INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

Sequência Didática

Um caminho para o Ensino do conceito de Números Reais

Elisandra dos Reis Nunes

Orientador: Armando Traldi Junior

São Paulo (SP)
2022

Ficha catalográfica

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

```
n972c      , Elisandra dos Reis Nunes
              Um caminho para o ensino do conceito de
           números reais  / Elisandra dos Reis Nunes . São
           Paulo: [s.n.], 2022.
              58 f.

              Orientador: Armando Traldi Junior

              Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de
           Ciências e Matemática) - Instituto Federal de
           Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP,
           2022.

              1. Aprendizagem Baseada Em Problemas (pbl). 2.
           Formação de Professores . 3. Números Reais . I.
           Instituto Federal de Educação, Ciência e
           Tecnologia de São Paulo II. Título.
CDD 510
```

Produto Educacional apresentado como requisito para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus São Paulo. Aprovado em banca de defesa de mestrado no dia 13/06/2022.

AUTORES

Elisandra dos Reis Nunes: Licenciada em Matemática pelas Faculdades Integradas em Ciências Humanas, Saúde e Educação de Guarulhos e Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP). Atualmente é professora de Matemática do Ensino Fundamental e Médio no Estado de São Paulo.

Armando Traldi Junior: Possui graduação e bacharelado em Ciência da Computação (1994) e licenciatura em Matemática (2000) pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC (SP); mestrado em Educação Matemática (2002) e doutorado em Educação Matemática (2006). Atualmente é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP). Atua na área de ensino com ênfase em Educação Matemática. Pesquisa sobre o tema: formação de professores e desenvolvimento curricular de Matemática.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

Apresentação do Produto Educacional

Esse material, apresentado como Produto Educacional, é resultado da pesquisa intitulada “A Aprendizagem Baseada em Problemas: Formação de Professores de Matemática” desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), sob orientação do Professor Doutor Armando Traldi Junior.

Nosso Produto Educacional consiste em uma sequência didática composta por seis situações-problemas relacionadas ao conceito dos Números Reais e Orientações Didáticas para a Formação de Professores de Matemática.

Introdução

Apresentamos como produto educacional a sequência didática composta por situações-problemas nos moldes da Aprendizagem Baseada em Problemas (*Problem Based Learning, PBL*) a partir da nossa dissertação intitulada "A Aprendizagem Baseada em Problemas: formação de Professores de Matemática".

A elaboração desse material apresenta sugestões de situações-problemas contextualizadas que buscam articular uma aproximação entre a realidade dos professores de Matemática e algumas dificuldades ou lacunas na aprendizagem dos estudantes da Educação Básica em torno do Conceito dos Números Reais. Destacamos que o caráter desses problemas é de fim aberto e mal estruturado e são direcionados à professores e licenciandos em Matemática, adotando como metodologia de ensino a Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL.

Para melhor compreensão sobre a elaboração das situações-problemas propostas sugerimos a leitura na íntegra da dissertação, pois trata-se de um estudo que pontua a necessidade de uma formação docente num viés crítico, reflexivo e sobretudo, emancipatório, resultando em um material direcionado a professores de Matemática que tenham interesse em trabalhar com uma metodologia de ensino ativa e diferenciada, buscando associar o desenvolvimento de competências conceituais, procedimentais, atitudinais e socioemocionais ao mesmo tempo em que possibilita aprofundar o ensino acerca dos Números Reais.

Exibimos seis problemas no formato da PBL, com orientações didáticas que auxiliam no desenvolvimento das resoluções que podem ser adaptados conforme a realidade dos cursos de formação docente ao qual estão vinculados, além de considerar a experiência profissional proveniente de cada professor/formador.

Um caminho para o Ensino do conceito dos Números Reais

1 Situações-problemas relacionadas ao conceito dos Números Reais e Orientações Didáticas para a Formação de Professores de Matemática

De acordo com as considerações tecidas na dissertação, desenvolvemos situações-problemas que abordam o conceito dos Números Reais. Tais situações-problema foram elaboradas nos moldes da PBL e serão destinadas a professores e futuros professores de Matemática da Educação Básica.

O conjunto dos Números Reais é um objeto de estudo extremamente explorado no Ensino Fundamental e Médio, o seu aprendizado é de total pertinência, tanto aos estudantes, que necessitam construir com clareza o conhecimento acerca desse conceito, quanto aos professores, que necessitam ter total domínio para articular tal conteúdo às práticas cotidianas.

No decorrer da pesquisa, discutimos a importância do desenvolvimento das competências socioemocionais na formação docente, visto os desafios enfrentados na profissão, sendo primordial tolerar pressões, angústias e frustações. Da mesma forma, destacamos a necessidade em se trabalhar as competências socioemocionais como algo preponderante para a formação integral do estudante.

Nessa perspectiva, é essencial que os atores envolvidos tenham conhecimento a respeito dos cinco constructos do Big Five (habilidades socioemocionais elencadas por pesquisadores em cinco grandes domínios) a fim de associá-los aos preceitos educacionais da PBL:

- ✓ **Openness** (Abertura a experiências). Diz respeito ao interesse do estudante pelas experiências, no sentido de estar disposto e interessado, desenvolvendo habilidades como a curiosidade, a imaginação, a criatividade e o prazer pelo aprender.
- ✓ **Conscientiousness** (Conscienciosidade). Se refere à organização por parte do estudante, ao esforço e a responsabilidade pela própria aprendizagem, tendo como características fundamentais a perseverança, a autonomia, a autorregulação e o controle da impulsividade.

- ✓ **Extraversion** (Extroversão). Traz o compromisso de orientar os interesses e energia para o mundo exterior dos estudantes, desenvolvendo assim, a autoconfiança, a sociabilidade e o entusiasmo.
- ✓ **Agreeableness** (Amabilidade - Cooperatividade). Apresenta as competências de atuação em grupo de forma cooperativa e colaborativa, com o desenvolvimento de habilidades como a tolerância, a simpatia e o altruísmo.
- ✓ **Neuroticism** (Estabilidade emocional). Se refere a mostrar previsibilidade e consistência nas reações emocionais, apresentando habilidades como autocontrole, calma e serenidade.

Como já exposto, a metodologia de ensino adotada, difere do ensino convencional. Sendo assim, é de fundamental importância que os participantes envolvidos tenham conhecimento a respeito das características e objetivos da PBL. Que estejam cientes de que todo o processo se dá por meio de mediações e possíveis consultorias, sendo exigido dos participantes, a consciência de que a construção da aprendizagem se dá de forma autodirigida, ocorrendo também, através da interação entre os pares.

Para iniciarmos o processo, os docentes e futuros docentes serão organizados em grupos pequenos, em torno de quatro ou cinco integrantes. Devem eleger um coordenador e um relator (ou secretário). O coordenador atua como líder, encarregado de pontuar os diálogos entre o grupo. Já o relator tem a função de registrar os levantamentos mais importantes das reuniões, além de distribuir as tarefas a cada um dos membros. É preciso que haja rotatividade entre os participantes do grupo para que todos tenham a oportunidade de atuar nos diferentes papéis.

Propomos a aplicação da metodologia seguindo os sete passos:

1. Distribuição e leitura do problema e identificação dos termos desconhecidos;
2. Interpretação e discussão do texto. Identificação do problema central e das palavras-chave;
3. Levantamento do conhecimento prévio com formulação de hipóteses (brainstorm);

4. Resumo das hipóteses possíveis elaborando uma síntese da discussão;
5. Elaboração dos objetivos de aprendizagem e identificação das estratégias de pesquisa a serem percorridas;
6. Pesquisa e elaboração individual concernentes aos objetivos propostos;
7. Retorno, integração das informações e resolução do caso.

Alguns aspectos gerais também precisam ser esclarecidos. Existem três aspectos que são elementares em uma dinâmica de trabalho com a PBL. São eles: a análise do problema e o planejamento da pesquisa; o desenvolvimento das ações que levarão à resolução do problema; a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios (ARAÚJO; ARANTES, 2009 *apud* SOUZA, 2016, p. 79). Sendo assim, veremos detalhadamente cada um dos aspectos citados.

1.1 Análise do problema e o planejamento da pesquisa

É nessa etapa que o formador irá apresentar aos docentes ou futuros docentes, uma visão mais geral sobre a situação-problema proposta, levando-os a analisar a condução de problemas próximos às suas realidades profissionais. Para isso é necessário fazerem a leitura coletiva do problema, analisar o seu contexto e registrar as possíveis palavras ou termos desconhecidos para que sejam pesquisados posteriormente.

É importante nessa fase, despertar o interesse pelo problema e observar lacunas que deverão ser preenchidas, indicando a necessidade de estudos e pesquisas acerca dos temas abordados. Assim, os grupos deverão se organizar para o desenvolvimento de ações e trocas de experiências entre os membros da equipe. Parte-se, então, para a realização de um mapeamento, a busca de informações sobre o problema, a elaboração de hipóteses e as definições das estratégias.

1.2 Desenvolvimento das ações para a resolução do problema

Nessa etapa ocorre o desenvolvimento de estudos, pesquisas e intervenções do formador para o encaminhamento das resoluções do problema. Pode ocorrer também, possíveis consultorias de outros professores ou profissionais de outras áreas.

As dinâmicas das aulas no formato da PBL são marcadas, geralmente, por vários encontros entre os integrantes do grupo, para que possam abrir espaços de discussões acerca do problema, oportunizando o surgimento de indagações, o levantamento de hipóteses e o planejamento de planos de ação. As pesquisas também são fundamentais nesse momento, pois através delas os integrantes farão os embasamentos teóricos necessários para compartilharem suas descobertas e informações com todos os membros da equipe para a tomada de decisões.

O professor formador atua como tutor, realiza orientações, analisa as interpretações e possibilita encaminhamentos a respeito da resolução do problema. O tutor também faz intervenções das dificuldades que possam surgir, tanto em relação aos conhecimentos gerais como ao comportamento que cada grupo possa apresentar de conhecimentos incompatíveis com a resolução do problema.

1.3 Socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios

Na última etapa do trabalho com problemas nos moldes da PBL, destacamos a necessidade da socialização por meio do compartilhamento dos conhecimentos produzidos através da apresentação de seminários aos demais grupos e ao tutor.

Para esse momento, propõe-se a construção de um relatório acadêmico-científico destacando a trajetória do projeto desenvolvido, as pesquisas realizadas e os resultados obtidos ao final da proposta.

É importante ressaltar também sugestões sobre o processo de avaliação dos encontros.

> Araújo e Arantes (2009) sugerem como avaliações a produção e análise de relatórios, uma nota seria atribuída a um relatório científico parcial e a outra faria referência ao relatório científico final. Realizada uma média entre ambas, tem-se, então, a média final de cada estudante. Segundo esses autores, para que esses relatórios sejam elaborados, cada um deles deve compor as avaliações de todos os envolvidos no processo. Ou seja, no relatório parcial, deve constar a avaliação do tutor, a autoavaliação do estudante e a avaliação que o grupo faz de cada membro da equipe (SOUZA, 2016, p. 81).

Levemos em consideração também a nota a ser atribuída pela participação dos integrantes durante os momentos de tutoria, o envolvimento nas discussões e a apresentação dos seminários no momento da institucionalização.

Como a nossa proposta de trabalho é voltada a professores e futuros professores de Matemática, sugerimos também como um dos quesitos avaliativos, a construção de planos de aula voltados a estudantes da Educação Básica, com as devidas orientações didáticas que levarão ao desenvolvimento da resolução de cada situação-problema.

Destacamos que durante as reuniões de aplicação da metodologia, haverá discussões entre os integrantes do grupo e a participação do tutor, que pontuará as intervenções e trará devolutivas acerca dos conhecimentos adquiridos e apresentados pelos participantes. Por fim, ocorrerá o momento de validação das soluções, sendo este a abertura para a exposição das ideias, a troca de experiências entre todos os grupos e a finalização exposta pelo tutor.

A seguir serão apresentadas sugestões de situações-problemas e as devidas orientações didáticas mais específicas para cada resolução.

2 Situações de Aprendizagem – Aprendizagem Baseada em Problemas

2.1 Noções sobre Números Reais

Situação 1

Objeto Matemático de estudo: Números Racionais

Público-alvo: 8° Ano do Ensino Fundamental

Relevância para a aprendizagem:

Fundamentar o conceito de número racional é de extrema importância na Educação Básica, visto sua pertinência e utilização no contexto diário dos estudantes em situações que estão implícitas a relação de parte e todo, o cálculo com frações e números decimais. Nesta situação-problema, abordaremos a dízima periódica, com o objetivo principal de diagnosticar se os estudantes conseguiram ampliar seus conceitos a respeito dos conjuntos numéricos, em específico, compreendendo conceitualmente que todo número racional pode ser escrito como uma dízima periódica e, ainda, ter o conhecimento de que sempre é possível representar um racional como a soma de infinitas frações.

