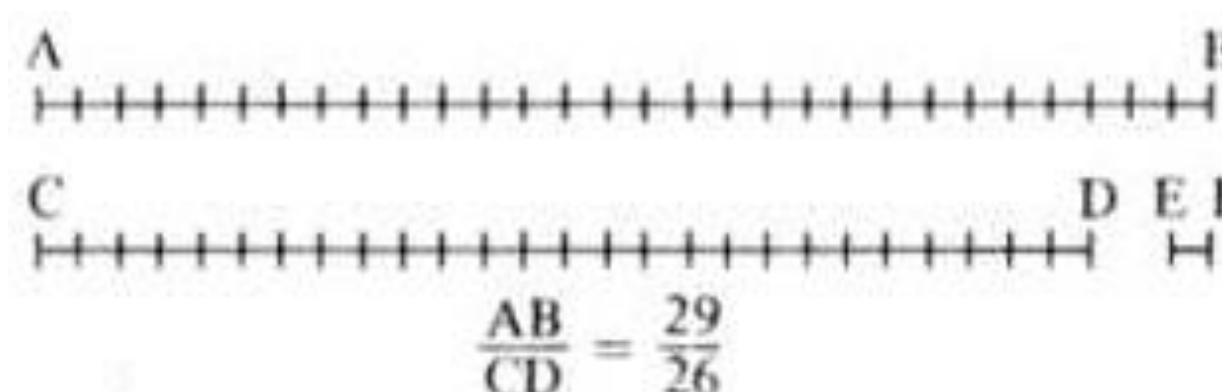


Fonte: (ÁVILA,1984).



No tempo de Pitágoras e ainda durante boa parte do século V a.C., pensava-se que os números racionais fossem suficientes para comparar segmentos de reta; isto é, dados dois segmentos AB e CD, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento EF contendo um número inteiro de vezes em AB e outro número inteiro de vezes em CD, situação essa que descrevemos, dizendo que EF é um submúltiplo comum de AB e CD. Uma simples reflexão revela que essa é uma ideia muito razoável. Afinal, se EF não serve, podemos imaginar um segmento menor, outro menor ainda, e assim por diante. Nossa intuição geométrica parece dizer-nos que há de existir um certo segmento EF, talvez muito pequeno, mas satisfazendo aos propósitos desejados. Na Figura 3, também extraída do artigo do Professor Geraldo Ávila (1984), ilustramos uma situação com segmento EF bem menor que o da figura anterior. Poderíamos imaginar um segmento EF tão pequeno que nem pudéssemos mais desenhá-lo, mas, nos convenceríamos, pela nossa intuição geométrica, da possibilidade de sempre obtermos um submúltiplo comum de AB e CD.

**Figura 4** – representação dos segmentos AB e CD na razão de 29/26



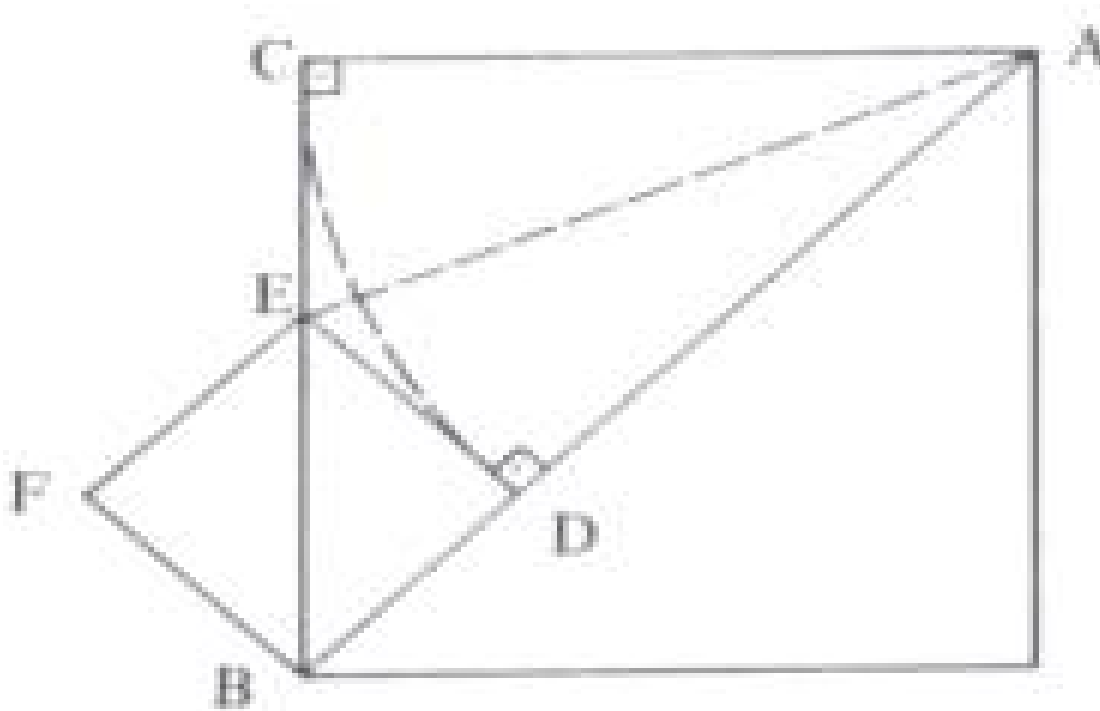
Fonte: (ÁVILA,1984).

Dois segmentos nessas condições são ditos comensuráveis, justamente por ser possível medi-los ao mesmo tempo, com a mesma unidade EF.

Entretanto, como também nos explica Ávila (1984), não é verdade que dois segmentos quaisquer sejam sempre comensuráveis. Em outras palavras, existem segmentos AB e CD sem unidade comum EF, os chamados segmentos incomensuráveis. Esse é um fato que contraria nossa intuição geométrica, e por isso mesmo a descoberta de grandezas incomensuráveis na Antiguidade representou um momento de crise no desenvolvimento da Matemática.

De acordo com evidências históricas, foram os próprios pitagóricos que descobriram grandezas incomensuráveis, provavelmente entre 450 e 400 a.C.; e, ao que tudo indica, isto se fez através de um argumento geométrico, como o que apresentaremos a seguir, demonstrando que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis. Para exemplificar a demonstração, utilizaremos a Figura 4, extraída do artigo do Professor Geraldo Ávila (1984):

**Figura 5** – Demonstração geométrica da existência de segmentos incomensuráveis



Fonte: (ÁVILA, 1984).

Na Figura 4 representamos um quadrado com diagonal  $\delta = AB$  e lado  $\lambda = AC$ . Suponhamos que  $AB$  e  $AC$  sejam comensuráveis. Então, deverá existir um terceiro segmento que seja submúltiplo comum de  $\delta$  e  $\lambda$ . Para provarmos isso, façamos a seguinte construção: traçamos o arco  $\overline{CD}$  com centro em  $A$  e o segmento  $ED$  tangente a esse arco em  $D$ , de sorte que  $AD = AC$ . Então, nos triângulos retângulos  $ACE$  e  $ADE$ , os catetos  $AC$  e  $AD$  são iguais e a hipotenusa  $AE$  é comum, logo são também iguais os catetos  $CE$  e  $DE (=BD)$ . Portanto,  $\delta = AB = AD + BD = \lambda + BD$

$$\lambda = BC = BE + EC = BE + BD$$

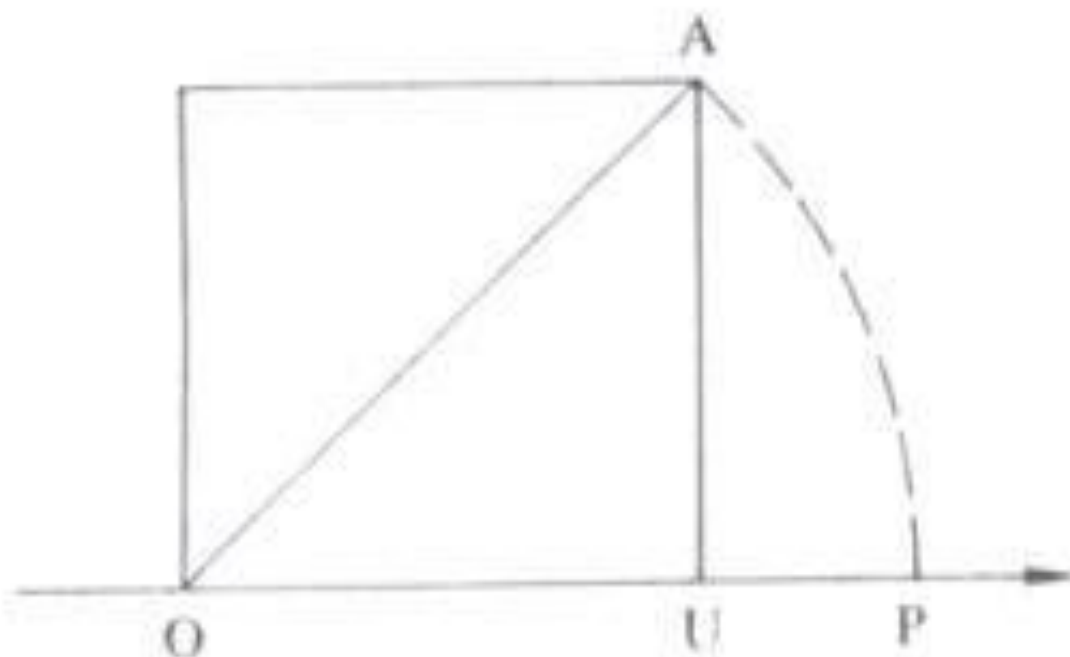
$$\text{Ou seja, } \delta = \lambda + BD \quad (1)$$

$$\lambda = BE + BD \quad (2)$$

Como um segmento é submúltiplo comum de  $\delta$  e  $\lambda$ , concluímos, por (1), que também é submúltiplo de  $BD$ . Daqui e de (2) segue-se que  $s$  também é submúltiplo de  $BE$ . Provamos assim que se houver um segmento que seja submúltiplo comum de  $\delta = AB$  e  $\lambda = AC$ , então o mesmo segmento  $\sigma$  será submúltiplo comum de  $BE$  e  $BD$ , segmentos esses que são a diagonal e o lado do quadrado  $BDEF$ . Ora, a mesma construção geométrica que nos permitiu passar do quadrado original ao quadrado  $BDEF$  pode ser repetida com este último para chegarmos a um quadrado menor ainda; e assim por diante, indefinidamente; e esses quadrados vão se tornando arbitrariamente pequenos, pois, como é fácil ver, as dimensões de cada quadrado diminuem em mais da metade quando passamos de um deles a seu sucessor. Dessa maneira, provamos que o segmento deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejemos. Evidentemente, isso é um absurdo! Somos, pois, levados a rejeitar a suposição inicial de que o lado  $AC$  e a diagonal  $AB$  do quadrado original sejam comensuráveis. Concluímos, pois, que o lado e a diagonal de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis, C.Q.D.

Ainda, de acordo com Ávila (1984), uma consequência da existência de grandezas incomensuráveis é a existência de pontos na reta sem abscissas racionais. A Figura 5 pode ilustrar melhor esse fato:

**Figura 6** – Representação geométrica da diagonal do quadrado de lado OU



Fonte: (ÁVILA, 1984).

De acordo com a Figura 5, basta tomarmos  $OP=AO$ , onde  $AO$  é a diagonal de um quadrado de lado unitário  $OU$ . Como  $OP$  e  $OU$  são incomensuráveis, não é possível expressar a razão  $OP/OU$  com um número racional. Pelo teorema de Pitágoras, a abscissa de  $P$  seria:  $OA^2 = OU^2 + UA^2$ .

Como  $AO = OP$  e  $UA = OU = 1$ , obtemos:  $OP^2 = 2OU^2 = 2$ , ou seja,  $OP = \sqrt{2}$ . É essa a abscissa de  $P$ , tomando  $OU$  como unidade de comprimento. Se tomarmos, por simplificação,  $OU$  como um segmento de reta e este como unidade de comprimento, temos:

**Figura 7** – Representação da semirreta com origem em  $O$



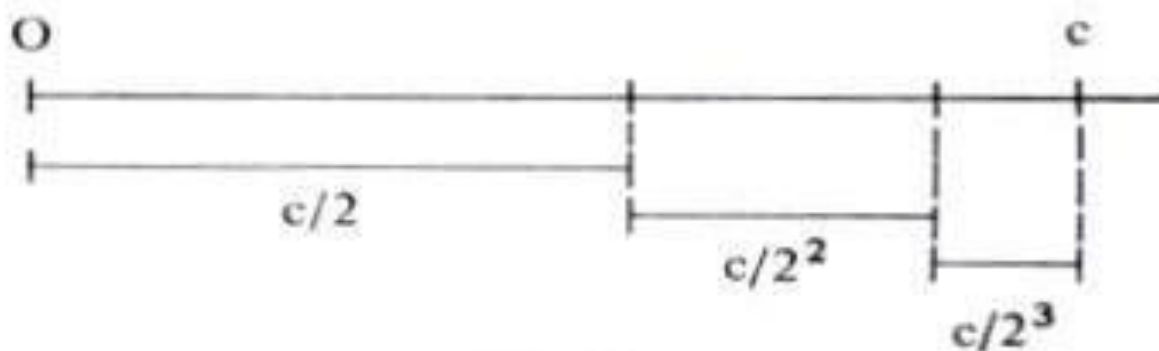
Fonte: (ÁVILA,1984).

Dessa forma, todo ponto  $P$  da semirreta que não seja a origem  $O$ , tem abscissa positiva  $x$ , que é a razão  $OP/OU$ . Logicamente, se todos os pares de segmentos  $OU$  e  $OP$  fossem comensuráveis, somente os números racionais não negativos já seriam suficientes para caracterizar os pontos da semirreta.

Suponhamos, porém, que todos os pontos da semirreta tenham abscissas racionais. Uma primeira consequência dessa afirmação é que os pontos da semirreta formam um conjunto enumerável, pois o conjunto dos números racionais é enumerável, cuja prova dessa afirmativa nos absteremos aqui. Contudo, para facilitar a visualização, façamos uma cobertura da semirreta por meio de segmentos, sendo o primeiro segmento  $r_1$  igual a  $c/2$ , o segundo segmento  $r_2$  é igual à metade de  $r_1$ , o terceiro segmento  $r_3$  igual à metade de  $r_2$  e assim por diante. Dessa maneira a semirreta ficará toda coberta com uma família infinita de segmentos.