Ao apresentar as dízimas periódicas em um desenvolvimento formal e discutir questões que envolvem este assunto no âmbito do ensino básico, destaca-se também outro objetivo, que é desenvolver junto ao professor do Ensino Fundamental e Médio, uma relação de proximidade entre a fundamentação teórica da disciplina de Matemática aplicada e a matemática produzida no seio escolar, analisando a relação entre frações e dízimas periódicas.

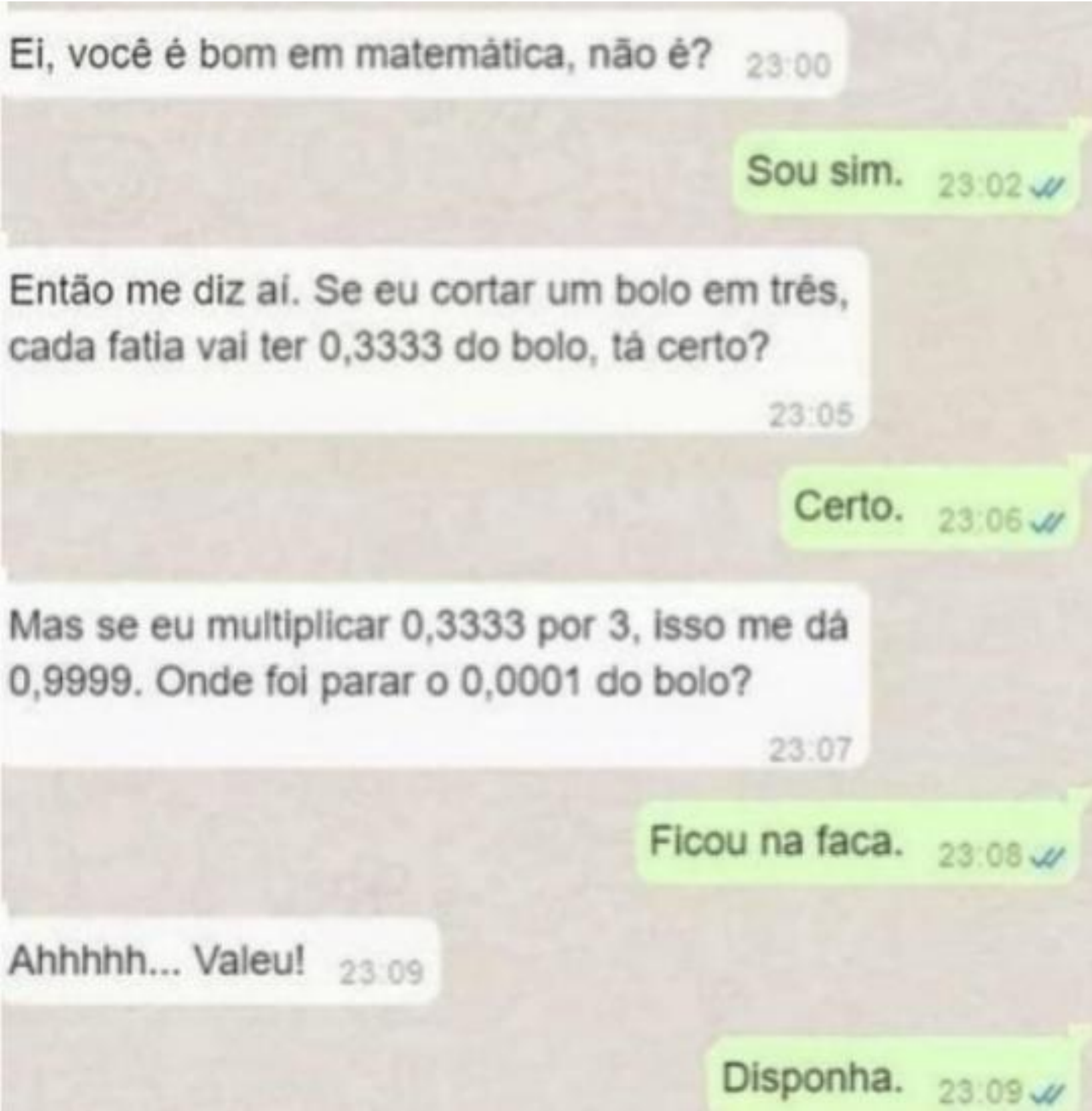
Objetos do Conhecimento (BNCC): Dízimas periódicas – fração geratriz

Habilidades (BNCC): (EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Problema 1

Em uma turma de 8° ano do Ensino Fundamental, um grupo de estudantes apresentam ao professor de matemática um diálogo no aplicativo *WhatsApp*, questionando-o se a resposta explícita na conversa está correta (Figura 1).

Figura 1 – Conversa no aplicativo *WhatsApp*



Fonte: Konrad55_2020 (2020).

Dessa forma, faça uma análise e comente a resposta que você daria aos estudantes. Como você abordaria a resolução dessa questão justificando matematicamente a explicação para a construção acerca do conhecimento levantado?

Orientações Didáticas

Inicialmente os professores ou futuros professores, organizados em grupos, irão indicar as palavras ou termos desconhecidos para começar a pesquisa.

Algumas questões poderão complementar o planejamento para a resolução ou encaminhamento da situação-problema. Caso essas questões não sejam propostas pelos professores que recebem a formação, elas poderão ser feitas pelo tutor:

- Qual o conceito de número racional?
- O que são dízimas periódicas?
- Dê a definição de fração geratriz.

Os participantes deverão debater tais questões e fundamentarão a pesquisa utilizando-se dos recursos disponíveis na escola. O tutor poderá indicar a leitura de livros, materiais didáticos, *sites* ou videoaulas da Internet que tratam sobre o objeto de conhecimento a ser pesquisado. Algumas indicações poderiam ser:

✓ Números: Racionais e Irracionais (NÍVEN, 1984).
✓ Introdução à teoria dos números (SANTOS, 2020).
✓ Site Professor Paulo Gama: https://webcache.googleusercontent.com/search?cd=1&ct=clnk&gl=br&hl=pt-BR&q=cache%3AbeNRL6oOgykJ%3Ahttps%3A%2F%2Fwww.professorpaulogama.com.br%2Fpost%2Fo-bolo-que-ficou-na-faca+. Entre outros.

O diálogo exposto no aplicativo *WhatsApp* nos remete a uma situação do cotidiano, portanto, contextualizada com a realidade dos estudantes. Nesse primeiro momento, é importante que o professor saliente que $\frac{1}{3}$ não é exatamente igual à sua forma decimal 0,3333..., já que ela é uma dízima periódica, com infinitas casas decimais. O correto é que o professor exponha que $\frac{1}{3}$ é aproximadamente 0,3333 e não exatamente igual a 0,3333.

Assim, é importante o professor retomar, junto aos estudantes, o conceito de dízima periódica, explicando que elas pertencem ao conjunto dos números racionais, e que dessa forma podem ser expressas em forma de fração, ou seja, na forma $\frac{a}{b}$ com b ≠ de 0.

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros e b ≠ de 0}.

É fundamental também que o professor retome o conceito de fração geratriz para ser possível desenvolver a resolução dessa questão.

Observemos assim, que o bolo foi dividido em três partes iguais, representado pela fração $\frac{1}{3}$. Se adicionarmos as três fatias, temos: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$ =1. Ou seja, em se tratando da fração, não há erro algum, pois o resultado dá 1.

O aparente problema surge quando multiplicamos 3 x 0,333 = 0,999...

O resultado de 3 x 0,333 tem que ser igual a 1, mas aparentemente dá 0,9999.

O erro está em desprezarmos as casas decimais contidas na reticência, que, aliás é uma **dízima periódica**.

No Ensino Fundamental ao trabalharmos as dízimas periódicas, construímos com os estudantes o conceito de fração geratriz, com o intuito de determinar as frações que dão origem às dízimas periódicas. Assim, usamos tal procedimento:

1. Chamamos de x o valor de 0,999..., ou seja, x = 0,999...
2. Multiplicamos ambos os membros da igualdade por um valor conveniente a obter uma igualdade equivalente, com o objetivo de se eliminar a parte decimal. Assim, neste caso, se multiplicarmos ambos os membros da igualdade por 10 (aplicando o princípio multiplicativo), logo teremos:

10.x = 10.0,999...   10x = 9,999...

Efetuando-se a subtração dos dois termos, obtemos 10x – x = 9,999.–. - 0,999...

9x = 9. Logo x = 1.

Se na multiplicação feita pela pessoa que faz a pergunta no diálogo acrescentasse cada vez mais casas decimais, o valor obtido se aproxima cada vez mais de 1, o que na Matemática dizemos que o valor “tende” a 1.

Uma outra maneira de percebermos isso é notarmos que:

0,999...=0,9+0,09+0,009+0,0009+0,00009+... (I)

Observa-se que o segundo membro da igualdade (I) forma uma soma infinita.

Os termos desta soma formam uma **Progressão Geométrica (PG) decrescente**, pois cada termo desta sequência é igual ao anterior multiplicado por 0,1.

Assim, temos a **PG infinita**: (0,9; 0,09; 0,009; 0,0009; 0,00009; ...). (II)

$$Onde\ a_1 = 0{,}9\ e\ q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0{,}09}{0{,}9} = 0{,}1$$

Como a igualdade (I) é a **soma (S) dos infinitos termos da PG (II)**, podemos calcular o valor dessa soma pela fórmula:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{0{,}9}{1-0{,}1}$$

$$S = \frac{0{,}9}{0{,}9}$$

$$S = 1$$

Mais uma vez percebemos que o valor 0,999... tende a 1.

Depois de posta a representação da fração geratriz, a resposta que o professor poderá formular junto aos estudantes poderá ser a de que o resto do bolo não ficou na faca e sim na aproximação dada pelo indagador.

Situação 1.2

Objeto Matemático de estudo: Números Racionais

Público-alvo: 8° Ano do Ensino Fundamental

Relevância para a aprendizagem:

É muito comum entre os estudantes da Educação Básica a dificuldade de compreender o significado de alguns conceitos matemáticos, bem como aceitar a igualdade entre 0,999... e 1. Isso se deve principalmente ao fato de que, muitas vezes, o processo de construção do conceito de número real não é trabalhado de forma cuidadosa para que compreendam o significado e não apenas memorizem processos que muitas vezes não fazem sentido a eles.

Um dos objetivos dessa situação-problema é levar à reflexão sobre conceitos pertinentes à Análise Matemática, muitos deles introduzidos desde o Ensino Fundamental, identificando, por exemplo, maneiras de escrever um mesmo número racional nas formas decimal e fracionária, estabelecendo a conexão entre diferentes representações.

Essas conjecturas são essenciais para explorar experiências que servirão de suporte às reflexões que propiciarão a oportunidade de detectar obstáculos epistemológicos na construção de algumas ideias básicas da Matemática, bem como auxiliar no desenvolvimento de uma relação de proximidade entre a fundamentação teórica da Matemática aplicada com a Matemática produzida no âmbito escolar.

Objetos do Conhecimento (BNCC): Dízimas periódicas – fração geratriz.

Habilidades (BNCC): (EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Problema 1.2

Em um diálogo sobre números reais e aproximações dois estudantes chegaram a um impasse em relação à seguinte questão: Podemos dizer que 0,999... é igual a 1?

O estudante A respondeu o seguinte:

Não podemos fazer essa afirmação, visto que 0,999... é muito próximo de 1 mas não é exatamente igual a 1.

O estudante B respondeu o seguinte:
Sim, podemos fazer essa afirmação, já que 0,999... é igual 1, não está muito próximo pois se trata do mesmo número indicado de duas formas distintas.

Comente as respostas de cada um dos estudantes e acabe com o impasse justificando matematicamente a sua posição em relação ao debate.

Orientações Didáticas

Elencamos a seguir algumas questões subjacentes que poderão complementar o planejamento para a resolução da situação-problema.

Inicialmente será fundamental indicar as palavras ou termos desconhecidos pelos integrantes a fim de iniciar o trabalho. Em seguida, o formador (tutor) poderá propor questões pertinentes aos participantes para que iniciem a pesquisa.

- O que são dízimas periódicas?
- Dê a definição de fração geratriz.
- Quais as frações Geratrizes do número 0,999...?

Os participantes, organizados em grupos, irão discutir sobre as questões e fundamentarão o estudo se utilizando dos recursos disponíveis na escola como livros, materiais didáticos, computadores com acesso à internet, entre outros. Assim, o tutor poderá recomendar algumas leituras ou videoaulas como:

- ✓ A Matemática do Ensino Médio (LIMA, 2004).
- ✓ Números: Racionais e Irracionais. (NÍVEN, 1984).
- ✓ Introdução a teoria dos números (SANTOS, 2020).
- ✓ Vídeo Isto é Matemática – T10E01 – “0,999999999… É Igual a Um”. Disponível em: https://youtu.be/3by2j7YO30o

Similar ao problema anterior, determinaremos a fração geratriz de uma dízima periódica utilizando o mesmo cálculo já apresentado. Porém, é importante lembrar que, primeiramente, o professor deve retomar junto aos estudantes o conceito de número racional a fim de explorar suas diferentes representações.

É fundamental também verificar se há lacunas na aprendizagem quanto a compreensão de dízima periódica e fração geratriz. Em caso afirmativo, o professor deverá retomar tais conceitos de forma a desenvolver tal habilidade para a construção acerca do conhecimento.

Isto posto, desenvolveremos o cálculo da fração geratriz como prova da igualdade entre 0,999... e 1:

$$X= 0,999...$$
$$10X= 9,999...$$
$$1–X - X = (9,999...) – (0,999...)$$
$$9X = 9 \quad \text{Logo } X = 1.$$

Um outro argumento que podemos usar para mostrar esse fato, é usando um outro número decimal como base de teoria. Assim:

O número 0,1111...= $\frac{1}{9}$, logo, se multiplicarmos ambos os lados por 9, obtemos 0,9999 ... = $\frac{9}{9}$ = 1.

Podemos também optar pela representação da adição de um número infinito de termos de uma progressão geométrica, em que o módulo da razão é maior do que zero e menor do que um:

$$0{,}9999... = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + ... = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} +$$

Dessa forma, observa-se que a dízima periódica pode ser identificada com a adição de infinitas parcelas de números racionais, quer estas estejam representadas na forma decimal ou fracionária. Esta expressão representa a adição de um número infinito de termos de uma progressão geométrica (PG) decrescente, cujo primeiro termo é a= $\frac{9}{10}$ = 0,9 e a razão q= $\frac{1}{10}$ = 0,1.

No caso da PG ser como a apresentada anteriormente, onde $a_1 = \frac{9}{10}$ e q= $\frac{1}{10}$, podemos calcular a soma de um número infinito de termos

$$\lim_{n\to\infty} S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Dessa forma, depois de o professor estar munido da fundamentação teórica acerca do objeto de conhecimento levantado, acreditamos que ele será capaz de construir matematicamente com os estudantes a demonstração da resolução, e facilmente responder os questionamentos iniciais levantados, afirmando que a colocação do estudante B está correta, pois podemos sim afirmar e demonstrar que o número 0,999..é igual a 1, já que 0,999... não está muito próximo de 1, e sim se trata do mesmo número indicado de duas formas distintas.

Situação 2

Objeto Matemático de estudo: Números Irracionais

Público-alvo: 9° Ano do Ensino Fundamental

Relevância para a aprendizagem

Diversos segmentos de reta podem ter suas medidas de comprimento expressas por números racionais. Entretanto, há segmentos de reta cujas medidas de comprimento não podem ser expressas por números racionais, surgindo assim a necessidade de apresentação de um novo conjunto numérico: o conjunto dos números irracionais.

Ao trabalhar a definição de número irracional é importante fundamentar com os estudantes que o conceito de cada tipo de número foi tecido ao longo dos anos e que os números não são elementos estáticos, sendo os conjuntos numéricos “criados” pela necessidade lógica das operações. Dando embasamento teórico para a compreensão de que o conjunto dos números reais é formado pelos números racionais mais os números irracionais.

É fundamental, também, que os estudantes consigam identificar os números irracionais, uma vez que isso possibilitará a compreensão futura acerca do conjunto dos números reais. Tal situação-problema constitui-se em um momento de articulação e as suas diversas aplicações entre os eixos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, visto que existe a possibilidade de se discutir os números, suas representações e sua localização na reta real com o uso dos instrumentos clássicos de desenho como a régua e o compasso.

Objetos do Conhecimento (BNCC): Números irracionais – Números Reais.

Habilidades (BNCC):

- ✓ (**EF09MA01**) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
- ✓ (**EF09MA02**) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

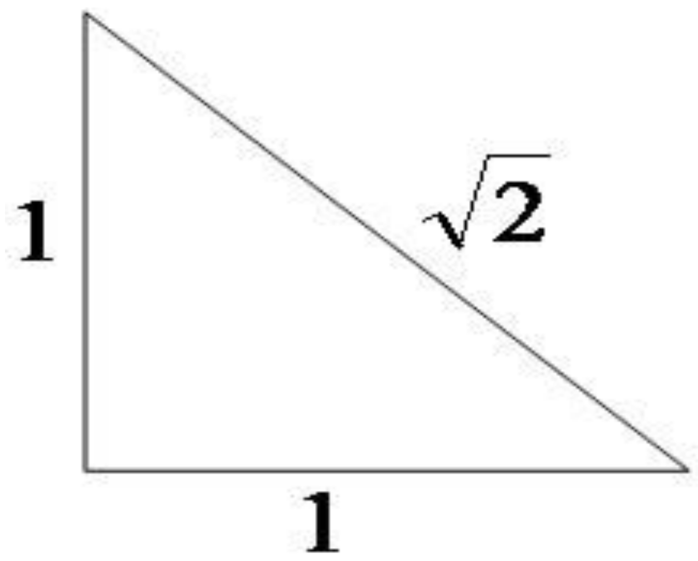
Problema 2

Analise a seguinte situação:

Em uma aula de Matemática no 9° ano do Ensino Fundamental, um professor aborda o estudo dos Números Reais contextualizando a descoberta dos números Irracionais através do Teorema de Pitágoras ao calcular a diagonal do quadrado, conforme versa a seguinte questão:

Consideremos a Figura 2 na qual temos um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 1. Usando esse triângulo e um compasso, marque na reta numérica um segmento cujo comprimento é representado por um número não racional que é o conhecido $\sqrt{2}$.

Figura 2 – Triângulo retângulo isósceles



Diante de tal situação o aluno A faz o seguinte questionamento:

– Podemos colocar a régua sobre o segmento $\sqrt{2}$ *e utilizar essa medida como padrão?*

Na sequência, o aluno B interroga:

– Se não encontramos os números irracionais na régua, existe alguma relação entre a medida de um segmento e um número irracional?

Comente as respostas que você daria a cada um dos estudantes. Como você abordaria a resolução dessa questão justificando matematicamente a explicação para a construção do conhecimento acerca do objeto matemático levantado?

Orientações Didáticas

A seguir, algumas questões relevantes que poderão complementar o planejamento para a resolução da situação-problema. Caso essas questões não sejam propostas pelos professores ou futuros professores, organizados em grupos, elas poderão ser feitas pelo formador (tutor).

Inicialmente será fundamental indicar as palavras ou termos desconhecidos pelos integrantes do grupo a fim de iniciar a pesquisa.

- Dê a definição de Número Racional e Número Irracional;
- Qual a definição de Número Real?
- Defina Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis.

Os participantes irão debater sobre as questões e fundamentarão sua pesquisa se utilizando dos recursos disponíveis na escola como livros, computadores com acesso à internet, material didático, dentre outros.

O tutor poderá indicar livros e materiais que poderão auxiliá-los na fundamentação da pesquisa, tais como:

- ✓ Números: Racionais e Irracionais (NÍVEN, 1984).
- ✓ Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais. (ÁVILA,1984).
- ✓ Análise Matemática para a licenciatura (ÁVILA, 2006).
- ✓ Análise Real (LIMA, 2012).
- ✓ Caderno do professor – Matemática – (8°série/9°ano) – Volume 1 – Secretaria da Educação – São Paulo – (2014-2017). Entre outros.

Uma possível resolução dessa situação-problema seria, primeiramente, solicitar a fundamentação do conceito de Número Irracional.

Alguns autores relacionam a definição de números irracionais com a dos números racionais, surgindo assim, a necessidade de explorarmos um pouco sobre comensurabilidade entre segmentos e a respeito dos números fracionários e decimais.

De acordo com Níven (1984):

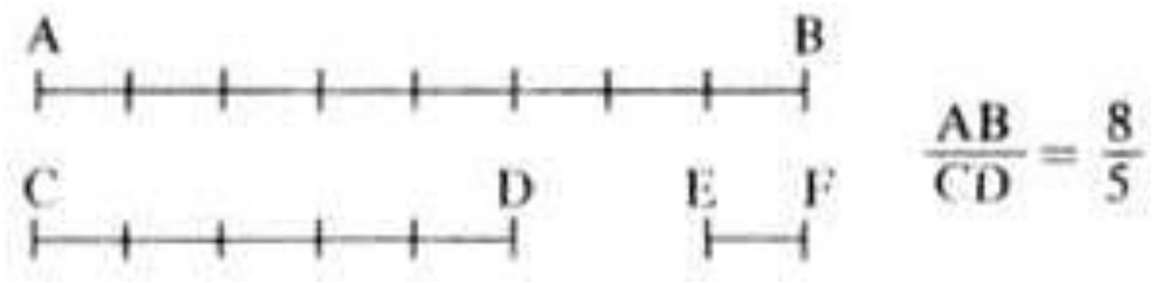
> [...] Existem números reais que não são racionais. O número $\sqrt{2}$ não é racional [..]. Qualquer número real, como $\sqrt{2}$, que não é racional, diz-se irracional. De acordo com esta definição, todo número real, ou é racional, ou é irracional. A reta, ou eixo, com um número associado a cada um de seus pontos, [...] é chamada reta real. Os pontos desta reta se dizem racionais ou irracionais conforme os números a eles associados sejam racionais ou irracionais. Observe que a definição acima, de número irracional, resume-se no seguinte: qualquer número real que não possa ser expresso como razão a/b de dois inteiros, diz-se irracional (NÍVEN, 1984, p. 60).

É de suma importância também fundamentar o que são grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

De acordo com Ávila (1984), existem na Matemática conceitos que parecem muito simples a uma visão superficial, mas que, submetidos a uma análise criteriosa revelam aspectos verdadeiramente surpreendentes. Segundo ele, se tratarmos da reta na sua representação numérica em termos das abscissas de seus pontos poderemos mostrar que os conceitos de reta e de número não são tão simples como parecem.

Uma questão com que lidavam os matemáticos gregos no final do quinto século antes de Cristo era a de comparar grandezas da mesma espécie, como dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes. No caso de dois segmentos retilíneos AB e CD, dizer que a razão AB/CD é o número racional m/n, significava para eles (e ainda significa para nós) que existia um terceiro segmento EF tal que AB fosse m vezes EF e CD n vezes esse mesmo segmento EF. Na Figura 3, extraída do artigo do Professor Geraldo Ávila (1984), ilustramos essa situação com m = 8 e n = 5.

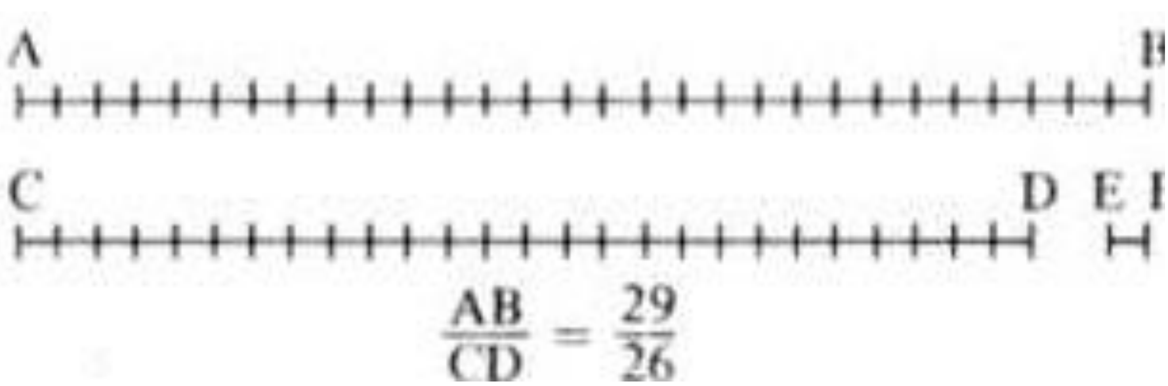
Figura 3 – representação dos segmentos AB e CD na razão de 8/5



Fonte: (ÁVILA, 1984).