No entanto, vamos somar os comprimentos dos segmentos dessa família e, para facilitar a visualização geométrica, colocamos os segmentos em fila, um em seguida ao outro e na ordem em que aparecem, como ilustra a Figura 7:

**Figura 8** – Segmentos colocados em fila



Fonte: (ÁVILA,1984).

Sabemos que a soma desses segmentos é exatamente igual a  $c$  (comprimento finito), pois começamos por um segmento de comprimento  $c/2$ , adicionamos sua metade, depois a metade deste último e assim sequencialmente. Isso é um absurdo, pois uma semirreta não tem um comprimento finito, mas infinito! Para sairmos de tal contradição, temos que admitir que os números racionais são insuficientes para marcar todos os pontos de uma reta e para completar esses

pontos sem abscissas racionais temos que nos valer dos números irracionais como  $\sqrt{2}$ .

Por fim, para provarmos que  $\sqrt{2}$  é um número irracional, suponhamos que exista uma fração irredutível  $m/n$  tal que  $\sqrt{2} = m/n$ . Então, elevando ambos os termos ao quadrado:

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \therefore \quad m^2 = 2n^2.$$

Daqui temos que se  $m$  é um número par,  $m^2$  também é par, portanto,  $m = 2r$ , sendo  $r$  outro número inteiro. Substituindo  $m$  por  $2r$  em  $m^2 = 2n^2$ , obtemos:

$$4r^2 = 2n^2 \quad \therefore \quad n^2 = 2r^2.$$

Essa última relação nos diz que  $n^2$  é um número par, logo  $n$  também é par. Chegamos a um absurdo, pois  $m/n$  é uma fração irredutível, não sendo possível que  $m$  e  $n$  sejam ambos pares. Assim, provamos que  $\sqrt{2}$  é um número irracional, já que não pode ser expresso na forma  $m/n$ , ou seja, é impossível falar em razão entre duas grandezas quando essas são incomensuráveis.

A existência dos números irracionais, conforme Niven (1984), permite que todo o comprimento de uma reta possa ser expresso como números reais, e isso em Matemática é conhecido como a propriedade de completude desses números.

Isto posto, o professor estando munido dessa base teórica, acreditamos que ele facilmente irá responder aos estudantes os questionamentos iniciais:

- ✓ Aluno A: Podemos colocar a régua sobre o segmento  $\sqrt{2}$  e utilizar essa medida como padrão?

Não, porque a diagonal de um quadrado é uma medida incomensurável, ou seja, não pode ser expressa por um segmento de reta. Para tal questionamento, o professor poderá explicar que não é possível quantificar números irracionais através

de um instrumento de medida como uma régua, pois não é possível mensurar esta medida.

- ✓ Aluno B: Se não encontramos os números irracionais na régua, existe alguma relação entre a medida de um segmento e um número irracional?

Não, como já dito anteriormente, é importante que os estudantes compreendam que não é possível comensurar os números irracionais através da medida de um segmento.

Por fim, o professor poderá realizar junto com os estudantes o experimento: Utilizando a régua, irão desenhar uma reta numerada no papel quadriculado (1 cm × 1 cm), sobre uma das linhas da malha, considerando 1 cm como unidade de medida de comprimento.

Em seguida, devem traçar a diagonal do quadrado, sendo a medida de comprimento dessa diagonal igual a  $\sqrt{2}$  cm.

Com o auxílio do compasso, deve abri-lo do tamanho da diagonal. Colocando a ponta-seca sobre o ponto representativo do zero na reta numerada e, com a ponta móvel sobre a outra extremidade da diagonal, deve se deslizar até a reta numerada. Assim, temos que o ponto de encontro desse traçado com a reta numerada será o ponto representativo da medida  $\sqrt{2}$  cm.

## Situação 2.1

**Objeto Matemático de estudo:** Números Irracionais

**Público-alvo:** 9º Ano do Ensino Fundamental

### Relevância para a aprendizagem

Ao contextualizar com os estudantes o conceito de número real, é essencial que eles compreendam o  $\pi$  (pi) como um número irracional. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os

geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, recorrendo assim, aos números irracionais.

O estudo do número  $\pi$  (pi) é uma questão relevante para a Matemática, devido a sua importância na definição de conceitos e a sua utilização em todas as fórmulas de linhas ou corpos redondos. Ele é bastante usado em diversas áreas de conhecimento como a estatística, a música, a engenharia, entre outras.

É fundamental investigar a importância do conceito  $\pi$  (pi) para o ensino da Matemática de maneira a fundamentar o professor para que ele consiga desenvolver com os estudantes a sua construção e definição, oportunizando a melhoria da prática pedagógica e a compreensão dos cálculos que utilizam tal conceito.

Tal situação-problema constitui-se em uma possibilidade de reflexão a respeito da construção dos números irracionais, sobretudo, o número  $\pi$  (pi) de maneira a explorar com o professor de Matemática, tal conhecimento com maior profundidade, buscando estabelecer conexões com o significado de número real da Matemática escolar e, conseqüentemente, preparando-os para ensinar números irracionais na Educação Básica.

### **Objetos do Conhecimento (BNCC):**

- ✓ Medida do comprimento da circunferência;
- ✓ Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica.

### **Habilidades (BNCC):**

- ✓ **(EF07MA27)** Estabelecer o número (pi) como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
- ✓ **(EF09MA02)** Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.


### **Problema 2.1**



Em uma aula de Matemática numa turma do 9º ano do Ensino Fundamental, um professor revisa o estudo dos números irracionais contextualizando a existência do número  $\pi$ . Para fundamentar a definição de número irracional ele propõe a observação e a realização da seguinte atividade (Figura 9):

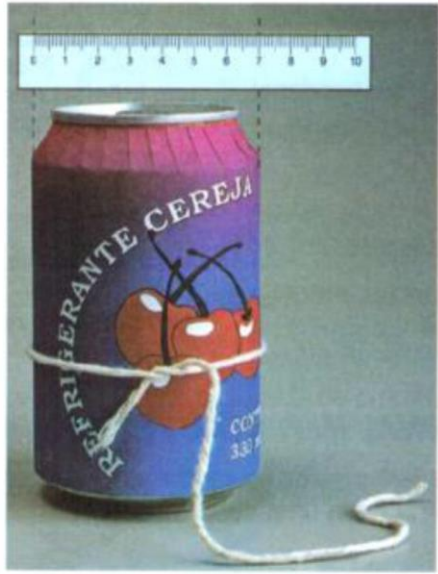
**Figura 9** – Exemplo de abordagem de  $\pi$  em livros didáticos

**1** Se medirmos uma moeda de 1 real, encontraremos, aproximadamente, 84,9 mm de comprimento da circunferência e 27 mm de diâmetro.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{84,9 \text{ mm}}{27 \text{ mm}} = 3,1444\dots$$


*Para medir o comprimento da circunferência da moeda, é necessário contorná-la.*

**2** Se medirmos uma lata de refrigerante, encontraremos, aproximadamente, 220 mm de comprimento da circunferência e 70 mm de diâmetro.



$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{220 \text{ mm}}{70 \text{ mm}} = 3,1428\dots$$

Fonte: (GIOVANNI JR.; CASTRUCCI, 2009, p. 26 *apud* BORTOLETTO, 2008).

Diante de tal situação os estudantes apresentam os seguintes questionamentos:

– Se o número  $\pi$  ( $\pi$ ) é irracional por que ele foi representado como razão de dois números inteiros?

– Aprendemos que os números irracionais são incomensuráveis, como é possível medir o número  $\pi$  ( $\pi$ )?

– Se o número  $\pi$  ( $\pi$ ) é um valor constante, por que encontramos diferentes resultados?

Comente as respostas que você daria a cada um dos estudantes. Como você abordaria a resolução dessa questão justificando matematicamente a explicação?

### **Orientações Didáticas**

A seguir, algumas questões relevantes para a complementação e o planejamento de pesquisa para a resolução da situação-problema. Algumas questões poderão ser levantadas pelo formador (tutor), caso não sejam propostas pelos participantes.

Inicialmente os professores ou futuros professores, organizados em grupos, irão indicar as palavras ou termos desconhecidos para iniciar a pesquisa.

As questões podem ser:

- Por que um número que não é racional é necessariamente irracional?
- Dê a definição do número  $\pi$  ( $\pi$ ).
- Por que a letra grega  $\pi$  é utilizada para representar o número 3,14159...?
- Por que  $\pi$  ( $\pi$ ) é irracional?

O tutor poderá indicar a leitura de livros ou materiais didáticos, bem como disponibilizar a utilização de recursos como computadores com acesso a internet existentes na escola. Algumas indicações podem ser:

- ✓ A Matemática do Ensino Médio (LIMA, 2006).
- ✓ Números: Racionais e Irracionais (NÍVEN, 1984).
- ✓ Dissertação (BORTOLETTO, 2008). Disponível em:  
[http://iepapp.unimep.br/biblioteca\\_digital/down.php?cod=NDUx](http://iepapp.unimep.br/biblioteca_digital/down.php?cod=NDUx)

- ✓ Dissertação (OLIVEIRA, 2015). Disponível em:

<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/127674/000844541.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Dentre outros.

Primeiramente é importante que o professor retome com os estudantes a definição dos números irracionais. Convém lembrar que um número é racional quando se pode representá-lo sob a forma de uma fração. É o caso de  $5 = \frac{5}{1}$ ;  $0,5 = \frac{1}{2}$ ;  $0,1111... = \frac{1}{9}$ . Se um número não é racional diz-se irracional, pois ele não é representável por uma fração e correspondendo assim a uma dízima infinita e não periódica. É o caso, por exemplo de  $\sqrt{2} = 1,414213562...$ , e do número  $\pi = 3,1415...$

Neste momento, é fundamental que o professor explore junto aos estudantes o conceito do número  $\pi$  (pi) destacando que o  $\pi$  (pi) é um número irracional transcendente de valor compreendido entre 3 e 4. Por ser um número irracional, ele é infinito e não periódico.

Os números transcendentos são os números que não são algébricos. Não existe nenhum polinômio de coeficientes inteiros de que sejam raiz. O número  $\pi$  (pi) é um número transcendente porque não se pode obtê-lo como raiz de nenhum polinômio de coeficientes inteiros.

De acordo com Lima (1985), podemos dizer que  $\pi$  (pi) é a área de um círculo de raio 1 (por exemplo, se o raio de um círculo mede 1 cm, sua área mede  $\pi$  cm<sup>2</sup>).

O símbolo usado para designar a constante obtida pela razão entre a medida do contorno de uma circunferência e seu diâmetro é a letra grega  $\pi$ , inicial da palavra contorno, escrita em grego: περιμετροξ. Foi popularizado pelo matemático suíço Leonhard Euler, em 1937 (BIGODE, 1994, p. 32).

Tal definição baseia-se no fato de  $\pi$  (pi) ser uma constante, onde o quociente entre o comprimento P de uma circunferência e o seu diâmetro d, permita escrever  $\pi = \frac{P}{d}$ .

Segundo Bortoletto (2008), não se sabe exatamente como na antiguidade se chegou à descoberta do número  $\pi$ , mas muito provavelmente o interesse por ele terá tido a sua origem em problemas de determinação de áreas e na constatação empírica de que, duplicando ou triplicando o diâmetro de uma circunferência, o seu

perímetro também duplica ou triplica. Isto é, permanece constante a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência, qualquer que seja o seu raio.

Uma das técnicas que podem ser usadas para encontrar uma aproximação mais precisa para o valor de  $\pi$  ( $\pi$ ) foi desenvolvida por Arquimedes. Tal método usado é chamado de exaustão e consiste em calcular uma aproximação do valor de  $\pi$  ( $\pi$ ) por meio de polígonos com perímetros de mesma medida ao de uma circunferência.

A seguir traremos a construção tecida por (SILVA, 2022) na publicação do site Mundo Educação:

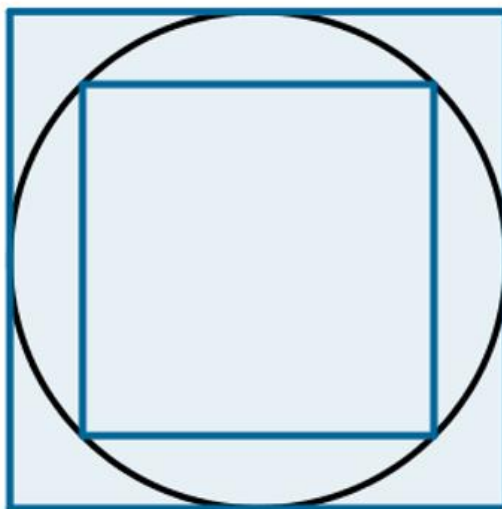
Primeiramente, constrói-se um quadrado inscrito de perímetro “P” e outro circunscrito de perímetro “p”. Ambos devem estar contidos em uma circunferência de raio r. Ao dividir o perímetro C da circunferência por seu diâmetro 2r, obtemos o valor de  $\pi$  ( $\pi$ ), assim Arquimedes construiu a seguinte desigualdade:

$$\frac{P}{2r} < \frac{C}{2r} < \frac{p}{2r}$$

$$\frac{P}{2r} < \pi < \frac{p}{2r}$$

Dessa forma,  $\pi$  é um número encontrado entre os perímetros do quadrado menor e do quadrado maior, ambos divididos pelo diâmetro (Figura 10).