No tempo de Pitágoras e ainda durante boa parte do século V a.C., pensava-se que os números racionais fossem suficientes para comparar segmentos de reta; isto é, dados dois segmentos AB e CD, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento EF contendo um número inteiro de vezes em AB e outro número inteiro de vezes em CD, situação essa que descrevemos, dizendo que EF é um submúltiplo comum de AB e CD. Uma simples reflexão revela que essa é uma ideia muito razoável. Afinal, se EF não serve, podemos imaginar um segmento menor, outro menor ainda, e assim por diante. Nossa intuição geométrica parece dizer-nos que há de existir um certo segmento EF, talvez muito pequeno, mas satisfazendo aos propósitos desejados. Na Figura 4, também extraída do artigo do Professor Geraldo Ávila (1984), ilustramos uma situação com segmento EF bem menor que o da figura anterior. Poderíamos imaginar um segmento EF tão pequeno que nem pudéssemos mais desenhá-lo, mas, nos convenceríamos, pela nossa intuição geométrica, da possibilidade de sempre obtermos um submúltiplo comum de AB e CD.

Figura 4 – representação dos segmentos AB e CD na razão de 29/26



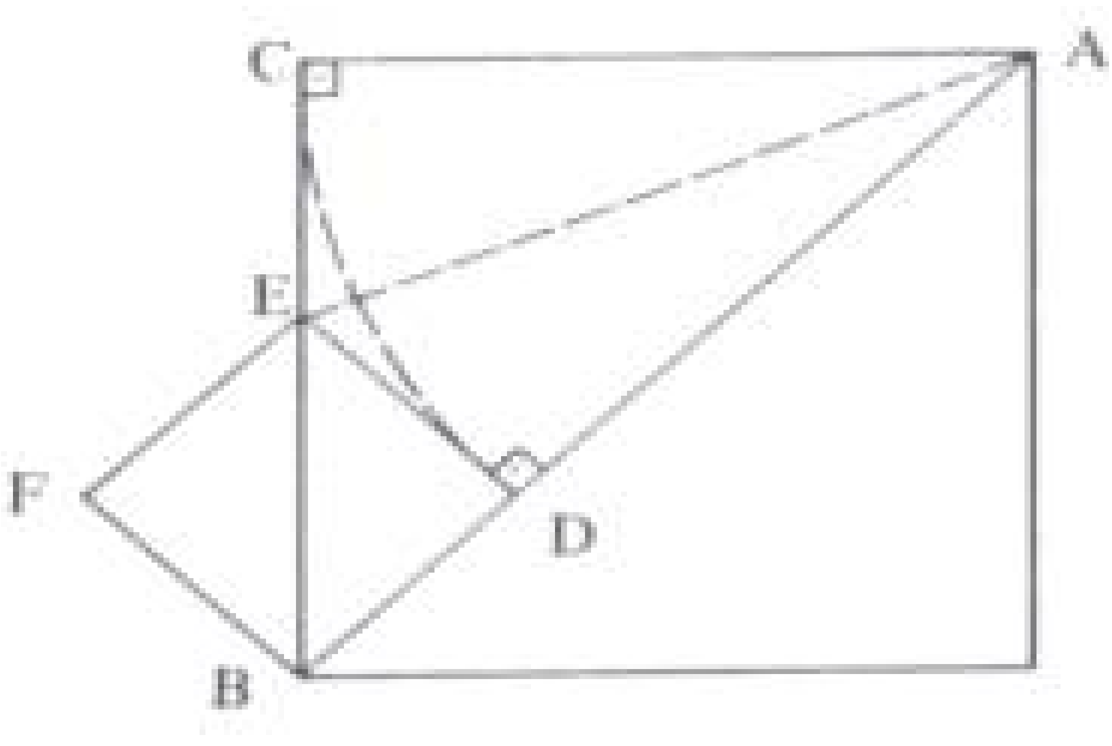
Fonte: (ÁVILA,1984).

Dois segmentos nessas condições são ditos comensuráveis, justamente por ser possível medi-los ao mesmo tempo, com a mesma unidade EF.

Entretanto, como também nos explica Ávila (1984), não é verdade que dois segmentos quaisquer sejam sempre comensuráveis. Em outras palavras, existem segmentos AB e CD sem unidade comum EF, os chamados segmentos incomensuráveis. Esse é um fato que contraria nossa intuição geométrica, e por isso mesmo a descoberta de grandezas incomensuráveis na Antiguidade representou um momento de crise no desenvolvimento da Matemática.

De acordo com evidências históricas, foram os próprios pitagóricos que descobriram grandezas incomensuráveis, provavelmente entre 450 e 400 a.C.; e, ao que tudo indica, isto se fez através de um argumento geométrico, como o que apresentaremos a seguir, demonstrando que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis. Para exemplificar a demonstração, utilizaremos a Figura 5, extraída do artigo do Professor Geraldo Ávila (1984):

Figura 5 – Demonstração geométrica da existência de segmentos incomensuráveis



Fonte: (ÁVILA,1984).

Na Figura 5 representamos um quadrado com diagonal δ= AB e lado λ= AC. Suponhamos que AB e AC sejam comensuráveis. Então, deverá existir um terceiro segmento que seja submúltiplo comum de δ e λ. Para provarmos isso, façamos a seguinte construção: traçamos o arco $\overline{CD}$ com centro em A e o segmento ED tangente a esse arco em D, de sorte que AD = AC. Então, nos triângulos retângulos ACE e ADE, os catetos AC e AD são iguais e a hipotenusa AE é comum, logo são também iguais os catetos CE e DE (=BD). Portanto, δ = AB = AD + BD = λ + BD

λ = BC = BE + EC = BE + BD

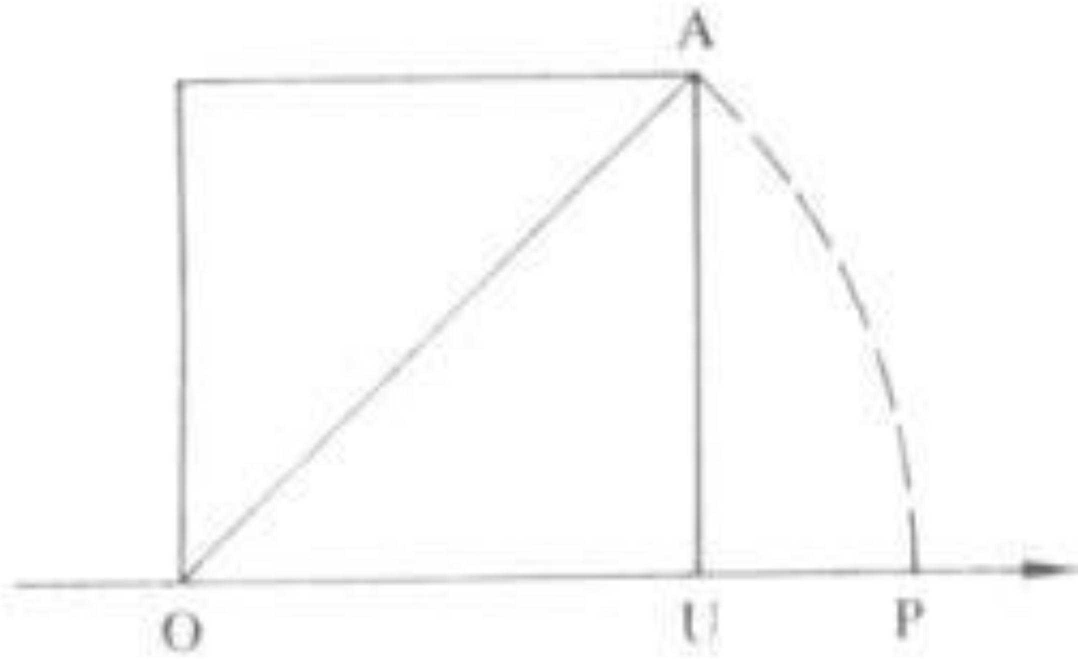
Ou seja, δ = λ + BD (1)

λ = BE + BD (2)

Como um segmento é submúltiplo comum de δ e λ, concluímos, por (1), que também é submúltiplo de BD. Daqui e de (2) segue-se que s também é submúltiplo de BE. Provamos assim que se houver um segmento que seja submúltiplo comum de δ = AB e λ= AC, então o mesmo segmento σ será submúltiplo comum de BE e BD, segmentos esses que são a diagonal e o lado do quadrado BDEF. Ora, a mesma construção geométrica que nos permitiu passar do quadrado original ao quadrado BDEF pode ser repetida com este último para chegarmos a um quadrado menor ainda; e assim por diante, indefinidamente; e esses quadrados vão se tornando arbitrariamente pequenos, pois, como é fácil ver, as dimensões de cada quadrado diminuem em mais da metade quando passamos de um deles a seu sucessor. Dessa maneira, provamos que o segmento deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejemos. Evidentemente, isso é um absurdo! Somos, pois, levados a rejeitar a suposição inicial de que o lado AC e a diagonal AB do quadrado original sejam comensuráveis. Concluímos, pois, que o lado e a diagonal de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis, C.Q.D.

Ainda, de acordo com Ávila (1984), uma consequência da existência de grandezas incomensuráveis é a existência de pontos na reta sem abscissas racionais. A Figura 6 pode ilustrar melhor esse fato:

Figura 6 – Representação geométrica da diagonal do quadrado de lado OU



Fonte: (ÁVILA,1984).

De acordo com a Figura 6, basta tomarmos OP=AO, onde AO é a diagonal de um quadrado de lado unitário OU. Como OP e OU são incomensuráveis, não é possível expressar a razão OP/OU com um número racional. Pelo teorema de Pitágoras, a abscissa de P seria: $OA^2 = OU^2 + UA^2$.

Como AO = OP e UA = OU =, obtemos: $OP^2 = 2OU^2 = 2$, ou seja, OP = $\sqrt{2}$. É essa a abscissa de P, tomando OU como unidade de comprimento. Se tomarmos, por simplificação, OU como um segmento de reta e este como unidade de comprimento, temos (Figura 7):

Figura 7 – Representação da semirreta com origem em O

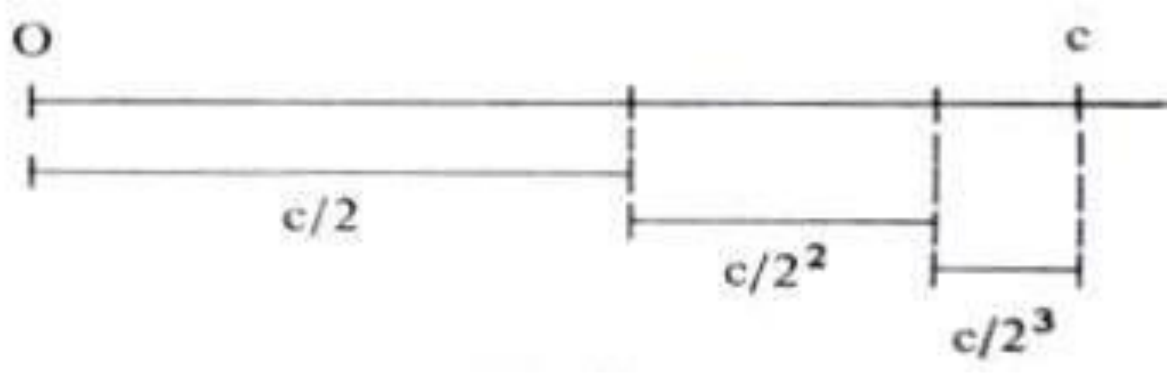
Fonte: (ÁVILA,1984).

Dessa forma, todo ponto P da semirreta que não seja a origem O, tem abscissa positiva x, que é a razão OP/OU. Logicamente, se todos os pares de segmentos OU e OP fossem comensuráveis, somente os números racionais não negativos já seriam suficientes para caracterizar os pontos da semirreta.

Suponhamos, porém, que todos os pontos da semirreta tenham abscissas racionais. Uma primeira consequência dessa afirmação é que os pontos da semirreta formam um conjunto enumerável, pois o conjunto dos números racionais é enumerável, cuja prova dessa afirmativa nos absteremos aqui. Contudo, para facilitar a visualização, façamos uma cobertura da semirreta por meio de segmentos, sendo o primeiro segmento r_1 igual a c/2, o segundo segmento r_2 é igual à metade de r_1, o terceiro segmento r_3 igual à metade de r_2 e assim por diante. Dessa maneira a semirreta ficará toda coberta com uma família infinita de segmentos.

No entanto, vamos somar os comprimentos dos segmentos dessa família e, para facilitar a visualização geométrica, colocamos os segmentos em fila, um em seguida ao outro e na ordem em que aparecem, como ilustra a Figura 8:

Figura 8 – Segmentos colocados em fila



Fonte: (ÁVILA,1984).

Sabemos que a soma desses segmentos é exatamente igual a c (comprimento finito), pois começamos por um segmento de comprimento c/2, adicionamos sua metade, depois a metade deste último e assim sequencialmente. Isso é um absurdo, pois uma semirreta não tem um comprimento finito, mas infinito! Para sairmos de tal contradição, temos que admitir que os números racionais são insuficientes para marcar todos os pontos de uma reta e para completar esses pontos sem abscissas racionais temos que nos valer dos números irracionais como $\sqrt{2}$.

Por fim, para provarmos que $\sqrt{2}$ é um número irracional, suponhamos que exista uma fração irredutível m/n tal que $\sqrt{2}$ = m/n. Então, elevando ambos os termos ao quadrado:

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \therefore \quad m^2 = 2n^2.$$

Daqui temos que se m é um número par, m^2 também é par, portanto, m = 2r, sendo r outro número inteiro. Substituindo m por 2r em $m^2 = 2n^2$, obtemos:

$$4r^2 = 2n^2 \therefore n^2 = 2r^2.$$

Essa última relação nos diz que n^2 é um número par, logo n também é par. Chegamos a um absurdo, pois m/n é uma fração irredutível, não sendo possível que m e n sejam ambos pares. Assim, provamos que $\sqrt{2}$ é um número irracional, já que não pode ser expresso na forma m/n, ou seja, é impossível falar em razão entre duas grandezas quando essas são incomensuráveis.

A existência dos números irracionais, conforme Niven (1984), permite que todo o comprimento de uma reta possa ser expresso como números reais, e isso em Matemática é conhecido como a propriedade de completude desses números.

Isto posto, o professor estando munido dessa base teórica, acreditamos que ele facilmente irá responder aos estudantes os questionamentos iniciais:

- ✓ Aluno A: Podemos colocar a régua sobre o segmento $\sqrt{\mathbf{2}}$ e utilizar essa medida como padrão?

Não, porque a diagonal de um quadrado é uma medida incomensurável, ou seja, não pode ser expressa por um segmento de reta. Para tal questionamento, o professor poderá explicar que não é possível quantificar números irracionais através de um instrumento de medida como uma régua, pois não é possível mensurar esta medida.

- ✓ Aluno B: Se não encontramos os números irracionais na régua, existe alguma relação entre a medida de um segmento e um número irracional?

Não, como já dito anteriormente, é importante que os estudantes compreendam que não é possível comensurar os números irracionais através da medida de um segmento.

Por fim, o professor poderá realizar junto com os estudantes o experimento: Utilizando a régua, irão desenhar uma reta numerada no papel quadriculado (1 cm × 1 cm), sobre uma das linhas da malha, considerando 1 cm como unidade de medida de comprimento.

Em seguida, devem traçar a diagonal do quadrado, sendo a medida de comprimento dessa diagonal igual a $\sqrt{2}$ cm.

Com o auxílio do compasso, deve abri-lo do tamanho da diagonal. Colocando a ponta-seca sobre o ponto representativo do zero na reta numerada e, com a ponta móvel sobre a outra extremidade da diagonal, deve se deslizar até a reta numerada. Assim, temos que o ponto de encontro desse traçado com a reta numerada será o ponto representativo da medida $\sqrt{2}$ cm.

Situação 2.1

Objeto Matemático de estudo: Números Irracionais

Público-alvo: 9° Ano do Ensino Fundamental

Relevância para a aprendizagem

Ao contextualizar com os estudantes o conceito de número real, é essencial que eles compreendam o π (pi) como um número irracional. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, recorrendo assim, aos números irracionais.

O estudo do número π (pi) é uma questão relevante para a Matemática, devido a sua importância na definição de conceitos e a sua utilização em todas as fórmulas de linhas ou corpos redondos. Ele é bastante usado em diversas áreas de conhecimento como a estatística, a música, a engenharia, entre outras.

É fundamental investigar a importância do conceito π (pi) para o ensino da Matemática de maneira a fundamentar o professor para que ele consiga desenvolver com os estudantes a sua construção e definição, oportunizando a melhoria da prática pedagógica e a compreensão dos cálculos que utilizam tal conceito.

Tal situação-problema constitui-se em uma possibilidade de reflexão a respeito da construção dos números irracionais, sobretudo, o número π (pi) de maneira a explorar com o professor de matemática, tal conhecimento com maior profundidade, buscando estabelecer conexões com o significado de número real da Matemática escolar e, consequentemente, preparando-os para ensinar números irracionais na Educação Básica.

Objetos do Conhecimento (BNCC):

- ✓ Medida do comprimento da circunferência;
- ✓ Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica.

Habilidades (BNCC):

- ✓ (**EF07MA27**) Estabelecer o número (pi) como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
- ✓ (**EF09MA02**) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

Problema 2.1

Em uma aula de Matemática numa turma do 9° ano do Ensino Fundamental, um professor revisa o estudo dos Números Irracionais contextualizando a existência do número π. Para fundamentar a definição de número irracional ele propõe a observação e a realização da seguinte atividade (Figura 9):

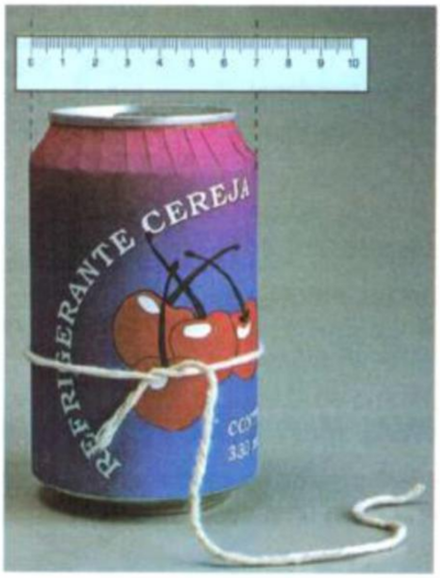
Figura 9 – Exemplo de abordagem de π em livros didáticos

1 Se medirmos uma moeda de 1 real, encontraremos, aproximadamente, 84,9 mm de comprimento da circunferência e 27 mm de diâmetro.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{84{,}9\text{ mm}}{27\text{ mm}} = 3{,}1444...$$

Para medir o comprimento da circunferência da moeda, é necessário contorná-la.

2 Se medirmos uma lata de refrigerante, encontraremos, aproximadamente, 220 mm de comprimento da circunferência e 70 mm de diâmetro.



$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{220\text{ mm}}{70\text{ mm}} = 3{,}1428...$$

Fonte: (GIOVANNI JR.; CASTRUCCI, 2009, p. 26 *apud* BORTOLETTO, 2008).

Diante de tal situação os estudantes apresentam os seguintes questionamentos:

– Se o número π (pi) é irracional por que ele foi representado como razão de dois números inteiros?

– Aprendemos que os números irracionais são incomensuráveis, como é possível medir o número π (pi)?

– Se o número π (pi) é um valor constante, por que encontramos diferentes resultados?

Comente as respostas que você daria a cada um dos estudantes. Como você abordaria a resolução dessa questão justificando matematicamente a explicação?

Orientações Didáticas

A seguir, algumas questões relevantes para a complementação e o planejamento de pesquisa para a resolução da situação-problema. Algumas questões poderão ser levantadas pelo formador (tutor), caso não sejam propostas pelos participantes.

Inicialmente os professores ou futuros professores, organizados em grupos, irão indicar as palavras ou termos desconhecidos para iniciar a pesquisa.

As questões podem ser:

- Por que um número que não é racional é necessariamente irracional?
- Dê a definição do número π (pi).
- Por que a letra grega π é utilizada para representar o número 3,14159...?
- Por que π (pi) é irracional?

O tutor poderá indicar a leitura de livros ou materiais didáticos, bem como disponibilizar a utilização de recursos como computadores com acesso a internet existentes na escola. Algumas indicações podem ser:

- ✓ A Matemática do Ensino Médio (LIMA, 2006).
- ✓ Números: Racionais e Irracionais (NÍVEN, 1984).
- ✓ Dissertação (BORTOLETTO, 2008). Disponível em: http://iepapp.unimep.br/biblioteca_digital/down.php?cod=NDUx
- ✓ Dissertação (OLIVEIRA, 2015). Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/127674/000844541.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Dentre outros.

Primeiramente é importante que o professor retome com os estudantes a definição dos números irracionais. Convém relembrar que um número é racional quando se pode representá-lo sob a forma de uma fração. É o caso de 5= $\frac{5}{1}$; 0,5= $\frac{1}{2}$; 0,1111...= $\frac{1}{9}$. Se um número não é racional diz-se irracional, pois ele não é representável por uma fração e correspondendo assim a uma dízima infinita e não periódica. É o caso, por exemplo de $\sqrt{2}$ =1,414213562..., e do número π = 3,1415...

Neste momento, é fundamental que o professor explore junto aos estudantes o conceito do número π (pi) destacando que o π (pi) é um número irracional transcendente de valor compreendido entre 3 e 4. Por ser um número irracional, ele é infinito e não periódico.

Os números transcendentes são os números que não são algébricos. Não existe nenhum polinômio de coeficientes inteiros de que sejam raiz. O número π (pi) é um número transcendente porque não se pode obtê-lo como raiz de nenhum polinômio de coeficientes inteiros.

De acordo com Lima (1985), podemos dizer que π (pi) é a área de um círculo de raio 1 (por exemplo, se o raio de um círculo mede 1 cm, sua área mede π cm²).

> O símbolo usado para designar a constante obtida pela razão entre a medida do contorno de uma circunferência e seu diâmetro é a letra grega π, inicial da palavra contorno, escrita em grego: περιμετροξ. Foi popularizado pelo matemático suíço Leonhard Euler, em 1937 (BIGODE, 1994, p. 32).

Tal definição baseia-se no fato de π (pi) ser uma constante, onde o quociente entre o comprimento P de uma circunferência e o seu diâmetro d, permita escrever π = $\frac{P}{d}$.

Segundo Bortoletto (2008), não se sabe exatamente como na antiguidade se chegou à descoberta do número π, mas muito provavelmente o interesse por ele terá tido a sua origem em problemas de determinação de áreas e na constatação empírica de que, duplicando ou triplicando o diâmetro de uma circunferência, o seu perímetro também duplica ou triplica. Isto é, permanece constante a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência, qualquer que seja o seu raio.

Uma das técnicas que podem ser usadas para encontrar uma aproximação mais precisa para o valor de π (pi) foi desenvolvida por Arquimedes. Tal método usado é chamado de exaustão e consiste em calcular uma aproximação do valor de π (pi) por meio de polígonos com perímetros de mesma medida ao de uma circunferência.

A seguir traremos a construção tecida por (SILVA, 2022) na publicação do site Mundo Educação:

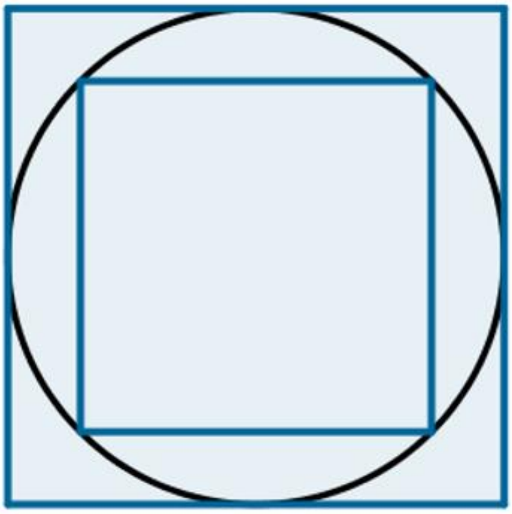
Primeiramente, constrói-se um quadrado inscrito de perímetro “P” e outro circunscrito de perímetro “p”. Ambos devem estar contidos em uma circunferência de raio r. Ao dividir o perímetro C da circunferência por seu diâmetro 2r, obtemos o valor de π (pi), assim Arquimedes construiu a seguinte desigualdade:

$$\frac{P}{2r} < \frac{C}{2r} < \frac{p}{2r}$$

$$\frac{P}{2r} < \pi < \frac{p}{2r}$$

Dessa forma, π é um número encontrado entre os perímetros do quadrado menor e do quadrado maior, ambos divididos pelo diâmetro (Figura 10).