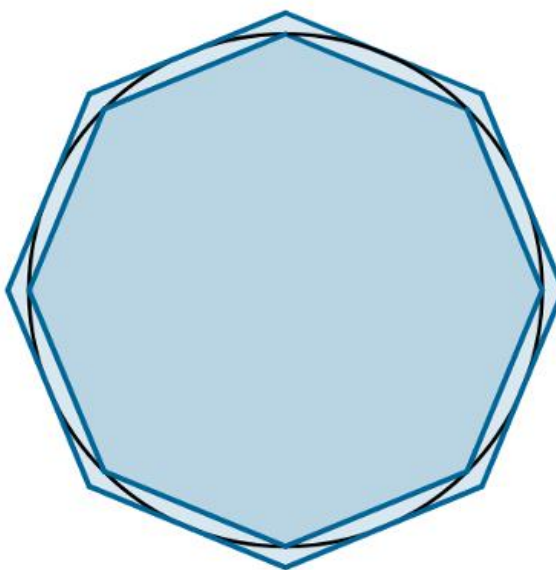
**Figura 10** – Quadrado inscrito e quadrado circunscrito na circunferência



Fonte: (SILVA, [2022])

O propósito é aumentar o número de lados dos polígonos, fazendo com que seu formato se aproxime do formato da circunferência, de modo que eles permaneçam regulares. Observe a seguir uma circunferência que inscreve e que circunscreve polígonos regulares com oito lados (Figura 11).

**Figura 11** – Octógono inscrito e octógono circunscrito na circunferência

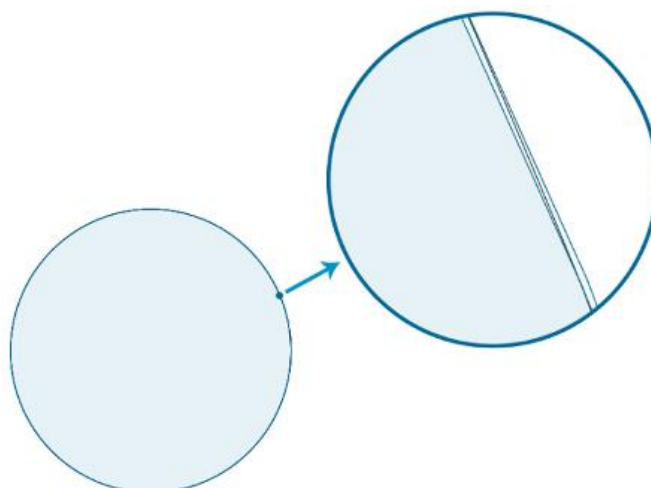


Fonte: (SILVA, [2022])

Observe que o perímetro dos polígonos se aproxima muito do perímetro da circunferência. Isso significa que utilizando a mesma desigualdade anterior para os perímetros dessas figuras obteremos uma aproximação muito melhor para o valor de  $\pi$  ( $\pi$ ).

Arquimedes fez esses cálculos para polígonos com 96 lados. Veja na Figura 12 a precisão dessa aproximação:

**Figura 12** – círculos com perímetros muito próximos à medida do comprimento da circunferência



Fonte: (SILVA, [2022])

Essa figura mostra que os dois polígonos têm o perímetro muito próximo à medida do comprimento da circunferência e, ao mesmo tempo, mostra por meio do zoom que um deles está inscrito e o outro circunscrito.

Na utilização da desigualdade anterior para aproximação de  $\pi$ , nesse caso, as medidas dos perímetros encontrados para os polígonos foram:

$$\frac{P}{2r} = \frac{22}{7} \text{ e } \frac{P}{2r} = \frac{223}{71}, \text{ ou seja: } \frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71}$$

Assim, temos:  $3,14285714 < \pi < 3,14084507$ .

Isto posto, partimos agora para os questionamentos da situação-problema, destacando, primeiramente, que não defendemos aqui que tais experimentos não sejam realizados, muito pelo contrário, é importante a utilização de atividades que enfatizem a construção dos conceitos matemáticos, porém, chamamos a atenção para o cuidado que se deve ter visto as limitações e implicações em torno do conceito de número irracional.

- **Questionamento 1:** Se o número  $\pi$  (pi) é irracional por que ele foi representado como razão de dois números inteiros?

Ao abordar de maneira empírica a existência dos números irracionais e, conseqüentemente, do número  $\pi$ , o professor pode deixar que ocorram lacunas na aprendizagem acerca de tal conhecimento e assim, constituir-se em obstáculos

epistemológicos de aprendizagem. A situação-problema proposta nos leva a indagar sobre a questão da coerência com a definição proposta.

De acordo com Bortoletto (2008), o número  $\pi$  é apresentado pela maioria dos livros e dos professores como sendo “número resultante de uma razão”, divisão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro. Muitos professores e autores de livros didáticos se referem ao número  $\pi$  como um número irracional ao mesmo tempo em que o definem como uma razão entre dois números. Esse tipo de apresentação esbarra na contradição já que sabemos que um número irracional é um número real que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros, ou seja, são números reais, mas não racionais. Esse tipo de equívoco acarreta obstáculos de aprendizagem em torno da definição de  $\pi$  (pi), além de não dar significado aos números irracionais, sendo estes explorados, muitas vezes, de forma superficial. Temos no PCN uma alerta sobre tal dificuldade:

Deve-se estar atento para o fato de que o trabalho com as medições pode se tornar um obstáculo para o aluno aceitar a irracionalidade do quociente entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, uma vez que ele já sabe que as medições envolvem apenas números racionais (BRASIL, 1998, p. 107).

Ao realizar atividades que abordam a construção do número  $\pi$  (pi), como a proposta anterior, primeiramente, o professor deve esclarecer que, por se tratar de um número irracional, sendo este infinito e não periódico, todos os valores envolvidos nas operações de divisão, serão aproximados, portanto, constituem-se em números racionais. Assim, faz-se necessário destacar que quando a medida do diâmetro de uma circunferência for um número racional, a medida do comprimento da circunferência será também um número racional, por isso a razão resulta num valor aproximado de  $\pi$ .

É importante esclarecer que inclusive em fórmulas de corpos redondos como, por exemplo, para calcular a medida da área de uma circunferência, o número  $\pi$  (pi) utilizado geralmente como 3,14, resultará em valores de área aproximados. Concluindo-se assim, que devido à limitação nos cálculos, quando o número irracional está representado como um número decimal infinito e não periódico, realizar as operações só se faz possível quando utilizamos uma aproximação para esses números.

- **Questionamento 2:** Aprendemos que os números irracionais são incomensuráveis, como é possível medir o número  $\pi$  ( $\pi$ )?

Este segundo questionamento esbarra na questão da incomensurabilidade dos números irracionais, e mais uma vez é importante esclarecer que os cálculos utilizados no experimento somente foram possíveis por meio das aproximações, pois os números irracionais são de fato incomensuráveis.

Nesse momento seria interessante o professor retomar com os estudantes a história da incomensurabilidade dos números irracionais recorrendo à diagonal do quadrado (ver problema 2), explicando que de acordo com evidências históricas, foram os próprios pitagóricos que descobriram grandezas incomensuráveis, provavelmente entre 450 a.C. e 400 a.C.; e, ao que tudo indica, isto se fez através de um argumento geométrico, demonstrando que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

É importante ressaltar com os estudantes que um número irracional era algo difícil de ser aceito pelos matemáticos naquela época. A descoberta da irracionalidade da  $\sqrt{2}$  despertou certa desordem acerca daquilo que conheciam a respeito dos números, principalmente a Pitágoras, causando um descrédito na visão de mundo que ele havia construído. Assim, as descobertas e discussões da época precisam ser ressaltadas para que os estudantes compreendam o desenvolvimento da ciência, e logo, dos conceitos matemáticos ao longo da história.

Seria importante também que o professor se atentasse ao fato de que  $\pi$  é um número transcendental, ou seja, um número que não é algébrico, que não pode ser obtido como raiz de um polinômio de coeficientes inteiros.

Sabemos que tal assunto é complexo para se trabalhar com estudantes dessa faixa etária, porém é relevante que o professor aborde com eles a existência de números transcendentais, explicando que dentro dos números reais, existem dois tipos de números: os racionais e os irracionais. Porém, existe também, uma outra separação, muito mais recente, dos números reais, em duas outras categorias sendo: os números algébricos e os números transcendentais.

Um número real se diz algébrico se satisfizer uma equação algébrica com coeficientes inteiros. Por exemplo, raiz quadrada de dois é um número algébrico porque satisfaz a equação “xis elevado ao quadrado menos dois é igual a zero”. Se um número não for algébrico, ele será transcendente.



A abordagem seria superficial, porém recorrendo à história em torno do conceito, talvez pudesse despertar maior interesse dos estudantes em querer saber mais sobre o assunto levantado.

- **Questionamento 3:** Se o número  $\pi$  (pi) é um valor constante, por que encontramos diferentes resultados?

Da mesma forma que nos questionamentos anteriores, é importante enfatizar a necessidade de o professor esclarecer que o experimento proposto na situação-problema não nos permite encontrar o valor exato para o número  $\pi$ , visto que: 1) os números utilizados foram valores aproximados, portanto utilizamos números racionais; 2) conforme a definição já tecida anteriormente, os números irracionais são incomensuráveis, portanto, para trabalhar com esse tipo de cálculo fazemos arredondamentos; 3) Os materiais disponíveis na escola não são apropriados para o desenvolvimento real de um experimento como esse, por exemplo, não possuímos uma régua calibrada e outros recursos que daria exatidão ao experimento, portanto, os resultados encontrados serão valores aproximados de  $\pi$ , explicando assim, a variação dos resultados.

Para tal entendimento é importante que o professor frise que atividades dessa natureza têm por objetivo o desenvolvimento de um trabalho com materiais concretos e experimentais. Quando fórmulas são simplesmente apresentadas aos estudantes sem a devida contextualização de seu surgimento, os aprendizes tendem a esquecer-las facilmente ou utilizá-las de maneira mecânica. Tais experimentos trazem uma narrativa que justifique seu surgimento e utilização.

Acreditamos que a compreensão em torno de um conceito é condição necessária para o desenvolvimento da aprendizagem, sobretudo de conceitos matemáticos que exigem maior capacidade de abstração para o seu entendimento. E dessa forma, propomos a utilização de alguns recursos que podem ser apresentados na construção do número  $\pi$ .

A primeira sugestão que elencamos seria o desenvolvimento do processo de Arquimedes, utilizando materiais disponíveis na escola, como régua, compasso e transferidor. Através dessa atividade, os estudantes poderão perceber que o valor de  $\pi$  se aproxima cada vez mais de 3,14... e mesmo que ele continue inscrevendo e circunscrevendo polígonos na circunferência, não descobrirá o valor exato de  $\pi$ .

Esse método poderá auxiliar em melhor fundamentação do conceito de número irracional.

Um outro recurso que sugerimos seria recorrer a história do número  $\pi$ . Segundo Bortoletto (2008), a utilização da história levaria o estudante a perceber que muitos homens, de diferentes nações e épocas, tentaram encontrar um valor racional para  $\pi$  e não conseguiram. Mesmo com o uso de computadores, que calculam milhões de casas decimais para o  $\pi$ , não se consegue provar sua racionalidade. Dessa forma, contextualizar a descoberta de  $\pi$  pelos processos de sua construção e as constantes indagações que existem acerca de sua irracionalidade poderiam despertar nos estudantes a visão humana e histórica da Matemática.

Uma terceira opção seria a utilização de *software* de geometria dinâmica (GeoGebra) explorando recursos tecnológicos com o intuito de verificar na prática que o valor do número  $\pi$  é constante e que ele se caracteriza como um número irracional, decimal infinito e não periódico.

Dessa forma, estando o professor munido da fundamentação teórica acerca do assunto será possível responder aos questionamentos dos estudantes. Além de ser interessante propor outras atividades que explorem com maior profundidade o conceito de irracionalidade do número  $\pi$ , oportunizando aos discentes conhecer alguns aspectos relevantes de sua aprendizagem, ao mesmo tempo em que mostre que o ensino de Matemática é importante, tanto pela construção do conhecimento de habilidades matemáticas, quanto pela sua compreensão enquanto instrumento de leitura histórico-social.

### **Situação 3**

**Objeto Matemático de estudo:** Conjuntos numéricos

**Público-alvo:** 1º Ano do Ensino Médio

**Relevância para a aprendizagem:**

É muito comum em materiais didáticos da Educação Básica abordar o tema “conjuntos numéricos” somente pela classificação dos números como sendo

elementos pertencentes a um determinado conjunto ou outro. Muitas vezes não há por parte destes materiais a construção de uma fundamentação teórica que esclareça aos professores e estudantes que essa tabulação numérica foi tecida ao longo dos anos e que os números não são elementos estáticos, sendo os conjuntos numéricos “criados” pela necessidade lógica das operações matemáticas fundamentadas por interações humanas.

É importante que no Ensino Médio tal tema seja tratado de maneira mais clara e aprofundada marcada pela construção de modelos estratégicos, conceitos, definições e procedimentos matemáticos que interpretem e resolvam problemas em diversos contextos, de modo a construir argumentação consistente.

Vale ressaltar que tal situação-problema tem como um dos objetivos destacar a importância de os estudantes compreenderem aspectos relevantes acerca deste conteúdo como, por exemplo, trabalhar a noção de infinito, de enumerabilidade e densidade dos conjuntos numéricos. Tal tema necessita de melhor exploração, haja vista a sua importância, sobretudo, no Ensino Superior, onde há a necessidade de uma fundamentação criteriosa de análise da Matemática que aproxime a compreensão dos processos de aprendizagem de Matemática produzida no âmbito escolar.

**Objetos do Conhecimento (BNCC):** Densidade dos conjuntos numéricos.

**Habilidades (BNCC):** (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

### Problema 3

Em uma aula de Matemática do Ensino Médio houve um debate entre os estudantes acerca da seguinte questão:

*Qual dos dois seguintes conjuntos têm mais elementos. O conjunto  $P$  formado por números pares, ou o conjunto  $N$  formado por números naturais?*

**O estudante A respondeu:**

*Os dois têm a mesma quantidade de elementos pois ambos são infinitos*

**O estudante B respondeu:**

*O conjunto  $P$  tem menos elementos do que  $N$ , pois o conjunto dos números naturais contém o conjunto dos números pares.*

Comente as respostas de cada um dos estudantes e acabe com o impasse justificando matematicamente a sua posição em relação ao debate.