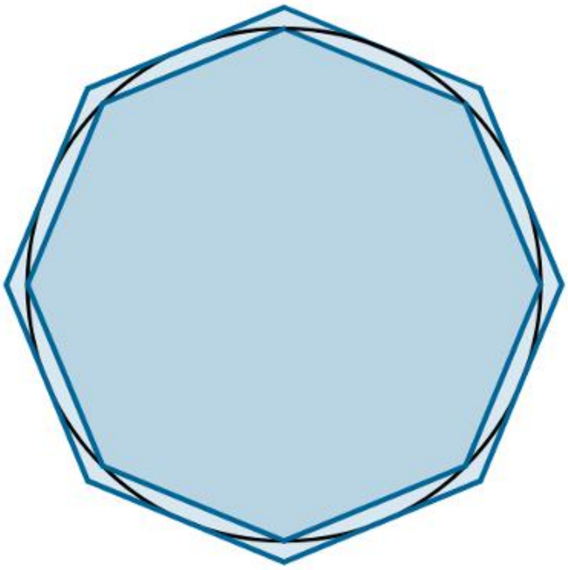
Figura 10 – Quadrado inscrito e quadrado circunscrito na circunferência



Fonte: (SILVA, [2022])

O propósito é aumentar o número de lados dos polígonos, fazendo com que seu formato se aproxime do formato da circunferência, de modo que eles permaneçam regulares. Observe a seguir uma circunferência que inscreve e que circunscreve polígonos regulares com oito lados (Figura 11).

Figura 11 – Octógono inscrito e octógono circunscrito na circunferência

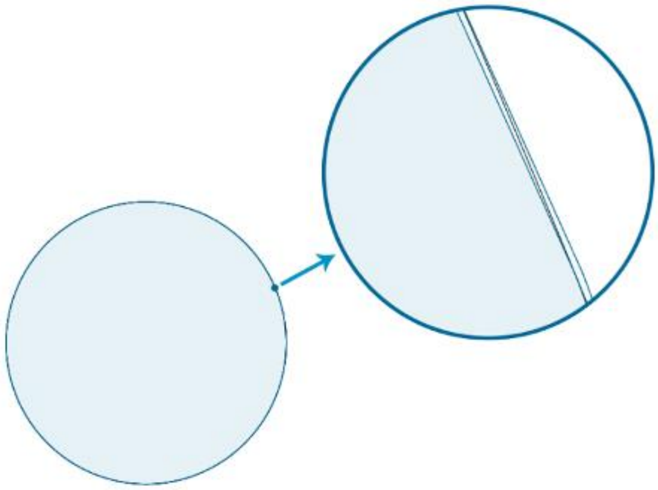


Fonte: (SILVA, [2022])

Observe que o perímetro dos polígonos se aproxima muito do perímetro da circunferência. Isso significa que utilizando a mesma desigualdade anterior para os perímetros dessas figuras obteremos uma aproximação muito melhor para o valor de π (pi).

Arquimedes fez esses cálculos para polígonos com 96 lados. Veja na Figura 12 a precisão dessa aproximação:

Figura 12 – círculos com perímetros muito próximos à medida do comprimento da circunferência



Fonte: (SILVA, [2022])

Essa figura mostra que os dois polígonos têm o perímetro muito próximo à medida do comprimento da circunferência e, ao mesmo tempo, mostra por meio do zoom que um deles está inscrito e o outro circunscrito.

Na utilização da desigualdade anterior para aproximação de π, nesse caso, as medidas dos perímetros encontrados para os polígonos foram:

$$\frac{P}{2r} = \frac{22}{7} \text{ e } \frac{P}{2r} = \frac{223}{71} \text{ , ou seja: } \frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71}$$

Assim, temos: 3,14285714 < π < 3,14084507 .

Isto posto, partimos agora para os questionamentos da situação-problema, destacando, primeiramente, que não defendemos aqui que tais experimentos não sejam realizados, muito pelo contrário, é importante a utilização de atividades que enfatizem a construção dos conceitos matemáticos, porém, chamamos a atenção para o cuidado que se deve ter visto as limitações e implicações em torno do conceito de número irracional.

- **Questionamento 1**: Se o número π (pi) é irracional por que ele foi representado como razão de dois números inteiros?

Ao abordar de maneira empírica a existência dos números irracionais e, consequentemente, do número π, o professor pode deixar que ocorram lacunas na aprendizagem acerca de tal conhecimento e assim, constituir-se em obstáculos epistemológicos de aprendizagem. A situação-problema proposta nos leva a indagar sobre a questão da coerência com a definição proposta.

De acordo com Bortoletto (2008), o número π é apresentado pela maioria dos livros e dos professores como sendo “número resultante de uma razão”, divisão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro. Muitos professores e autores de livros didáticos se referem ao número π como um número irracional ao mesmo tempo em que o definem como uma razão entre dois números. Esse tipo de apresentação esbarra na contradição já que sabemos que um número irracional é um número real que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros, ou seja, são números reais, mas não racionais. Esse tipo de equívoco acarreta obstáculos de aprendizagem em torno da definição de π (pi), além de não dar significado aos números irracionais, sendo estes explorados, muitas vezes, de forma superficial. Temos no PCN uma alerta sobre tal dificuldade:

> Deve-se estar atento para o fato de que o trabalho com as medições pode se tornar um obstáculo para o aluno aceitar a irracionalidade do quociente entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, uma vez que ele já sabe que as medições envolvem apenas números racionais (BRASIL, 1998, p. 107).

Ao realizar atividades que abordam a construção do número π (pi), como a proposta anterior, primeiramente, o professor deve esclarecer que, por se tratar de um número irracional, sendo este infinito e não periódico, todos os valores envolvidos nas operações de divisão, serão aproximados, portanto, constituem-se em números racionais. Assim, faz-se necessário destacar que quando a medida do diâmetro de uma circunferência for um número racional, a medida do comprimento da circunferência será também um número racional, por isso a razão resulta num valor aproximado de π.

É importante esclarecer que inclusive em fórmulas de corpos redondos como, por exemplo, para calcular a medida da área de uma circunferência, o número π (pi) utilizado geralmente como 3,14, resultará em valores de área aproximados. Concluindo-se assim, que devido à limitação nos cálculos, quando o número irracional está representado como um número decimal infinito e não periódico, realizar as operações só se faz possível quando utilizamos uma aproximação para esses números.

- **Questionamento 2:** Aprendemos que os números irracionais são incomensuráveis, como é possível medir o número π (pi)?

Este segundo questionamento esbarra na questão da incomensurabilidade dos números irracionais, e mais uma vez é importante esclarecer que os cálculos utilizados no experimento somente foram possíveis por meio das aproximações, pois os números irracionais são de fato incomensuráveis.

Nesse momento seria interessante o professor retomar com os estudantes a história da incomensurabilidade dos números irracionais recorrendo à diagonal do quadrado (ver problema 2), explicando que de acordo com evidências históricas, foram os próprios pitagóricos que descobriram grandezas incomensuráveis, provavelmente entre 450 a.C. e 400 a.C.; e, ao que tudo indica, isto se fez através de um argumento geométrico, demonstrando que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

É importante ressaltar com os estudantes que um número irracional era algo difícil de ser aceito pelos matemáticos naquela época. A descoberta da irracionalidade da $\sqrt{2}$ despertou certa desordem acerca daquilo que conheciam a respeito dos números, principalmente a Pitágoras, causando um descrédito na visão de mundo que ele havia construído. Assim, as descobertas e discussões da época precisam ser ressaltadas para que os estudantes compreendam o desenvolvimento da ciência, e logo, dos conceitos matemáticos ao longo da história.

Seria importante também que o professor se atentasse ao fato de que π é um número transcendental, ou seja, um número que não é algébrico, que não pode ser obtido como raiz de um polinômio de coeficientes inteiros.

Sabemos que tal assunto é complexo para se trabalhar com estudantes dessa faixa etária, porém é relevante que o professor aborde com eles a existência de números transcendentes, explicando que dentro dos números reais, existem dois tipos de números: os racionais e os irracionais. Porém, existe também, uma outra separação, muito mais recente, dos números reais, em duas outras categorias sendo: os números algébricos e os números transcendentes.

Um número real se diz algébrico se satisfizer uma equação algébrica com coeficientes inteiros. Por exemplo, raiz quadrada de dois é um número algébrico porque satisfaz a equação “xis elevado ao quadrado menos dois é igual a zero”. Se um número não for algébrico, ele será transcendente.

A abordagem seria superficial, porém recorrendo à história em torno do conceito, talvez pudesse despertar maior interesse dos estudantes em querer saber mais sobre o assunto levantado.

- **Questionamento 3:** Se o número π (pi) é um valor constante, por que encontramos diferentes resultados?

Da mesma forma que nos questionamentos anteriores, é importante enfatizar a necessidade de o professor esclarecer que o experimento proposto na situação-problema não nos permite encontrar o valor exato para o número π, visto que: 1) os números utilizados foram valores aproximados, portanto utilizamos números racionais; 2) conforme a definição já tecida anteriormente, os números irracionais são incomensuráveis, portanto, para trabalhar com esse tipo de cálculo fazemos arredondamentos; 3) Os materiais disponíveis na escola não são apropriados para o desenvolvimento real de um experimento como esse, por exemplo, não possuímos uma régua calibrada e outros recursos que daria exatidão ao experimento, portanto, os resultados encontrados serão valores aproximados de π, explicando assim, a variação dos resultados.

Para tal entendimento é importante que o professor frise que atividades dessa natureza têm por objetivo o desenvolvimento de um trabalho com materiais concretos e experimentais. Quando fórmulas são simplesmente apresentadas aos estudantes sem a devida contextualização de seu surgimento, os aprendizes tendem a esquecê-las facilmente ou utilizá-las de maneira mecânica. Tais experimentos trazem uma narrativa que justifique seu surgimento e utilização.

Acreditamos que a compreensão em torno de um conceito é condição necessária para o desenvolvimento da aprendizagem, sobretudo de conceitos matemáticos que exigem maior capacidade de abstração para o seu entendimento. E dessa forma, propomos a utilização de alguns recursos que podem ser apresentados na construção do número π.

A primeira sugestão que elencamos seria o desenvolvimento do processo de Arquimedes, utilizando materiais disponíveis na escola, como régua, compasso e transferidor. Através dessa atividade, os estudantes poderão perceber que o valor de π se aproxima cada vez mais de 3,14... e mesmo que ele continue inscrevendo e circunscrevendo polígonos na circunferência, não descobrirá o valor exato de π.

Esse método poderá auxiliar em melhor fundamentação do conceito de número irracional.

Um outro recurso que sugerimos seria recorrer a história do número π. Segundo Bortoletto (2008), a utilização da história levaria o estudante a perceber que muitos homens, de diferentes nações e épocas, tentaram encontrar um valor racional para π e não conseguiram. Mesmo com o uso de computadores, que calculam milhões de casas decimais para o π, não se consegue provar sua racionalidade. Dessa forma, contextualizar a descoberta de π pelos processos de sua construção e as constantes indagações que existem acerca de sua irracionalidade poderiam despertar nos estudantes a visão humana e histórica da Matemática.

Uma terceira opção seria a utilização de *software* de geometria dinâmica (GeoGebra) explorando recursos tecnológicos com o intuito de verificar na prática que o valor do número π é constante e que ele se caracteriza como um número irracional, decimal infinito e não periódico.

Dessa forma, estando o professor munido da fundamentação teórica acerca do assunto será possível responder aos questionamentos dos estudantes. Além de ser interessante propor outras atividades que explorem com maior profundidade o conceito de irracionalidade do número π, oportunizando aos discentes conhecer alguns aspectos relevantes de sua aprendizagem, ao mesmo tempo em que mostre que o ensino de Matemática é importante, tanto pela construção do conhecimento de habilidades matemáticas, quanto pela sua compreensão enquanto instrumento de leitura histórico-social.

Situação 3

Objeto Matemático de estudo: Conjuntos numéricos

Público-alvo: 1° Ano do Ensino Médio

Relevância para a aprendizagem:

É muito comum em materiais didáticos da Educação Básica abordar o tema “conjuntos numéricos” somente pela classificação dos números como sendo elementos pertencentes a um determinado conjunto ou outro. Muitas vezes não há por parte destes materiais a construção de uma fundamentação teórica que esclareça aos professores e estudantes que essa tabulação numérica foi tecida ao longo dos anos e que os números não são elementos estáticos, sendo os conjuntos numéricos “criados” pela necessidade lógica das operações matemáticas fundamentadas por interações humanas.

É importante que no Ensino Médio tal tema seja tratado de maneira mais clara e aprofundada marcada pela construção de modelos estratégicos, conceitos, definições e procedimentos matemáticos que interpretem e resolvam problemas em diversos contextos, de modo a construir argumentação consistente.

Vale ressaltar que tal situação-problema tem como um dos objetivos destacar a importância de os estudantes compreenderem aspectos relevantes acerca deste conteúdo como, por exemplo, trabalhar a noção de infinito, de enumerabilidade e densidade dos conjuntos numéricos. Tal tema necessita de melhor exploração, haja vista a sua importância, sobretudo, no Ensino Superior, onde há a necessidade de uma fundamentação criteriosa de análise matemática que aproxime a compreensão dos processos de aprendizagem de Matemática produzida no âmbito escolar.

Objetos do Conhecimento (BNCC): Densidade dos conjuntos numéricos.

Habilidades (BNCC): (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Problema 3

Em uma aula de Matemática do Ensino Médio houve um debate entre os estudantes acerca da seguinte questão:

Qual dos dois seguintes conjuntos têm mais elementos. O conjunto P formado por números pares, ou o conjunto N formado por números naturais?

***O estudante A respondeu**:*

Os dois têm a mesma quantidade de elementos pois ambos são infinitos

***O estudante B respondeu**:*

O conjunto P tem menos elementos do que N, pois o conjunto dos números naturais contém o conjunto dos números pares.

Comente as respostas de cada um dos estudantes e acabe com o impasse justificando matematicamente a sua posição em relação ao debate.

Orientações Didáticas

A seguir traremos algumas questões que poderão complementar o planejamento da pesquisa, bem como auxiliar o encaminhamento para a resolução da situação-problema. As questões poderão ser propostas pelo formador (tutor) caso não sejam levantadas pelos participantes. São elas:

- Qual a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos?
- Como mensurar a quantidade de elementos de um conjunto numérico?
- Qual a definição de infinito?

Assim, os professores ou futuros professores, organizados em grupos, indicarão as palavras ou termos desconhecidos para o início da pesquisa.

Nesse momento, o tutor poderá indicar a leitura de livros ou materiais didáticos existentes na escola, disponibilizando também a utilização de recursos como computadores com acesso à internet para a pesquisa em *sites* ou canais diversos. Seguem algumas recomendações:

- ✓ Análise Matemática para a licenciatura (ÁVILA, 1951).
- ✓ Curso de Análise (LIMA, 2004).
- ✓ Conceitos fundamentais da Matemática (CARAÇA, 1951).
- ✓ O Hotel de Hilbert. Disponível em: https://youtu.be/pjOVHzy_DVU . Dentre outros.

Para darmos início à discussão, é importante retomarmos com os estudantes os conceitos de Número Natural e Número Par.

Os números naturais $\mathbb{N}$= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12...} são **números inteiros positivos** (não negativos) que se agrupam num conjunto chamado de $\mathbb{N}$, sendo este composto de infinitos elementos. Se um número é inteiro e positivo, podemos dizer que é um número natural.

Os números pares P= {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12...} são definidos por números que ao serem divididos por dois têm resto zero, ou seja, é um conjunto formado por números que são múltiplos de 2. Destacando que, tal conceito pertence aos números naturais, mas pode ser estendida aos inteiros.

Em seguida, para melhor compreensão, como premissa para a resolução do problema, traremos também o conceito de cardinalidade.

Cardinalidade é a medida do tamanho de um conjunto, e se tratando de um conjunto finito é o número de elementos do conjunto.

Assim, para tratarmos das resoluções, nos apoiaremos nas contribuições mais importantes ao estudo dos conjuntos infinitos de **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** (1845-1918), conhecido como o pai da teoria dos conjuntos.

Teorema 1: Dados os conjuntos X e Y e uma função bijetora $f: X \to Y$, um desses conjuntos é finito se, e somente se, o outro também é.

Teorema 1.2: Se Y é um conjunto finito então todo subconjunto próprio $X \subset Y$ é finito.

Definição 1: Um conjunto X é dito infinito quando n não é finito. Isto é, se X não é vazio e não importando qual seja $n \in \mathbb{N}$ não existe bijeção, $f: I_n \to X$.

Exemplo 1: O conjunto *IN* dos números naturais é infinito. Dado $n \in \mathbb{N}$, arbitrário, seja $\varphi: In \rightarrow \mathbb{N}$ uma função qualquer e

$$p := \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n)$$

No caso $n = 1$, se φ é injetora, então o conjunto imagem de φ tem um único elemento, logo, φ não pode ser sobrejetora. Se φ é sobrejetora, ela não pode ser injetora. No caso $n = 1$, então φ não pode ser bijetora. Suponha agora $n \geq 2$. Como $\varphi(i) \in \mathbb{N}$, para todo $i \in I_n$, então $p \in IN$. Além disso, $p > \varphi(i)$, para todo $i \in I_n$. Desse modo, a função φ, qualquer que seja ela, não é sobrejetora, pois p é natural e não é imagem de nenhum $i \in I_n$. Portanto, qualquer que seja φ, e qualquer $n \in \mathbb{N}$, φ não é uma função bijetora. Pela Definição **1**, $\mathbb{N}$ é infinito.

Um critério para provarmos que o conjunto dos números naturais é infinito é a seguinte:

Teorema 1.3: Se um conjunto tem um subconjunto infinito, então ele também é um conjunto infinito. Prova: Seja W = X U Y e suponha que X é um conjunto infinito. Suponha, por absurdo, que W é um conjunto finito. Então, pelo Teorema 1.2, todo subconjunto de W é finito, o que contradiz a hipótese de que X é infinito. Logo, W não pode ser finito.

Para provarmos que o conjunto dos números pares também é infinito, temos:

Teorema 1.4: Dados os conjuntos *X* e *Y* e uma função bijetora $f: X \rightarrow Y$, um desses conjuntos é infinito se, e somente se, o outro também é.

Prova: Suponha *X* infinito e, por absurdo, que *Y* é finito. Pelo Teorema 1, então *X* também é finito, contradizendo a hipótese. Suponha que *Y* é infinito e, por absurdo, que *X* é finito. Pelo Teorema 1, *Y* é finito, contradizendo a hipótese.

Dessa forma, para esclarecer aos estudantes o impasse relativo à cardinalidade dos dois conjuntos numéricos, adotaremos as mesmas definições encontradas no livro do Rudin (1971).

Definição 2.0.1: Se existir uma função bijetora entre dois conjuntos A e B, dizemos que os conjuntos têm a mesma cardinalidade e escrevemos A ~ B.

- Note que a relação A ∼ B é uma relação de equivalência, isto é, satisfaz as propriedades) A ∼ A (propriedade reflexiva)
  (ii) Se A ∼ B então B ∼ A (propriedade simétrica)
  (iii) Se A ∼ B e B ∼ C então A ∼ C (propriedade transitiva)

Por esse motivo, se dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, dizemos que eles são equivalentes, segundo Cantor (1845-1918):

Exemplos 2.0.4: (a) O exemplo mais simples de conjunto enumerável – e o que serve de modelo para essa ideia – é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

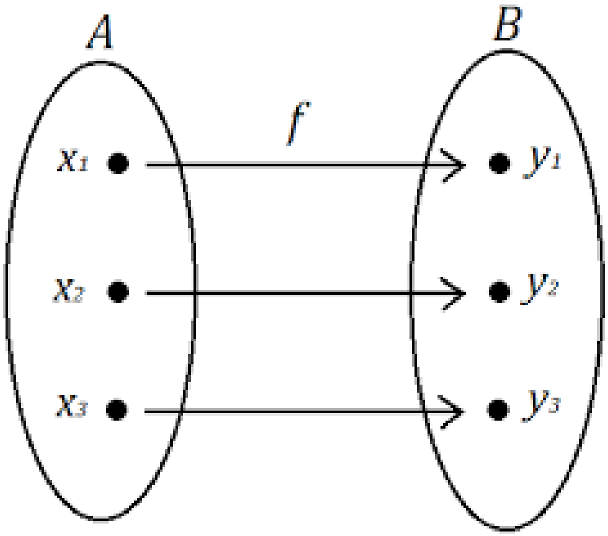
(b) O conjunto P = {2, 4, 6, . . .} dos números pares também é enumerável. Neste caso, é fácil ver que a função f: N → P dada por f(n) = 2n é bijetora.

Essa função pode ser dada por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}\ se\ n\ \text{é}\ par. \\ \dfrac{n-1}{2}\ , se\ n\ \text{é}\ \text{í}mpar\ e\ n \neq 1. \end{cases}$$

Se observarmos o conjunto dado pela função $\frac{n-1}{2}$**,** sendo n ímpar e n ≠ 1, logo veremos que haverá um correspondente no conjunto representado pela equação $\frac{n}{2}$ sendo n par. Temos, assim, a função bijetora, também chamada de bijetiva, que relaciona elementos entre duas funções diferentes. Elas são compostas pela mesma quantidade de elementos, sendo alguns deles comuns entre si (Figura 13).

Figura 13 – Diagrama Função Bijetora



Fonte: (LESSA, 2006-2022).

Sendo assim, podemos utilizar o exemplo a seguir para discutirmos o impasse entre os estudantes:

Exemplo 3: Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e ***P*** o conjunto dos números pares (positivos).

Intuitivamente o conjunto dos números pares têm bem menos elementos que o dos números naturais (já que este tem além destes, os números ímpares). Porém se correspondermos o 1 ao primeiro número par (o número 2), o número 2 ao segundo (4), 3 ao terceiro (6), e assim por diante, teremos uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e ***P:*** 1 ↔ 2, 2 ↔ 4, 3 ↔ 6,... . Isto nos leva a concluir que, em se tratando de conjuntos infinitos, o todo e a parte podem ser equivalentes, o que não faz sentido no conjunto dos finitos (DUARTE, 2013, p. 10).

Isto posto, partimos agora para responder aos questionamentos iniciais:

– *Qual dos dois seguintes conjuntos têm mais elementos. O conjunto P formado por números pares, ou o conjunto N formado por números naturais?*

Estudante A*: Os dois têm a mesma quantidade de elementos pois ambos são infinitos.*

Estudante B*: O conjunto P tem menos elementos do que N, pois o conjunto dos números naturais contém o conjunto dos números pares.*

Embora o estudante A esteja correto em sua colocação, ao dizer que “o conjunto dos números pares e o conjunto dos números naturais têm o mesmo tamanho, pois ambos são infinitos”, faz-se necessário explorar a fundamentação teórica acerca da resposta, pois tal fala se apresenta como vaga e, de certa forma, intuitiva. É necessário que os estudantes consigam perceber a construção lógica da questão, percebendo assim que a colocação do estudante B está incorreta.

Como já vimos, é possível estabelecer correspondência bijetiva entre estes conjuntos, mesmo sendo os números pares subconjuntos dos números naturais. Logo eles têm a mesma cardinalidade. Isso poderia ser demonstrado através do Hotel de Hilbert, um experimento mental matemático sobre conjuntos infinitos, criado pelo matemático alemão David Hilbert.

Alguns paradoxos são bem famosos, como esse Paradoxo do Hotel de Hilbert (Hotel, 2022) que diz que um hotel com infinitos quartos sempre poderá receber infinitos hóspedes.

Hotel de Hilbert – Trata-se de um hotel que possui infinitos quartos individuais e que expõe a cada nova situação que se apresenta, aparentemente impossível de solucionar, uma nova ideia de pensar nos levando a ideia de infinitude na Matemática, tornando possível desmembrar novas soluções.

1ª situação: Chegam infinitos hóspedes querendo se hospedar.

Solução: Acomoda-se cada hóspede em um único quarto, sem problemas. Todos os quartos ficam ocupados.

2ª situação: Chega 1 hóspede e todos os quartos estão ocupados.

Solução: Acomoda-se este novo hóspede no quarto 1 e todos os outros, já acomodados, passam para o quarto n+1.

3ª situação: Chegam 10 hóspedes e todos os quartos estão ocupados.

Solução: Acomoda-se este novo hóspede no quarto 1 e todos os outros, já acomodados, passam para o quarto n+10.

4ª situação: Chegam infinitos hóspedes e todos os quartos estão ocupados.

Solução: Todos os hóspedes acomodados passam para o quarto 2n, ficando livres todos os quartos ímpares!

5ª situação: Chegam 2 ônibus com infinitos hóspedes em cada, e todos os quartos estão ocupados.

Solução: Todos os hóspedes acomodados passam para o quarto 3n, ficando livres todos os quartos não múltiplos de 3! Os integrantes do 1º ônibus ocuparão os quartos 1, 4, ... 3n – 2. Os integrantes do 2º ônibus ocuparão os quartos 2, 5, ... –n – 1.

6ª situação: Chegam infinitos ônibus com infinitos hóspedes em cada, e todos os quartos estavam ocupados.