### Orientações Didáticas

A seguir traremos algumas questões que poderão complementar o planejamento da pesquisa, bem como auxiliar o encaminhamento para a resolução da situação-problema. As questões poderão ser propostas pelo formador (tutor) caso não sejam levantadas pelos participantes. São elas:

- Qual a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos?
- Como mensurar a quantidade de elementos de um conjunto numérico?
- Qual a definição de infinito?

Assim, os professores ou futuros professores, organizados em grupos, indicarão as palavras ou termos desconhecidos para o início da pesquisa.

Nesse momento, o tutor poderá indicar a leitura de livros ou materiais didáticos existentes na escola, disponibilizando também a utilização de recursos como computadores com acesso à internet para a pesquisa em *sites* ou canais diversos. Seguem algumas recomendações:

- ✓ Análise Matemática para a licenciatura (ÁVILA, 1951).
- ✓ Curso de Análise (LIMA, 2004).
- ✓ Conceitos fundamentais da Matemática (CARAÇA, 1951).
- ✓ O Hotel de Hilbert. Disponível em: [https://youtu.be/pjOVHzy\\_DVU](https://youtu.be/pjOVHzy_DVU) . Dentre outros.

Para darmos início à discussão, é importante retomarmos com os estudantes os conceitos de número natural e número par.

Os números naturais  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$  são **números inteiros positivos** (não negativos) que se agrupam num conjunto chamado de  $\mathbb{N}$ , sendo este composto de infinitos elementos. Se um número é inteiro e positivo, podemos dizer que é um número natural.

Os números pares  $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$  são definidos por números que ao serem divididos por dois têm resto zero, ou seja, é um conjunto formado por números que são múltiplos de 2. Destacando que, tal conceito pertence aos números naturais, mas pode ser estendida aos inteiros.

Em seguida, para melhor compreensão, como premissa para a resolução do problema, traremos também o conceito de cardinalidade.

**Cardinalidade** é a medida do tamanho de um conjunto, e se tratando de um conjunto finito é o número de elementos do conjunto.

Assim, para tratarmos das resoluções, nos apoiaremos nas contribuições mais importantes ao estudo dos conjuntos infinitos de **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** (1845-1918) conhecido como o pai da teoria dos conjuntos.

**Teorema 1:** Dados os conjuntos  $X$  e  $Y$  e uma função bijetora  $f: X \rightarrow Y$ , um desses conjuntos é finito se, e somente se, o outro também é.

**Teorema 1.2:** Se  $Y$  é um conjunto finito então todo subconjunto próprio  $X \subset Y$  é finito.

**Definição 1:** Um conjunto  $X$  é dito infinito quando  $n$  não é finito. Isto é, se  $X$  não é vazio e não importando qual seja  $n \in \mathbb{N}$  não existe bijeção,  $f: I_n \rightarrow X$ .

**Exemplo 1:** O conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais é infinito. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , arbitrário, seja  $\varphi: I_n \rightarrow \mathbb{N}$  uma função qualquer e

$$p := \varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n)$$

No caso  $n = 1$ , se  $\varphi$  é injetora, então o conjunto imagem de  $\varphi$  tem um único elemento, logo,  $\varphi$  não pode ser sobrejetora. Se  $\varphi$  é sobrejetora, ela não pode ser injetora. No caso  $n = 1$ , então  $\varphi$  não pode ser bijetora. Suponha agora  $n \geq 2$ . Como  $\varphi(i) \in \mathbb{N}$ , para todo  $i \in I_n$ , então  $p \in \mathbb{N}$ . Além disso,  $p > \varphi(i)$ , para todo  $i \in I_n$ . Desse modo, a função  $\varphi$ , qualquer que seja ela, não é sobrejetora, pois  $p$  é natural e não é imagem de nenhum  $i \in I_n$ . Portanto, qualquer que seja  $\varphi$ , e qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi$  não é uma função bijetora. Pela Definição 1,  $\mathbb{N}$  é infinito.

Um critério para provarmos que o conjunto dos números naturais é infinito é a seguinte:

**Teorema 1.3:** Se um conjunto tem um subconjunto infinito, então ele também é um conjunto infinito. Prova: Seja  $W = X \cup Y$  e suponha que  $X$  é um conjunto infinito. Suponha, por absurdo, que  $W$  é um conjunto finito. Então, pelo Teorema 1.2, todo subconjunto de  $W$  é finito, o que contradiz a hipótese de que  $X$  é infinito. Logo,  $W$  não pode ser finito.

Para provarmos que o conjunto dos números pares também é infinito, temos:

**Teorema 1.4:** Dados os conjuntos  $X$  e  $Y$  e uma função bijetora  $f: X \rightarrow Y$ , um desses conjuntos é infinito se, e somente se, o outro também é.

**Prova:** Suponha  $X$  infinito e, por absurdo, que  $Y$  é finito. Pelo Teorema 1, então  $X$  também é finito, contradizendo a hipótese. Suponha que  $Y$  é infinito e, por absurdo, que  $X$  é finito. Pelo Teorema 1,  $Y$  é finito, contradizendo a hipótese.

Dessa forma, para esclarecer aos estudantes o impasse relativo à cardinalidade dos dois conjuntos numéricos, adotaremos as mesmas definições encontradas no livro do Rudin (1971).

**Definição 2.0.1:** Se existir uma função bijetora entre dois conjuntos A e B, dizemos que os conjuntos têm a mesma cardinalidade e escrevemos  $A \sim B$ .

- Note que a relação  $A \sim B$  é uma relação de equivalência, isto é, satisfaz as propriedades)  $A \sim A$  (propriedade reflexiva)
- (ii) Se  $A \sim B$  então  $B \sim A$  (propriedade simétrica)
- (iii) Se  $A \sim B$  e  $B \sim C$  então  $A \sim C$  (propriedade transitiva)

Por esse motivo, se dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, dizemos que eles são equivalentes, segundo Cantor (1845-1918).

**Exemplos 2.0.4:** (a) O exemplo mais simples de conjunto enumerável – e o que serve de modelo para essa ideia – é o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais.

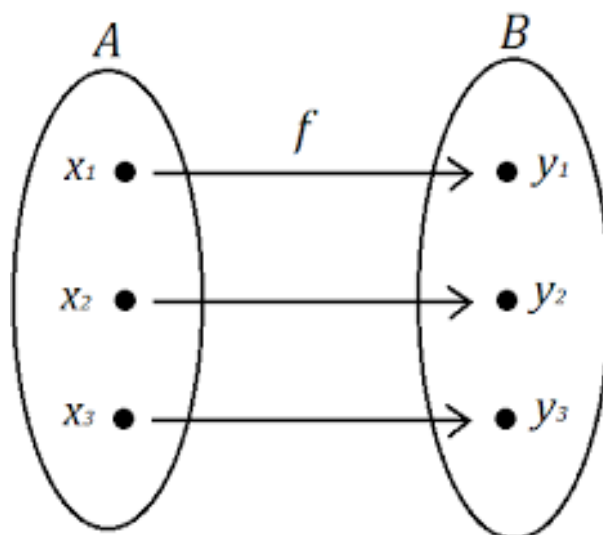
(b) O conjunto  $P = \{2, 4, 6, \dots\}$  dos números pares também é enumerável. Neste caso, é fácil ver que a função  $f: \mathbb{N} \rightarrow P$  dada por  $f(n) = 2n$  é bijetora.

Essa função pode ser dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par.} \\ \frac{n-1}{2} & \text{, se } n \text{ é ímpar e } n \neq 1. \end{cases}$$

Se observarmos o conjunto dado pela função  $\frac{n-1}{2}$ , sendo  $n$  ímpar e  $n \neq 1$ , logo veremos que haverá um correspondente no conjunto representado pela equação  $\frac{n}{2}$  sendo  $n$  par. Temos, assim, a função bijetora, também chamada de bijetiva, que relaciona elementos entre duas funções diferentes. Elas são compostas pela mesma quantidade de elementos, sendo alguns deles comuns entre si (Figura 13).

**Figura 13** – Diagrama- Função Bijetora



Fonte: (LESSA, 2006-2022).

Sendo assim, podemos utilizar o exemplo a seguir para discutirmos o impasse entre os estudantes:

**Exemplo 3:** Seja  $\mathcal{N}$  o conjunto dos números naturais e  $\mathcal{P}$  o conjunto dos números pares (positivos).

Intuitivamente o conjunto dos números pares têm bem menos elementos que o dos números naturais (já que este tem além destes, os números ímpares). Porém se correspondermos o 1 ao primeiro número par (o número 2), o número 2 ao segundo (4), 3 ao terceiro (6), e assim por diante, teremos uma correspondência biunívoca entre  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{P}$ :  $1 \leftrightarrow 2$ ,  $2 \leftrightarrow 4$ ,  $3 \leftrightarrow 6, \dots$ . Isto nos leva a concluir que, em se tratando de conjuntos infinitos, o todo e a parte podem ser equivalentes, o que não faz sentido no conjunto dos finitos (DUARTE, 2013, p. 10).

Isto posto, partimos agora para responder aos questionamentos iniciais:



– Qual dos dois seguintes conjuntos têm mais elementos. O conjunto  $P$  formado por números pares, ou o conjunto  $N$  formado por números naturais?

**Estudante A:** Os dois têm a mesma quantidade de elementos pois ambos são infinitos.

**Estudante B:** O conjunto  $P$  tem menos elementos do que  $N$ , pois o conjunto dos números naturais contém o conjunto dos números pares.

Embora o estudante A esteja correto em sua colocação, ao dizer que “o conjunto dos números pares e o conjunto dos números naturais têm o mesmo tamanho, pois ambos são infinitos”, faz-se necessário explorar a fundamentação teórica acerca da resposta, pois tal fala se apresenta como vaga e, de certa forma, intuitiva. É necessário que os estudantes consigam perceber a construção lógica da questão, percebendo assim que a colocação do estudante B está incorreta.

Como já vimos, é possível estabelecer correspondência bijetiva entre estes conjuntos, mesmo sendo os números pares subconjuntos dos números naturais. Logo eles têm a mesma cardinalidade. Isso poderia ser demonstrado através do Hotel de Hilbert, um experimento mental matemático sobre conjuntos infinitos, criado pelo matemático alemão David Hilbert.

Alguns paradoxos são bem famosos, como esse Paradoxo do Hotel de Hilbert (Hotel, 2022) que diz que um hotel com infinitos quartos sempre poderá receber infinitos hóspedes.

**Hotel de Hilbert** – Trata-se de um hotel que possui infinitos quartos individuais e que expõe a cada nova situação que se apresenta, aparentemente impossível de solucionar, uma nova ideia de pensar nos levando a ideia de infinitude na Matemática, tornando possível desmembrar novas soluções.

**1ª situação:** Chegam infinitos hóspedes querendo se hospedar.

**Solução:** Acomoda-se cada hóspede em um único quarto, sem problemas. Todos os quartos ficam ocupados.

**2ª situação:** Chega 1 hóspede e todos os quartos estão ocupados.

**Solução:** Acomoda-se este novo hóspede no quarto 1 e todos os outros, já acomodados, passam para o quarto  $n+1$ .

**3ª situação:** Chegam 10 hóspedes e todos os quartos estão ocupados.

**Solução:** Acomoda-se este novo hóspede no quarto 1 e todos os outros, já acomodados, passam para o quarto  $n+10$ .

**4ª situação:** Chegam infinitos hóspedes e todos os quartos estão ocupados.

**Solução:** Todos os hóspedes acomodados passam para o quarto  $2n$ , ficando livres todos os quartos ímpares!

**5ª situação:** Chegam 2 ônibus com infinitos hóspedes em cada, e todos os quartos estão ocupados.

**Solução:** Todos os hóspedes acomodados passam para o quarto  $3n$ , ficando livres todos os quartos não múltiplos de 3! Os integrantes do 1º ônibus ocuparão os quartos 1, 4, ...  $3n - 2$ . Os integrantes do 2º ônibus ocuparão os quartos 2, 5, ...  $n - 1$ .

**6ª situação:** Chegam infinitos ônibus com infinitos hóspedes em cada, e todos os quartos estavam ocupados.

**Solução:** Todos os hóspedes acomodados passam para o quarto  $2n$ , ocupando assim todos os quartos de potência 2. Os integrantes do 1º ônibus ocuparão os quartos  $3n$ . Os integrantes do 2º ônibus ocuparão os quartos  $5n$ . Os integrantes do 3º ônibus ocuparão os quartos  $7n$ . Ou seja, toma-se todos os números primos, que são infinitos, e para cada primo associa-se um ônibus, e cada integrante dos ônibus são alocados no quarto de número enésima potência do número primo correspondente.

Em todas as situações o gerente do Hotel consegue hospedar todos os novos visitantes e, além disso, no final, sobram infinitos quartos! (YOKOYAMA, 2016, p. 1).

Isto posto, o professor terá condições de explicar e mostrar por meio do experimento que os conjuntos dos números pares e dos números naturais possuem correspondência biunívoca de elementos, sendo assim possuem, portanto, a mesma cardinalidade.

### Situação 3.1

**Objeto Matemático de estudo:** Conjuntos numéricos

**Público-alvo:** 1º Ano do Ensino Médio

**Relevância para a aprendizagem:**

Ao abordar na Educação Básica, sobretudo no Ensino Médio, o conteúdo “conjuntos numéricos” há de se destacar a essencialidade de uma fundamentação teórica por parte do professor que esclareça aos estudantes a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos a partir de uma construção lógica de conhecimentos historicamente produzidos pela humanidade.

Trabalhar a definição dos números como elementos pertencentes a determinado conjunto apenas classificando-os, impede com que haja uma significação concreta em torno dessa discussão. É preciso oportunizar aos discentes o desenvolvimento de procedimentos matemáticos que justifiquem tais definições e conceitos.

Acreditamos que tal situação-problema possa constituir-se como momento de reflexão em torno do tema, possibilitando ao professor de Matemática explorar assuntos essenciais, porém pouco discutidos em materiais didáticos da Educação Básica como o conceito de infinito, a noção de cardinalidade, enumerabilidade e densidade dos conjuntos numéricos.

É importante que no Ensino Médio o conceito de número real seja tratado de maneira mais esclarecedora e aprofundada, visto que a apresentação desse conceito de forma superficial ou equivocada poderá constituir-se em obstáculos epistemológicos de aprendizagem, além de implicar diretamente no estudo das funções, conhecimento bastante importante tanto no Ensino Médio quanto na Educação Superior.

**Objetos do Conhecimento (BNCC):** Densidade dos conjuntos numéricos.

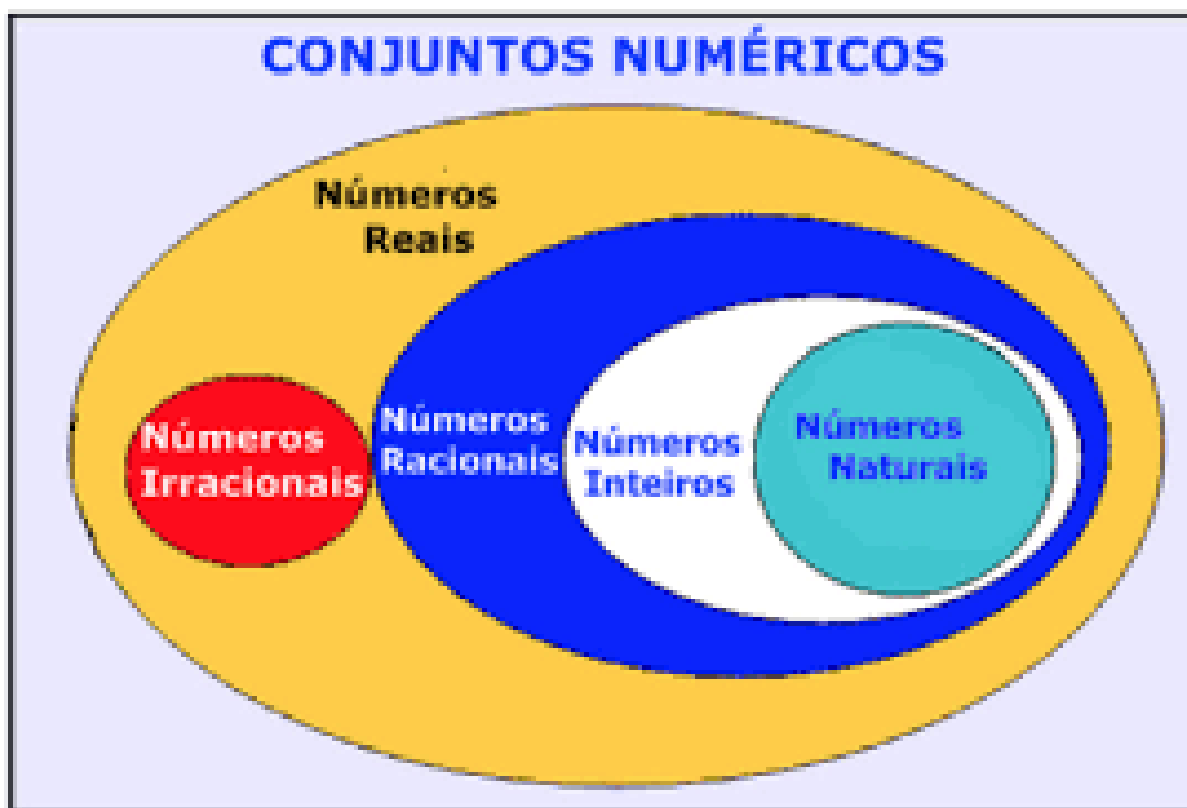
**Habilidades (BNCC):** (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

**Problema 3.1**

Um professor pediu a sua turma do Ensino Médio que pesquisasse conjuntos numéricos em livros de Matemática ou na internet, pois esse seria o tema da próxima aula. Alguns estudantes encontraram as seguintes imagens em *sites* e livros de matemática e, já no início da aula, perguntaram ao professor (Figuras 14 e 15):

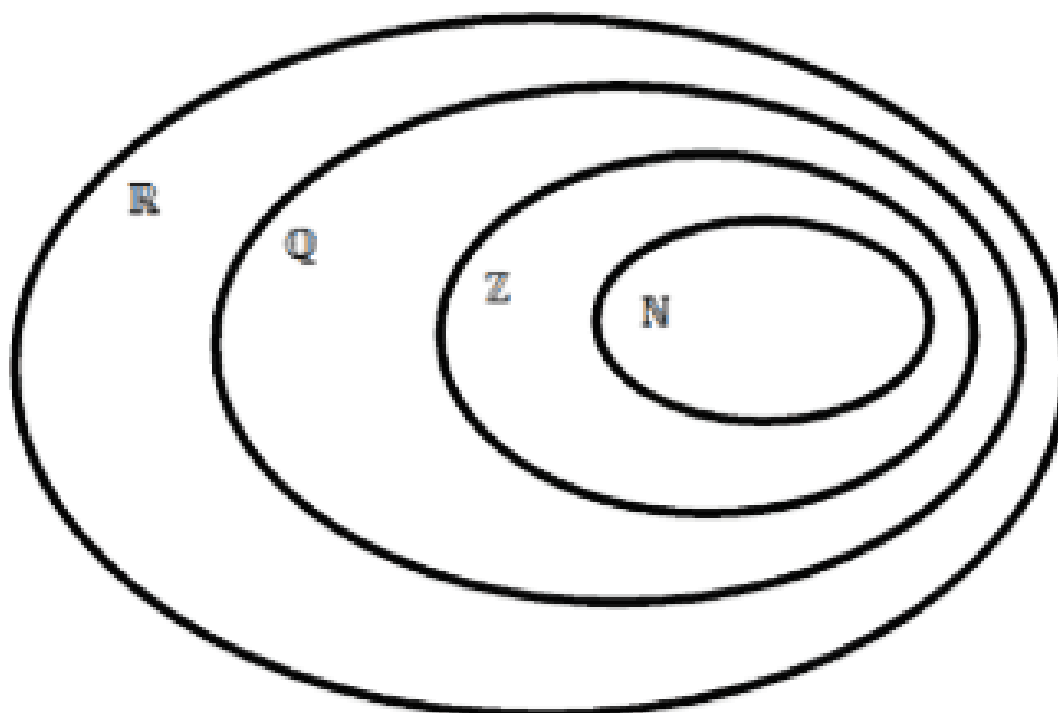
*Prof. podemos concluir que o conjunto dos números naturais é menor do que o conjunto dos números inteiros, que por sua vez é menor do que o conjunto dos números racionais, e esse menor do que o conjunto dos números reais?*

**Figura 14** – Diagrama 1 – conjunto dos números reais



Fonte: (Site alunos online *apud* DUARTE, 2013).

**Figura 15** – Diagrama 2 – conjunto dos números reais



Fonte: Elaborado pela Autora.

Como você responderia à pergunta feita pelos estudantes? Analise os diagramas e comente possíveis vantagens ou desvantagens em utilizá-los exatamente como foram propostos.

### **Orientações Didáticas**

A seguir, algumas orientações relevantes para a complementação e o planejamento de pesquisa para a resolução da situação-problema.

Inicialmente os professores ou futuros professores, organizados em grupos, irão indicar as palavras ou termos desconhecidos para iniciar a pesquisa.

Algumas questões poderão ser levantadas pelo formador (tutor), caso não sejam propostas pelos participantes. Por exemplo:

- Qual a definição de Cardinalidade?
- Como mensurar a quantidade de elementos de um conjunto numérico?
- Dê a definição de infinito.
- Quantos infinitos existem?

O tutor poderá indicar a leitura de livros ou materiais didáticos, bem como disponibilizar a utilização de recursos como computadores com acesso à internet existentes na escola. Seguem algumas indicações:

- ✓ A Matemática do Ensino Médio (LIMA, 2006).
- ✓ Conceitos fundamentais da Matemática (CARAÇA, 1951).
- ✓ Conjuntos numéricos (DUARTE, 2013).

Para iniciarmos a discussão, é importante que o professor destaque junto aos estudantes algumas definições, como, por exemplo, o conceito de Cardinalidade, explicando que a cardinalidade não diz respeito a um conjunto numérico em particular, ou seja, não é uma definição intrínseca ao conjunto. A definição de cardinalidade diz respeito à comparação que se faz entre dois conjuntos.

No estudo da Teoria de Conjuntos, um dos fatores bastante interessante é a cardinalidade, que consiste, no caso finito, no número de elementos que determinado conjunto possui. E no caso infinito, como não podemos contar seus elementos, é necessário classificá-los de acordo com a sua enumerabilidade.

### **Definição:**

Dois Conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade, se e somente se, existe uma BIJEÇÃO (Uma função  $f:A\rightarrow B$  que é bijetora, ou seja, esta função é Sobrejetora e Injetora ao mesmo tempo -  $f$  também de Biunívoca) entre A e B. Exemplo, se A e B são conjuntos finitos (com um número finito de elementos), então A e B têm a mesma cardinalidade se, e somente se, eles têm o mesmo número de elementos.

Esse seria um momento importante também para o professor explorar com os estudantes a respeito do conceito de infinito, um conceito que, apesar de fundamental para a ciência e muito falado, é pouco compreendido.

Os conjuntos com uma infinidade de elementos, também chamados de conjuntos infinitos, têm propriedades que muito intrigaram e surpreenderam os matemáticos ao longo da história. Num primeiro exame, essas propriedades parecem contraintuitivas. Mas, nesse caso, a intuição, em geral, é aquela formada a partir da experiência com os conjuntos finitos.

Para iniciarmos a discussão acerca das comparações, é importante trazermos as definições tecidas por Cantor (1845-1918), que desenvolveu trabalho fundamental sobre conjuntos infinitos, introduzindo o conceito de cardinalidade. Ele mostrou que há diferentes tipos de conjuntos infinitos, não sendo possível, em alguns deles, colocar seus elementos em sucessão (na forma de lista). Surgiram assim, os conceitos de conjunto enumerável e de conjunto não enumerável. Mais uma vez, nos deparamos com as definições de Cantor (1845-1918).

a) Um conjunto  $X$  é dito finito se é vazio ou se, para algum  $n$ , existe uma bijeção  $f: I_n \rightarrow X$ .

No último caso, dizemos que  $X$  tem cardinalidade  $n$ , isto é,  $X$  tem  $n$  elementos.

b) Se  $X$  não for finito, dizemos que  $X$  é infinito.

c) Um conjunto infinito  $X$  é dito enumerável se existe uma bijeção  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ .

Segundo Cantor, dois conjuntos,  $A$  e  $B$  tem a mesma cardinalidade quando é possível estabelecer correspondência biunívoca entre os elementos de  $A$  e os elementos de  $B$ . Isso equivale a dizer que existe bijeção entre  $A$  e  $B$ .

**Proposição 1.1.** Se  $f: X \rightarrow Y$  é injetiva e  $Y$  é enumerável, então  $X$  é finito ou enumerável.

Chamaremos de  $X$  o conjunto dos números Pares e  $Y$  dos números Ímpares. Como  $X$  e  $Y$  são enumeráveis, existem  $f: X \rightarrow \mathbb{N}$  e  $g: Y \rightarrow \mathbb{N}$  bijeções.

Definimos:

$$h: X \times Y \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$h(x, y) = (f(x), g(y))$$

Então  $h$  é injetiva. Como  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é enumerável, pela proposição 1.1, temos que  $X \times Y$  é enumerável.

**Proposição 1.2.** O conjunto  $I$  dos números inteiros positivos ímpares é enumerável. De fato,  $f: \mathbb{N} \rightarrow I; f(n) = 2n - 1$  é uma bijeção, como você pode visualizar no Quadro 3:

**Quadro 3** – Números inteiros positivos ímpares

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
↓		↓		↓		↓		↓		↓
1		3		5		7		9		11

**Nota:** Subconjuntos infinitos de conjuntos enumeráveis são enumeráveis.

Como já demonstrado no problema 3, para responder à questão em relação à quantidade de números entre um conjunto e outro, temos uma relação de correspondência biunívoca entre os elementos, sendo o número 1 ao primeiro número par (o número 2), o número 2 ao segundo (4), 3 ao terceiro (6), e assim por diante.

Dissemos no Problema 3 que, intuitivamente, podemos dizer que dois conjuntos  $A$  e  $B$  têm o mesmo número de elementos se podemos pôr os seus elementos em correspondência de um para um, e se é possível estabelecer uma bijeção entre esses conjuntos. Usando um raciocínio análogo, podemos dizer que um conjunto  $A$  tem um menor número de elementos que um conjunto  $B$  se a cada elemento de  $A$  podemos fazer corresponder (injectivamente) um elemento de  $B$ , mas não conseguimos fazer essa correspondência esgotando todos os elementos de  $B$ .

Dessa forma, partimos agora para responder ao questionamento inicial:



*– Podemos concluir que o conjunto dos números naturais é menor do que o conjunto dos números inteiros, que por sua vez é menor do que o conjunto dos números racionais, e esse menor do que o conjunto dos números reais?*

Segundo Duarte (2013), diagramas como os apresentados no problema somente induzem os estudantes a pensarem que os números racionais são a maioria dentre os números reais. Outra conclusão precipitada que os estudantes podem ter é a de que existam números reais que não são nem racionais e nem irracionais.

Sendo assim, é de suma importância que o professor destaque com os estudantes que o diagrama da Figura 14 é uma representação equivocada do conjunto dos números reais, pois além de trazer obstáculos de aprendizagem quanto à cardinalidade entre os conjuntos numéricos, também induz a pensamentos errôneos como, por exemplo, a existência de números que não são racionais, nem irracionais.

Ressaltamos, portanto, que o conjunto dos números Naturais, Inteiros e Racionais são enumeráveis. Diferente dos Reais, sendo este um conjunto não enumerável.

Intuitivamente, um conjunto é enumerável quando seus elementos podem ser “ordenados” em uma lista de modo que qualquer elemento do conjunto possa ser alcançado se avançarmos o suficiente nessa lista. Para entendermos melhor este conceito, vamos apresentar o seguinte exemplo. Dado o conjunto  $\{5,6,7\}$  podemos enumerar seus elementos colocando o 5 como o primeiro da lista, o 6 como o segundo e o 7 como o terceiro. De modo análogo, podemos estender este raciocínio para os conjuntos infinitos, por exemplo, se tomarmos o conjunto dos números inteiros negativos podemos enumerá-los pondo o  $-1$  como o primeiro elemento, o  $-2$  como o segundo e assim por diante. Note que, listar os elementos de um conjunto para caracterizá-lo como enumerável, significa que existe uma bijeção entre os elementos desse conjunto e o conjunto dos naturais que tomam nessa situação a função ordinal.

Um conjunto é considerado não enumerável, quando não é possível “contar” seus elementos, ou seja, quando não se consegue estabelecer relação biunívoca com os elementos do conjunto dos números naturais.

Quanto a cardinalidade, Cantor (1845-1918) generalizou a ideia de número de elementos de um conjunto, considerando como sendo de mesma cardinalidade (ou tendo o mesmo número cardinal) dois conjuntos entre os quais possa ser definida uma correspondência biunívoca. Se existe uma bijeção entre os conjuntos A e B, escreve-se  $\text{Card } A = \text{Card } B$ .

Assim, temos que o conjunto dos números inteiros tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números naturais. Isso porque é possível estabelecer uma relação biunívoca entre cada inteiro e cada natural. Podendo dizer, portanto, que eles possuem o mesmo tamanho.

Comparando agora os números inteiros com os racionais, podemos dizer que ambos são conjuntos enumeráveis, visto ser possível estabelecer uma bijeção com os números naturais. Porém, tais conjuntos possuem cardinalidades diferentes, o conjunto dos números racionais engloba o conjunto dos inteiros, os números decimais finitos e os números decimais infinitos periódicos chamados também de dízimas periódicas. Portanto, isso torna o conjunto dos números racionais relativamente maior do que o conjunto dos números inteiros.

Já em relação ao conjunto dos números racionais com os reais, temos que o conjunto dos números reais é extremamente maior que o conjunto dos números racionais, visto que esteja contido nele o conjunto dos números irracionais. Ocorre que os números irracionais são não enumeráveis, enquanto os racionais são enumeráveis. Em outras palavras, os irracionais possuem uma quantidade que não dá para contar, diferentemente dos racionais que possuem uma bijeção com os naturais e, por esse motivo, é possível contá-los. Essa condição, de ter contido nele um conjunto não enumerável, faz com que o conjunto dos números reais também seja um conjunto não enumerável. Assim, concluímos que o Conjunto dos Números reais é maior que o conjunto dos números racionais, conseqüentemente maior que os inteiros e, portanto, maior que os naturais.

## 4 CONSIDERAÇÕES

Neste estudo realizamos uma investigação do tipo bibliográfica/exploratória acerca das potencialidades da utilização de uma metodologia de ensino ativa, a Aprendizagem Baseada em Problemas, voltada para a formação de professores de Matemática, buscando evidenciar a reflexão sobre os pensamentos de alguns estudiosos que fundamentaram os temas acerca de três eixos: PBL, formação de professores e Números Reais.

A pesquisa traz, no primeiro momento, características a respeito da PBL, acreditando ser possível promover a aprendizagem através de preceitos como: autonomia, protagonismo, convivência em grupo, responsabilidade social e dinamismo.

Após analisarmos os fundamentos teóricos da PBL, verificamos que pelo seu aspecto colaborativo e proativo, tal metodologia parece possuir grande potencial para explorar situações-problemas no âmbito matemático relacionando o contexto escolar e a sociedade.

Mediante seu aspecto interdisciplinar, observamos que a PBL aparece como boa alternativa para a formação integral do estudante, contribuindo não só no sentido de inserção do conhecimento profissional, mas também para uma formação integral, contemplando o desenvolvimento cognitivo, intelectual, atitudinal e socioemocional.

Vimos também que trabalhar as competências socioemocionais é algo preponderante para a formação docente, levando em consideração os desafios enfrentados na profissão, sendo primordial tolerar pressões, angústias e frustrações. Dessa forma, buscamos articular a contribuição da PBL para o desenvolvimento da inteligência emocional.

Entendemos que, através das contribuições teóricas, que a utilização da PBL voltada à formação de professores parece satisfazer o desenvolvimento da relação entre os aspectos teóricos e práticos, estabelecendo conexão fundamental entre o pensar e o fazer, que se dá através da reflexão constante sobre a práxis transformadora.

Dessa forma, pontuamos a necessidade do resgate da autonomia e valorização do professor, oportunizando a ele espaços de formações contínuas e

significativas, momentos de diálogos com seus pares, melhores condições de trabalho e salários, e participação efetiva nas tomadas de decisão.

A fim de fundamentar o conceito dos Números Reais, foram apresentados estudos desenvolvidos no âmbito do assunto que, além de contribuir para o entendimento dos desafios a serem enfrentados pelos estudantes da Educação Básica, também foram fundamentais para estruturar a sequência didática composta por situações-problemas direcionadas à professores e futuros professores de Matemática.

Buscou-se nesta pesquisa validar a articulação entre o conceito de número real e as suas diversas aplicações entre os eixos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria. evidenciando o conceito de Número Real a partir da definição formal da representação decimal, provando que todo número real admite uma representação decimal infinita e que a representação decimal dos irracionais é infinita e não periódica, com o intuito de proporcionar ao professor e ao licenciando em Matemática, alternativas para melhor definir sua atuação profissional.

É importante haver na formação do professor de Matemática a exploração de assuntos essenciais, porém, pouco discutidos em materiais didáticos da Educação Básica como, por exemplo, o conceito de infinito, a noção de cardinalidade, enumerabilidade e densidade dos conjuntos numéricos. Para isso, se faz necessário que o conceito de número real seja tratado de maneira mais esclarecedora e aprofundada, visto que a apresentação desse conceito de forma superficial ou equivocada poderá constituir-se em obstáculos epistemológicos de aprendizagem, além de implicar diretamente no estudo das funções, conhecimento bastante importante tanto no Ensino Médio quanto na Educação Superior.

Destacamos também, a necessidade de identificar e intervir, com os estudantes da Educação Básica, nas possíveis dificuldades e lacunas na aprendizagem em torno de tal conceito antes do nível universitário.

As principais possibilidades para a elaboração da proposta constituem-se em propiciar um momento de formação a partir da reflexão coletiva, de maneira a explorar uma metodologia ativa ao mesmo tempo em que se busca aprofundar o ensino-aprendizagem acerca do conceito dos números reais.

Os principais desafios foram, primeiramente, fundamentar a conexão em torno dos três eixos: PBL, formação de professores e números reais, buscando articular discussões favoráveis aos temas. Em segundo, temos a não aplicação da

nossa proposta de trabalho devido ao afastamento pela pandemia da Covid-19 e, por fim, elaborar situações-problema que explorassem o conceito de número real utilizando-se da fundamentação teórica da disciplina de Matemática num viés acessível a estudantes da Educação Básica, buscando aproximar a Matemática aplicada com aquela produzida no âmbito escolar.

Dentro de nova visão de Educação, compatível com as necessidades da sociedade atual, vem à tona a urgência em criar ambientes favoráveis ao ensino, capazes de motivar os estudantes a se engajarem em prol do conhecimento numa perspectiva transformadora e emancipatória.

Nesse viés, as contribuições de Blikstein (2010) reforçam as nossas conjecturas, ao citar o potencial dos estudantes e as possíveis transformações que poderiam trazer à sociedade se os conhecimentos produzidos na escola estivessem em consonância com a sua vida e os seus sonhos:

É uma tragédia ver, a cada dia, milhares de alunos sendo convencidos de que são incapazes e pouco inteligentes simplesmente porque não conseguem se adaptar a um sistema equivocado. A situação é particularmente cruel em nossas escolas públicas, porque para esses alunos a escola é um dos poucos locais de contato com a cultura formal e a ciência (BLIKSTEIN, 2010, p. 2).

E nesta perspectiva, é possível afirmar que também acreditamos no potencial dos estudantes. E para isso, pontuamos incansavelmente a urgência em investimentos sérios e de qualidade capazes de reestruturar o projeto de Educação Pública no Brasil.

Entendemos que necessitamos de representantes que tenham um olhar minucioso capaz de identificar os reais problemas da nossa Educação, agindo em direção a ações que promovam transformação social favorável em âmbito educacional, com pautas emancipatórias e democráticas, capazes de ressignificar o papel da escola e, sobretudo, formar cidadãos que tenham acesso aos mais altos níveis de escolaridade.

Por fim, compreendemos que, em relação aos problemas advindos de políticas públicas educacionais, com muita esperança, seguiremos resistindo e lutando. Porém, quanto aos fatores que nos compete relacionados a intervenções diretas, referentes a se ter iniciativas em inovar, propomos a implantação de ações educativas e metodológicas, a fim de contribuir com o desenvolvimento integral dos

nossos estudantes partindo do pressuposto de que, se engajados e comprometidos com a sua formação, serão capazes de intervir transformando a sua realidade e, conseqüentemente, o mundo.

## REFERÊNCIAS

ABED, A. L. Z. **O desenvolvimento das habilidades socioemocionais como caminho para aprendizagem e o sucesso escolar de alunos da educação básica**. São Paulo: Ministério da Educação e Cultura – Conselho Nacional de Educação, 2014.

ALARCÃO, I. **Professores reflexivos em uma escola reflexiva**. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

ALBUQUERQUE, L.; GONTIJO, C. A complexidade da formação do professor de matemática e suas implicações para a prática docente. **Revista Espaço Pedagógico**, Passo Fundo, v. 20, n. 1, p. 76-87, jan./jun., 2013. Disponível em: <http://seer.upf.br/index.php/rep/article/view/3508/2293>. Acesso em: 6 ago. 2022.

ÁVILA, G. S. S. **Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais**. RPM 5, Brasília, SBM, 1984.

ÁVILA, G. S. S. **Análise Matemática para licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2006.

BARREIRO, I. M. F.; GEBRAN, R. A. **Prática de ensino e estágio supervisionado na formação de professores**. São Paulo: Avercamp, 2006.

BARROWS, H. S. Problem-based learning in medicine and beyond: a brief overview. *In*: WILKERSON, L.; GIJSELAERS, W. H. (eds.). **Bringing problem-based learning to higher education: theory and practice**. San Francisco: Jossey-Bass, 1996. p. 3-12.

BARROWS, H. S. **Problem-based learning (PBL)**. New York, 2001. Disponível em: <http://www.pbli.org/pbl>. Acesso em: 5 ago. 2022.

BARTH, B. M. **O saber em construção**: para uma pedagogia da compreensão. Lisboa: Instituto Piaget, 1993.

BARTOLOMEU, V. S. **Conhecimentos e dificuldades dos estudantes do ensino médio relacionados ao conjunto dos números reais**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

BERBEL, N. A. N. A problematização e a aprendizagem baseada em problemas: diferentes termos ou diferentes caminhos? **Interface – Comunicação, Saúde, Educação**, Botucatu, v. 2, n. 2, p. 139-134, Fev., 1998. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1414-32831998000100008>. Acesso em: 5 ago. 2022.

BÍBLIA. Salmos. Português. *In*: Bíblia Sagrada Online. Site Bíblia do cristão, 2020. Disponível em: <https://www.bibliadocristao.com/salmos/32/8#:~:text=8-,Instruir%2Dte%2Dei%2C%20e%20ensinar%2Dte%2Dei,ei%20com%20os%20meus>

[%20olhos.&text=N%C3%A3o%20sejais%20como%20o%20cavalo,n%C3%A3o%20se%20cheguem%20a%20ti](#). Acesso em: 30 jul. 2022.

BIGODE, A. L. **Matemática Atual**. São Paulo: Atual, 1994.

BLIKSTEIN, P. O mito do mau aluno e porque o Brasil pode ser o líder mundial de uma revolução educacional. Site Blikstein.com, 25 jul. 2010. Disponível em: [http://www.blikstein.com/paulo/documents/books/Blikstein-Brasil\\_pode\\_ser\\_lider\\_mundial\\_em\\_educacao.pdf](http://www.blikstein.com/paulo/documents/books/Blikstein-Brasil_pode_ser_lider_mundial_em_educacao.pdf). Acesso em: 31 jul. 2022.

BOROCHOVICIUS, E.; TORTELLA, J. C. B. Aprendizagem Baseada em Problemas: um método de ensino-aprendizagem e suas práticas educativas. **Revista Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação**, Rio de Janeiro, v. 22, n. 83, p. 263-294, abr./jun. 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0104-40362014000200002>. Acesso em: 31 jul. 2022.

BORTOLETTO, A. R. S. **Reflexões relativas às definições do número  $\pi$  (PI) e à presença da sua história em livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental**. Orientadora: Maria Guiomar Carneiro Tomazello. 2008. 139 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências Humanas, Universidade Metodista de Piracicaba, 2008. Disponível em: [http://iepapp.unimep.br/biblioteca\\_digital/down.php?cod=NDUx](http://iepapp.unimep.br/biblioteca_digital/down.php?cod=NDUx). Acesso em: 6 ago. 2022.

BRANDÃO, C. R. **Aprender o amor: sobre um afeto que se aprende a viver**. Campinas, SP: Papirus, 2005.

BRASIL. **Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014**. Aprova o Plano Nacional de Educação – PNE e dá outras providências. Brasília/DF: Presidência da República, 2014. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/ato2011-2014/2014/lei/l13005.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/ato2011-2014/2014/lei/l13005.htm). Acesso em: 31 jul. 2022.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: Presidência da República, 20 dez. 1996. Disponível em: [https://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/l9394.htm](https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm). Acesso em: 6 ago. 2022.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (3.º e 4.º ciclos do Ensino Fundamental)**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Parecer Texto referência formação de professores**. Brasília, DF: MEC/CNE, 2019. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/setembro-2019/124721-texto-referencia-formacao-de-professores/file>. Acesso em: 24 set. 2022.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Paris, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BRUNER, J. S. **O Processo da Educação**. 3. ed. São Paulo: Nacional, 1973.



CAMPOS, S.; MARTINS, R.; CHAVES, C.; MARTINS, C.; CRUZ, C. Inteligência emocional: percepções de professores de educação especial. **Atas: investigação qualitativa em educação**, v. 1, p. 218-226, jun. 2016. Disponível em: <https://proceedings.ciaiq.org/index.php/ciaiq2016/article/view/606/595>. Acesso em: 6 ago. 2022.

CANDAU, V. M. (org.). **Reinventar a Escola**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2000.

CANDAU, V. M. (org.). **Reinventar a escola**. 9. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

CAPRARA, A. A Construção Narrativa de Problemas. *In*: MAMEDE, S.; PENAFORTE, J. C. (org.). **Aprendizagem baseada em problemas**: anatomia de uma nova abordagem educacional. São Paulo: Hucitec/ESP-CE, 2001.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

COELHO, M. G. **O crescimento emocional beneficia a supervisão pedagógica?** Orientadora: Daniela Gonçalves. 2013. 127 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação) – Escola Superior de Educação de Paula Frassinetti, Porto, 2013. Disponível em: [http://repositorio.esepf.pt/bitstream/20.500.11796/1275/1/TM-ESEPF-EE\\_2013\\_TM-ESEPF-SUP17.pdf](http://repositorio.esepf.pt/bitstream/20.500.11796/1275/1/TM-ESEPF-EE_2013_TM-ESEPF-SUP17.pdf). Acesso em: 5 ago. 2022.

COSTA, L. V. O. **Números Reais no Ensino Fundamental**: alguns obstáculos epistemológicos. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

CYRINO, E. G.; TORALLES-PEREIRA, M. L. Trabalhando estratégias de ensino aprendido por descoberta na área da saúde: a problematização e a aprendizagem baseada em problemas. **Caderno Saúde Pública**, Rio de Janeiro, v. 20, n. 3, p. 780-788, maio/jun., 2004. Disponível em: [https://www.scielo.org/article/ssm/content/raw/?resource\\_ssm\\_path=/media/assets/csp/v20n3/15.pdf](https://www.scielo.org/article/ssm/content/raw/?resource_ssm_path=/media/assets/csp/v20n3/15.pdf). Acesso em: 31 jul. 2022.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 10. ed. Campinas, SP: Papyrus, 2003.

D'ANTONIO, S. R.; ARAÚJO, N. S. R.; PAVANELLO, R. M. Formação em matemática: uma breve reflexão a respeito do curso de licenciatura da Universidade Estadual de Maringá – UEM. **Revista Eletrônica de Educação Matemática (Revemat)**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 122-145, 2012. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/25336/1/Antonio2012Forma%C3%A7%C3%A3o.pdf>. Acesso em: 6 ago. 2022.

DELISLE, R. **Como Realizar a Aprendizagem Baseada em Problemas**. Lisboa, Portugal: Edições ASA, 2000.

DEWEY, J. **Como Pensamos**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

DEWEY, J. **Democracia e Educação**. Introdução à Filosofia da Educação. 4. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979.

DIAS, M. S. **Reta real**. Conceito imagem e conceito definição. Orientadora: Sonia Barbosa Camargo Iglioni. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002. Disponível em: [http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos\\_teses/MATEMATICA/Dissertacao\\_MarisaDias.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Dissertacao_MarisaDias.pdf). Acesso em: 6 ago. 2022.

DOMINGUES, I. **O coordenador pedagógico e o desafio da formação contínua do docente na escola**. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

DORIGON, T. C.; ROMANOWSKI, J. P. A reflexão em Dewey e Schön. **Revista Intersaberes**, Curitiba, ano 3, n. 5, p. 8-22, jan/jul, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.22169/revint.v3i5.123>. Acesso em: 31 jul. 2022.

DUARTE, C. E. L. **Conjuntos numéricos**. 2013. 41 f. Dissertação (Mestrado em Álgebra; Análise matemática; Ensino de matemática; Geometria e topologia; Matemática Aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

ENEMARK, S.; KJAERSDAM, F. A ABP na Teoria e na Prática: A experiência de Aalborg na inovação do projeto no ensino Universitário. *In*: ARAÚJO, U. F. E.; SASTRE, G. **Aprendizagem baseada em Problemas**. São Paulo: Summus, 2009.

ESTRELA, M. T. A formação contínua entre a teoria e a prática. *In*: FERREIRA, N. S. C. (org.). **Formação Continuada e Gestão Escolar**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2006.

ESCRIVÃO FILHO, E.; RIBEIRO, L. R. C. Aprendendo com PBL - aprendizagem baseada em problemas: relato de uma experiência em cursos de engenharia da EESC-USP. **Revista Minerva**, v. 6, n. 1, p. 23-30, 2009. Disponível em: [http://www.fipai.org.br/Minerva%2006\(01\)%2003.pdf](http://www.fipai.org.br/Minerva%2006(01)%2003.pdf). Acesso em: 5 ago. 2022.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, v. 3, n. 1, p. 1-36, JAN./JUN. 1995. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877/15035>. Acesso em: 6 ago. 2022.

FIORENTINI, D.; SOUZA E MELO, G. F. Saberes docentes: Um desafio para acadêmicos e práticos. *In*: GERALDI, C. (org.). **Cartografias do trabalho docente: Professor(a)-pesquisador(a)**. Campinas: Mercado das Letras, ALB, 1998.

FIORENTINI, D.; CASTRO, F. C. Tornando-se professor de matemática: o caso de Allan em prática de ensino e estágio supervisionado. *In*: FIORENTINI, D. (org.). **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003. p. 121-156.

FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (org.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática: investigando e teorizando a partir de prática**. São Paulo: Musa, 2004.

FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. Introdução: investigando e teorizando a partir da prática a cultura e o desenvolvimento de professores que ensinam matemática. *In*: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (org.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática**. São Paulo: Musa, 2005. p. 7-17.

FIORENTINI, D. A pesquisa e as práticas de formação de professores de matemática em face das políticas públicas no Brasil. **Bolema - Unesp**, Rio Claro, ano 21, n. 29, p. 43-70, 2008. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1718>. Acesso em: 31 jul. 2022.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FISCHBEIN, E.; JEHIAN, R.; COHEN, D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. **Educational Studies in mathematics**, Boston, v. 29, p. 29-44, 1995. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01273899>. Acesso em: 31 jul. 2022.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Apostila. Fortaleza: UEC, 2002.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia** – saberes necessários à prática educativa. 29. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 12. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1999.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. 58. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2014.

FÜRKOTTER, M.; MORELATTI, M. R. M. A articulação entre teoria e prática na formação inicial de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 9, n. 2, p. 319-334, 2007. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/906/599>. Acesso em: 24 set. 2022.

GARCIA BLANCO, M. M. A formação inicial de professores de Matemática: Fundamentos para a definição de um curriculum. *In*: FIORENTINI, D. (org.). **Formação de professores de Matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003. p. 51-86.

GARCIA, M. C. **Formação de Professores**: Para uma mudança educativa. Lisboa: Porto, 1999.

GARCIA, S.; ABED, A.; SOARES, T.; RAMOS, M. **O prazer de ensinar e de aprender**: contribuições de uma metodologia no aprimoramento das práticas

pedagógicas. São Paulo: Mind Lab Brasil & INADE, 2013. Disponível em: [www.mindlab.com.br](http://www.mindlab.com.br). Acesso em: 8 ago. 2022.

GATTI, B. A.; NUNES, M. M. R. (org.). **Formação de professores para o ensino fundamental**: estudo de currículos das licenciaturas em pedagogia, língua portuguesa, matemática e ciências biológicas. São Paulo: FCC/DPE, 2009. v. 29. (Coleção Textos FCC).

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GIL, A. C. **Didática do ensino superior**. São Paulo: Atlas, 2008.

GIROUX, H. A. **Os professores como intelectuais**: rumo a uma pedagogia crítica da aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

GLASGOW, N. A. **New Curriculum for New Times**: A Guide to Student Centered Problem-based Learning. California: Thousand Oaks: Corwin Pres Inc., 1996.

GOLEMAN, D. **Inteligência emocional**: a teoria revolucionária que redefine o que é ser inteligente. Rio de Janeiro: Objetiva, 1995.

GOLEMAN, D. **Trabalhando com a Inteligência Emocional**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

HARGREAVES, A. **Professores em tempo de mudança**: o trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna. Alfragide: McGraw-Hill, 1998.

HMELO-SILVER, C. E.; BARROWS, H. S. Goals and strategies of a PBL facilitator. **Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning**, v. 1, n. 1, p. 21-39, 2006. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.7771/1541-5015.1004>. Acesso em: 8 ago. 2022.

HOTEL de Hilbert. Projeto: M3 - Vídeo. Criação e coordenação geral: Sarah Yakhni. Roteirista: Patrícia Roman. Campinas, SP: Unicamp, 2012. 1 vídeo (10 min). Disponível em: <https://youtu.be/BsS0Kt1f8QY>. Acesso em: 10 out. 2022.

IGLIORI, S.; SILVA, B. Concepções dos alunos sobre Números Reais. *In*: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (org.). **Educação Matemática**: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, 2001. p. 39-67.

IMBERNÓN, F. **Formação docente e profissional**: formar-se para a mudança e a incerteza. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2005. 119 p.

IMPA. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Georg Cantor (1845-1918): **pai do infinito e do ICM**. 15 dez. 2017. Disponível em: <https://impa.br/noticias/georg-cantor-1845-1918-pai-do-infinito-e-do-icm/>. Acesso em: 06 ago. 2022.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA [IBGE]. Agência IBGE Notícias. **PNAD Educação 2019**: Mais da metade das pessoas de 25 anos ou mais não completaram o ensino médio. Site Agência IBGE Notícias, 2020. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de->

[noticias/releases/28285-pnad-educacao-2019-mais-da-metade-das-pessoas-de-25-anos-ou-mais-nao-completaram-o-ensino-medio#:~:text=O%20atraso%20ou%20abandono%20escolar,tinham%20conclu%C3%A9do%20o%20ensino%20obrigat%C3%B3rio](https://noticias/releases/28285-pnad-educacao-2019-mais-da-metade-das-pessoas-de-25-anos-ou-mais-nao-completaram-o-ensino-medio#:~:text=O%20atraso%20ou%20abandono%20escolar,tinham%20conclu%C3%A9do%20o%20ensino%20obrigat%C3%B3rio). Acesso em: 12 set. 2022.

IOCHIDA, L. C. **Os sete passos**. São Paulo: Universidade Federal de São Paulo/Escola Paulista de Medicina/Departamento de Medicina, 2001. Disponível em: [https://cisama.sc.gov.br/assets/uploads/90c54-os\\_sete\\_passos.pdf](https://cisama.sc.gov.br/assets/uploads/90c54-os_sete_passos.pdf). Acesso em: 5 ago. 2022.

KENSKI, V. M. Novas tecnologias: o redimensionamento do espaço e do tempo e os impactos no trabalho docente. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 8, p. 58-71, Mai/Jun/Jul/Ago. 1998. Disponível em: [http://anped.tempsite.ws/novo\\_portal/rbe/rbedigital/RBDE08/RBDE08\\_07\\_VANI\\_MO REIRA\\_KENSKI.pdf](http://anped.tempsite.ws/novo_portal/rbe/rbedigital/RBDE08/RBDE08_07_VANI_MO REIRA_KENSKI.pdf). Acesso em: 6 ago. 2022.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. Campinas, SP: Papirus, 2003. (Série Prática Pedagógica).

KONRAD55\_2020. Ei, você é bom em Matemática, não é? Site iFunny, 22 apr. 2020. Disponível em: <https://br.ifunny.co/picture/ei-voce-e-bom-em-matematica-isso-e-entao-me-Cem37kSb7?s=cl>. Acesso em: 6 ago. 2022.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A Construção do Saber**: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Belo Horizonte: UFMG, 1997.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. *In*: JANVIER, C. (ed.). **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987. p. 33-40.

LESSA, J. R. **Função Injetora**. Site Infoescola, 2006-2022. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/funcao-injetora/>. Acesso em: 7 ago. 2022.

LOPES, R. C. S. **A relação professor-aluno e o processo ensino e aprendizagem**. Paraná: Dia a Dia da Educação, 2009. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1534-8.pdf>. Acesso em: 6 ago. 2022.

LIBÂNEO, J.C. **Organização e Gestão da Escola**: Teoria e Prática, 5. ed. Goiânia: Alternativa, 2004.

LIMA, E. L. Deve-se usar máquina calculadora na escola? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 7, p. 20-22, 1985.

LIMA, E. L. **Análise Real**. IMPA, CNPq, 1997.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro, 2006. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2012a. v. 1.

LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro, IMPA, 2012b. v. 1. (Coleção Matemática Universitária).

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem na escola**: reelaborando conceitos e recriando a prática. 2. ed. Salvador: Malabares, 2005. 115 p.

MacDONALD, R. Problem-based learning: implications for educational developers. **Educational Developments**, v. 2, n. 2, p. 1-5, 2001.

MAMEDE, S. Aprendizagem Baseada em Problemas: Características, Processos e Racionalidade. *In*: MAMEDE, S.; PENAFORTE, J. C. (org.). **Aprendizagem baseada em problemas**: anatomia de uma nova abordagem educacional. São Paulo: Hucitec/ESP-CE, 2001.

MASETTO, M. T. PBL na Educação. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENDINO – ENDIPE, 12., 2004, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: Champagnat, 2004. v. 2. p.181-189.

MAYER, J. D.; SALOVEY, P. What is emotional intelligence? *In*: SALOVEY, P.; SLUYTER, D. J. (org.). **Emotional development and emotional intelligence**: Implications for Educators. New York: Basic Books, 1997.

MENNIN, S.; MAJOOR, G. **Aprendizagem baseada em problemas – ABP**. Tradução Gladis B. Angel; Regina H. P. Mennin. The Network – Towards Unity for Health – Position Paper, 2002. Disponível: [http://www.thenetworktufh.org/publications\\_resources/positioncontent.asp?id=7&t=Position+Paper](http://www.thenetworktufh.org/publications_resources/positioncontent.asp?id=7&t=Position+Paper). Acesso: 26 out. 2019.

MERCADO, L. P. L. **Formação continuada de professores e novas tecnologias**. Maceió: EDUFAL, 1999.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO [MEC]. **Base Nacional Comum Curricular – versão final**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em: 30 jul. 2022.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO [MEC]. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CP nº 2, de 9 de junho de 2015**. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial e Continuada dos Profissionais do Magistério da Educação Básica. Brasília, DF: MEC/CNE, 2015. Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=17625-parecer-cne-cp-2-2015-aprovado-9-junho-2015&category\\_slug=junho-2015-pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=17625-parecer-cne-cp-2-2015-aprovado-9-junho-2015&category_slug=junho-2015-pdf&Itemid=30192). Acesso em: 6 ago. 2022.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO [MEC]. Conselho Nacional de Educação. Conselho Pleno. **Parecer CNE/CP nº 2, de 20 de dezembro de 2019**. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação

Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação). Brasília, DF: MEC/CNE/CP, 2019. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2019-pdf/135951-rcp002-19/file>. Acesso em: 6 ago. 2022.

MIZUKAMI, M. G. N.; REALI, A. M. M. R.; REYES, C. R.; MARTUCCI, E. M.; LIMA, E. F.; TANCREDI, R. M. S. P.; MELO, R. R. **Escola e aprendizagem da docência: processos de investigação e formação**. São Carlos: EdUFSCar, 2002.

MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. Algumas reflexões sobre o ensino de Matemática. *In*: MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. **A Matemática e os temas transversais**. São Paulo: Moderna, 2001. p. 21-42.

NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. Tradução R. WATANABE. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

NÓVOA, A. (org.). **Os professores e sua formação**. Lisboa: D. Quixote, 1992. 158p.

NÓVOA, A. Formação de professores e profissão docente. *In*: NÓVOA, A. (coord.). **Os professores e a sua formação**. 2. ed. Lisboa: Dom Quixote, 1995. p.15-33.

OLIVEIRA, G. A. **Números Irracionais e Transcendentes**. Orientador: João Carlos Ferreira Costa. 2015. 84 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Profissional em Rede Nacional) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2015. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/127674/000844541.pdf?sequence=1&isAllowed=>. Acesso em: 6 ago. 2022.

PAIVA, M. A. V. Saberes do professor de matemática: uma reflexão sobre a licenciatura. **Educação Matemática em Revista**, ano 9, ed. esp., p. 95-104, mar. 2002.

PENTEADO, C. B. **Concepções do professor do Ensino Médio relativas à densidade dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade**. Orientador: Benedito Antonio da Silva. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11180>. Acesso em: 6 ago. 2022.

PEREIRA, J. E. D. As licenciaturas e as novas políticas educacionais para a formação docente. **Educação & Sociedade**, Campinas, ano XX, n. 68, p. 109-125, dezembro de 1999. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/es/v20n68/a06v2068.pdf>. Acesso em: 6 ago. 2022.

PEREZ, G. O pensamento prático do professor: a formação do professor como profissional reflexivo. *In*: NÓVOA, Antonio (org.). **Os professores e sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1995.

PERRENOUD, P. **Dez Novas Competências Para Ensinar**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.

PIERINI, R.; LOPES, R. M.; ALVES, N. G. Um referencial pedagógico da aprendizagem baseada em problemas. *In*: LOPES, R. M.; SILVA FILHO, M. V.; ALVES, N. G. **Aprendizagem baseada em problemas: fundamentos para a aplicação no ensino médio e na formação de professores**. Rio de Janeiro: Publiki, 2019. Disponível em: [https://www.researchgate.net/profile/Renato-Lopes-17/publication/333458314\\_APRENDIZAGEM\\_BASEADA\\_EM\\_PROBLEMAS\\_FUNDAMENTOS\\_PARA\\_A\\_APLICACAO\\_NO\\_ENSINO\\_MEDIO\\_E\\_NA\\_FORMACAO\\_DE\\_PROFESSORES/links/5cef0c8e4585153c3da53b9e/APRENDIZAGEM-BASEADA-EM-PROBLEMAS-FUNDAMENTOS-PARA-A-APLICACAO-NO-ENSINO-MEDIO-E-NA-FORMACAO-DE-PROFESSORES.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Renato-Lopes-17/publication/333458314_APRENDIZAGEM_BASEADA_EM_PROBLEMAS_FUNDAMENTOS_PARA_A_APLICACAO_NO_ENSINO_MEDIO_E_NA_FORMACAO_DE_PROFESSORES/links/5cef0c8e4585153c3da53b9e/APRENDIZAGEM-BASEADA-EM-PROBLEMAS-FUNDAMENTOS-PARA-A-APLICACAO-NO-ENSINO-MEDIO-E-NA-FORMACAO-DE-PROFESSORES.pdf). Acesso em: 6 ago. 2022.

PINHEIRO, N. A. M. **Educação crítico-reflexiva para um ensino médio científico-tecnológico: a contribuição do enfoque CTS para o ensino-aprendizagem do conhecimento matemático**. 2005. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

PONTE, J. P. Investigar a nossa própria prática. *In*: GTI (ed.). **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, 2002. p. 5-28.

PONTE, J. P. Da formação ao desenvolvimento profissional. *In*: APM (ed.). **Actas do ProfMat 98**. Lisboa: APM, 1998, p. 27-44.

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, Lisboa, v. 2, p. 93-169, 2003. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/4071>. Acesso em: 31 jul. 2022.

RAMOS, A. M. **Números Reais: Conceitos e Representações**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo, 2014.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

RIBAS, A. F. Las líneas maestras del aprendizaje por problemas. **Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado**, Zaragoza, España, v. 18, n. 1, p. 79-95, 2004. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/274/27418106.pdf>. Acesso em: 5 ago. 2022.

RIBEIRO, L. R.; MIZUKAMI, M. G. Uma implementação da aprendizagem baseada em problemas (PBL) na pós-graduação em engenharia sob a ótica dos alunos. **Semina: Ciências Sociais e Humanas**, Londrina, v. 25, n. 1, p. 89-102, 2004. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/10fc/9829fc680a740871a957c61dc7b09c9dba1d.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2022.



RIBEIRO, L. R. C. **A aprendizagem baseada em problemas (PBL):** uma implementação na educação em engenharia na voz dos atores. 2005. 209 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.

RIBEIRO, L. R. C. **Aprendizagem baseada em problemas (PBL):** uma experiência no ensino superior. São Carlos: EdUFSCar, 2008.

ROBINET J. Les réels: quels modèles ont les élèves? **Educ Stud Math**, Paris, v. 17, n. 4, p. 359-386, 1986. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF00311325>. Acesso em: 31 jul. 2022.

RUDIN, W. **Princípios de análise matemática.** Tradução E. R. H. Brito. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971. 296 p.

SANTOS, D.; PRIMI, R. **Desenvolvimento socioemocional e aprendizado escolar:** uma proposta de mensuração para apoiar políticas públicas. São Paulo: Instituto Ayrton Senna, 2014.

SANTOS, J. P. O. **Introdução à Teoria dos Números.** Rio de Janeiro: IMPA, 2020. (Coleção Matemática Universitária).

SANTOS, A. S. **Um estudo sobre o Conceito de Densidade do conjunto dos Números Racionais e do conjunto dos Números Irracionais:** uma abordagem com tecnologias. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

SANTOS, M. L. **Aplicação do Problem Based Learning (PBL):** uma percepção dos coordenadores dos cursos de Ciências Contábeis. 2014. 119 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Cont. Atuariais) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista.** São Paulo: SEDUC, 2020.

SARGIANI, R. **Fases iniciais da aprendizagem da leitura e da escrita em português do Brasil:** efeitos de fonemas, gestos articulatórios e sílabas na aquisição do mapeamento ortográfico. Orientadora: Maria Regina Maluf. 213 f. 2016. Tese (Doutorado em Psicologia) – Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/47/47131/tde-07102016-182310/publico/Sargiani.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2022.

SAVIANI, D. **História das ideias pedagógicas no Brasil.** 2. ed. Campinas-SP: Autores Associados, 2008.

SCHMIDT, H. G. Foundations of problem-based learning: some explanatory notes. **Medical Education**, Limburg, v. 27, n. 5, p. 422-432, 1993. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2923.1993.tb00296.x>. Acesso em: 31 jul. 2022.

SCHMIDT, H. G. *et al.* Problem-based learning is compatible with human cognitive architecture: commentary on Kirschner, Sweller, and Clark. **Educational Psychologist**, v. 42, n. 2, p. 91-97, 2007.

SCHÖN, D. A. **Educando o profissional reflexivo**: um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

SILVA FILHO, M. *et al.* Como preparar os professores brasileiros da educação básica para a aprendizagem baseada em problemas. PBL, 2010, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo, 2010. p. 8-12.

SILVA, B. A.; IGLIORI, S. B. C. O que número real para estudantes que iniciam a Universidade? E para os que a finalizam? CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 1998, Caracas. **Anais [...]**. Caracas: Universidade Nacional da Venezuela, 1998.

SILVA, B. A.; PENTEADO, C. B. Concepções de professores do ensino médio do Brasil a respeito da densidade do conjunto dos números reais. *In*: REUNIÃO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA DO CONE SUL, 8., 2006, Águas de Lindóia. **Anais [...]**. Águas de Lindóia, 2006.

SILVA, B. A.; PENTEADO, C. B. Fundamentos dos Números Reais: Concepções de Professores e Viabilidade de Início do Estudo da Densidade no Ensino Médio. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 11, n. 2, p. 351-371, 2009. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1860/1808>. Acesso em: 6 ago. 2022.

SILVA, J. C. M. Formação continuada dos professores: visando a própria experiência para uma nova perspectiva. **Revista Iberoamericana de Educación**, Madrid, v. 55, n. 3, p. 1-11, 2011. Disponível em: <https://rieoei.org/historico/expe/3882Martins.pdf>. Acesso em: 6 ago. 2022.

SILVA, L. P. M. **Valor de Pi**. Site Mundo Educação, [2002]. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/valor-pi.htm#:~:text=Publicado%20por%20Luiz%20Paulo%20Moreira%20Silva>. Acesso em: 6 Ago. 2022.

SIROTIC, N.; ZAZKIS, R. Irrational Numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 65, n. 1, p. 49-76, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9041-5>. Acesso em: 6 ago. 2022.

SOARES, E. F. E.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Números reais: concepções dos licenciandos e formação Matemática na licenciatura. **Zetetiké**, Campinas, v. 7, n.12, p. 95-117, jul/dez. 1999. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646776>. Acesso em: 6 ago. 2022.

SOARES, M. A. **Aplicação do método de ensino problem based learning (PBL) no curso de ciências contábeis**: um estudo empírico. Orientadora: Aplicação do método de ensino problem based learning (PBL) no curso de ciências contábeis: um estudo empírico. 2008. 214 p. Dissertação (Mestrado em Controladoria e Contabilidade) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2008. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/96/96133/tde-19052008-134942/publico/MaraAlvesSoares.pdf>. Acesso em: 5 ago. 2022.

SOLARI, O. M. Aprendizaje basado en problema (PBL): Beneficios y riesgos. **Geotrópico online**, Bogotá, v. 2, n. 2, p. 51-60, Dezembro de 2004. Disponível em: [http://www.geotropico.org/2\\_2\\_Muniz-Solari.pdf](http://www.geotropico.org/2_2_Muniz-Solari.pdf). Acesso em: 6 ago. 2022.

SORDI, M. R. L.; BAGNATO, M. H. S. Subsídios para uma formação profissional crítico-reflexiva na área da saúde: o desafio da virada do século. **Revista Latino-Americana de Enfermagem**, Ribeirão Preto/SP, v. 6, n. 2, p. 83-88, 1998. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0104-11691998000200012>. Acesso em: 31 jul. 2022.

SOUSA, S. O. **Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL–Problem-Based Learning)**: Estratégia para o ensino e aprendizagem de algoritmos e conteúdos computacionais. Orientador: Klaus Schlünzen Junior. 2011. 251 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2011. Disponível em: [https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/96471/sousa\\_so\\_me\\_prud.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/96471/sousa_so_me_prud.pdf?sequence=1&isAllowed=y). Acesso em: 6 ago. 2022.

SOUZA, D. V. **O Ensino de Noções de Cálculo Diferencial e Integral por meio da Aprendizagem Baseada em Problemas**. 2016. 159 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2016.

SOUZA, J. S. **Números Reais**: um corpo ordenado e completo. 2013. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na área do ensino básico de Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

TANGERINO, L. I. **Reflexões acerca do uso da Aprendizagem Baseada em Problemas no Ensino de Matemática em um Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio**. 2017. 143 f. Orientador: Rogério Ferreira da Fonseca. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2017.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

TERRIEN, J. Os Saberes da Racionalidade Pedagógica na Sociedade Contemporânea. **Revista Educativa**, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 67-81, jan./jun., 2006. Disponível em: <http://seer.pucgoias.edu.br/index.php/educativa/article/view/75/71>. Acesso em: 6 ago. 2022.

TIBA, I. **Disciplina**: limite na medida certa. Novos paradigmas. São Paulo: Integrare, 2006.

VÁZQUEZ, A. S. **Filosofia da práxis**. Tradução de Luiz Fernando Cardoso. 2. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1977. 454 p.

WEDDERHOFF, E. Educação emocional: Um novo paradigma pedagógico? **Revista Linhas**, Florianópolis/SC, v. 2, n. 1, p. 1-8, jul. 2001. Disponível em: <https://www.revistas.udesc.br/index.php/linhas/article/view/1299/1110>. Acesso em: 6 ago. 2022.

WOODS, D. R. **Problem-based Learning**: How to Gain the Most from PBL. Hamilton: McMaster University, The Bookstore, 2000.

WOOD, E. J. **Problem-based learning**. Acta Biochimica Polonica, v. 51, n. 2, p. 21-26, 2004a.

WOOD, E. J. **Problem-based learning**: exploiting knowledge of how people to promote effective learning. Bioscience Education, v. 3, may 2004b.

YOKOYAMA, L. A. Há infinitos maiores que outros? ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo, 2016.

ZABALA, A. A avaliação da aprendizagem no currículo escolar: uma perspectiva construtivista. *In: O construtivismo na sala de aula*. Tradução Cláudia Schilling. São Paulo: Ática, 2006.

ZAMBIANCO, D. P. **As competências socioemocionais**: pesquisa bibliográfica e análise de programas escolares sob a perspectiva da psicologia moral. Orientadora: Telma Pileggi Vinha. 2020. 544 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2020. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/Busca/Download?codigoArquivo=456479>. Acesso em: 6 ago. 2022.