Solução: Todos os hóspedes acomodados passam para o quarto 2n, ocupando assim todos os quartos de potência 2. Os integrantes do 1º ônibus ocuparão os quartos 3n. Os integrantes do 2º ônibus ocuparão os quartos 5n. Os integrantes do 3º ônibus ocuparão os quartos 7n. Ou seja, toma-se todos os números primos, que são infinitos, e para cada primo associa-se um ônibus, e cada integrante dos ônibus são alocados no quarto de número enésima potência do número primo correspondente.

Em todas as situações o gerente do Hotel consegue hospedar todos os novos visitantes e, além disso, no final, sobram infinitos quartos! (YOKOYAMA, 2016, p. 1).

Isto posto, o professor terá condições de explicar e mostrar por meio do experimento que os conjuntos dos números pares e dos números naturais possuem correspondência biunívoca de elementos, sendo assim possuem, portanto, a mesma cardinalidade.

Situação 3.1

Objeto Matemático de estudo: Conjuntos numéricos

Público-alvo: 1° Ano do Ensino Médio

Relevância para a aprendizagem:

Ao abordar na Educação Básica, sobretudo no Ensino Médio, o conteúdo “conjuntos numéricos” há de se destacar a essencialidade de uma fundamentação teórica por parte do professor que esclareça aos estudantes a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos a partir de uma construção lógica de conhecimentos historicamente produzidos pela humanidade.

Trabalhar a definição dos números como elementos pertencentes a determinado conjunto apenas classificando-os, impede com que haja uma significação concreta em torno dessa discussão. É preciso oportunizar aos discentes o desenvolvimento de procedimentos matemáticos que justifiquem tais definições e conceitos.

Acreditamos que tal situação-problema possa constituir-se como momento de reflexão em torno do tema, possibilitando ao professor de matemática explorar assuntos essenciais, porém pouco discutidos em materiais didáticos da Educação Básica como o conceito de infinito, a noção de cardinalidade, enumerabilidade e densidade dos conjuntos numéricos.

É importante que no Ensino Médio o conceito de número real seja tratado de maneira mais esclarecedora e aprofundada, visto que a apresentação desse conceito de forma superficial ou equivocada poderá constituir-se em obstáculos epistemológicos de aprendizagem, além de implicar diretamente no estudo das funções, conhecimento bastante importante tanto no Ensino Médio quanto na Educação Superior.

Objetos do Conhecimento (BNCC): Densidade dos conjuntos numéricos.

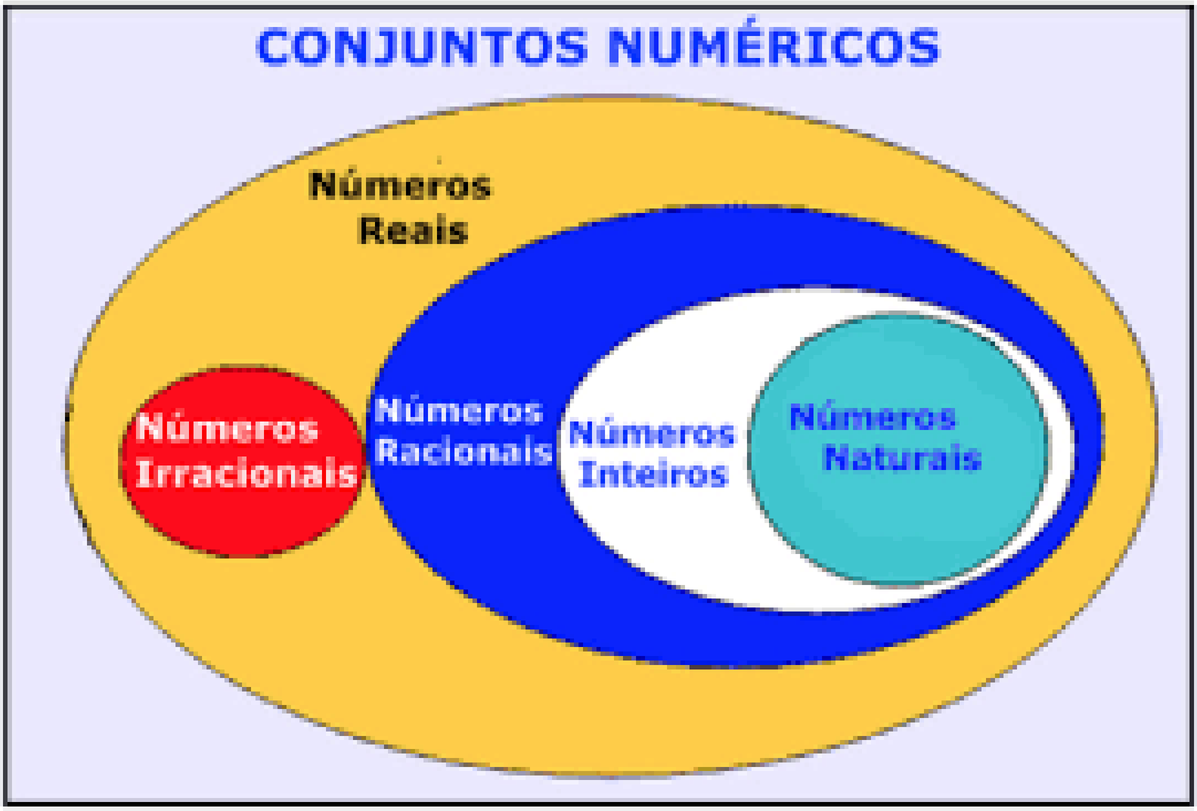
Habilidades (BNCC): (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Problema 3.1

Um professor pediu a sua turma do Ensino Médio que pesquisasse conjuntos numéricos em livros de Matemática ou na internet, pois esse seria o tema da próxima aula. Alguns estudantes encontraram as seguintes imagens em *sites* e livros de matemática e, já no início da aula, perguntaram ao professor (Figuras 14 e 15):

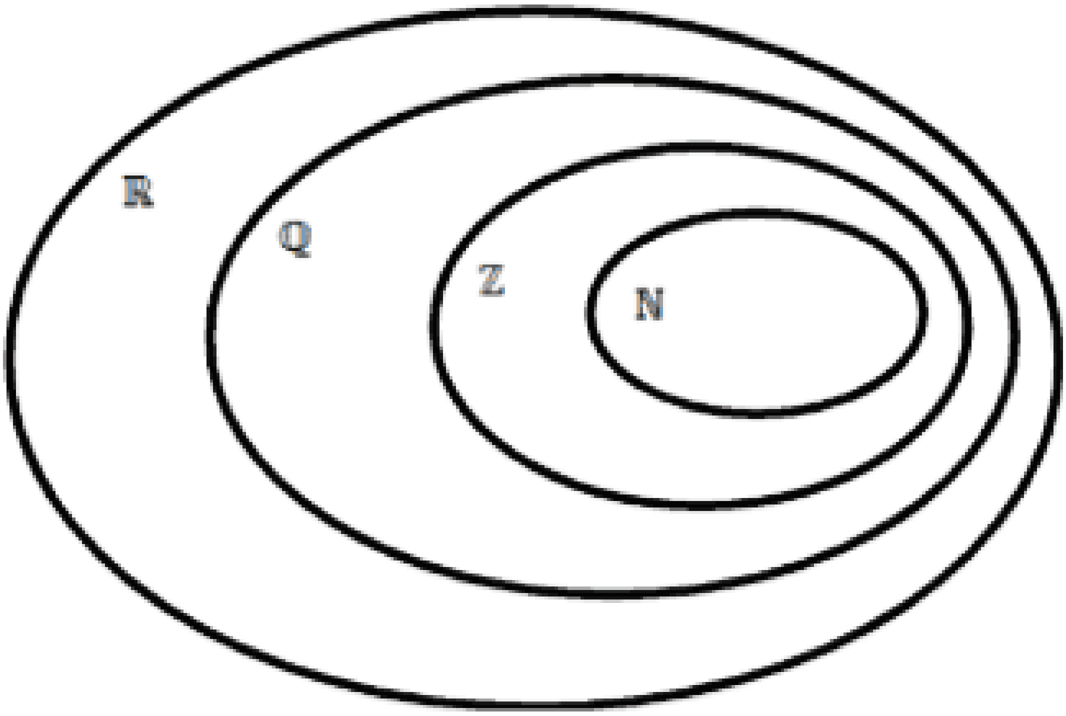
Prof. podemos concluir que o conjunto dos números naturais é menor do que o conjunto dos números inteiros, que por sua vez é menor do que o conjunto dos números racionais, e esse menor do que o conjunto dos números reais?

Figura 14 – Diagrama 1 – conjunto dos números reais



Fonte: (Site alunos online *apud* DUARTE, 2013).

Figura 15 – Diagrama 2 – conjunto dos números reais



Fonte: Elaborado pela Autora.

Como você responderia à pergunta feita pelos estudantes? Analise os diagramas e comente possíveis vantagens ou desvantagens em utilizá-los exatamente como foram propostos.

Orientações Didáticas

A seguir, algumas orientações relevantes para a complementação e o planejamento de pesquisa para a resolução da situação-problema.

Inicialmente os professores ou futuros professores, organizados em grupos, irão indicar as palavras ou termos desconhecidos para iniciar a pesquisa.

Algumas questões poderão ser levantadas pelo formador (tutor), caso não sejam propostas pelos participantes. Por exemplo:

- Qual a definição de Cardinalidade?
- Como mensurar a quantidade de elementos de um conjunto numérico?

- Dê a definição de infinito.
- Quantos infinitos existem?

O tutor poderá indicar a leitura de livros ou materiais didáticos, bem como disponibilizar a utilização de recursos como computadores com acesso a internet existentes na escola. Seguem algumas indicações:

- ✓ A Matemática do Ensino Médio (LIMA, 2006).
- ✓ Conceitos fundamentais da Matemática (CARAÇA, 1951).
- ✓ Conjuntos numéricos (DUARTE ,2013).

Para iniciarmos a discussão, é importante que o professor destaque junto aos estudantes algumas definições, como, por exemplo, o conceito de Cardinalidade, explicando que a cardinalidade não diz respeito a um conjunto numérico em particular, ou seja, não é uma definição intrínseca ao conjunto. A definição de cardinalidade diz respeito à comparação que se faz entre dois conjuntos.

No estudo da Teoria de Conjuntos, um dos fatores bastante interessante é a cardinalidade, que consiste, no caso finito, no número de elementos que determinado conjunto possui. E no caso infinito, como não podemos contar seus elementos, é necessário classificá-los de acordo com a sua enumerabilidade.

Definição:

Dois Conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade, se e somente se, existe uma BIJEÇÃO (Uma função f:A→B que é bijetora, ou seja, esta função é Sobrejetora e Injetora ao mesmo tem–o - f também de Biunívoca) entre A e B. Exemplo, se A e B são conjuntos finitos (com um número finito de elementos), então A e B têm a mesma cardinalidade se, e somente se, eles têm o mesmo número de elementos.

Esse seria um momento importante também para o professor explorar com os estudantes a respeito do conceito de infinito, um conceito que, apesar de fundamental para a ciência e muito falado, é pouco compreendido.

Os conjuntos com uma infinidade de elementos, também chamados de conjuntos infinitos, têm propriedades que muito intrigaram e surpreenderam os matemáticos ao longo da história. Num primeiro exame, essas propriedades parecem contraintuitivas. Mas, nesse caso, a intuição, em geral, é aquela formada a partir da experiência com os conjuntos finitos.

Para iniciarmos a discussão acerca das comparações, é importante trazermos as definições tecidas por Cantor (1845-1918), que desenvolveu trabalho fundamental sobre conjuntos infinitos, introduzindo o conceito de cardinalidade. Ele mostrou que há diferentes tipos de conjuntos infinitos, não sendo possível, em alguns deles, colocar seus elementos em sucessão (na forma de lista). Surgiram assim, os conceitos de conjunto enumerável e de conjunto não enumerável. Mais uma vez, nos deparamos com as definições de Cantor (1845-1918).

a) Um conjunto X é dito finito se é vazio ou se, para algum n, existe uma bijeção $f: I_n \rightarrow X$.
No último caso, dizemos que X tem cardinalidade n, isto é, X tem n elementos.
b) Se X não for finito, dizemos que X é infinito.
c) Um conjunto infinito X é dito enumerável se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Segundo Cantor, dois conjuntos, A e B tem a mesma cardinalidade quando é possível estabelecer correspondência biunívoca entre os elementos de A e os elementos de B. Isso equivale a dizer que existe bijeção entre A e B.

Proposição 1.1. Se $f: X \rightarrow Y$ é injetiva e Y é enumerável, então X é finito ou enumerável.

Chamaremos de X o conjunto dos números Pares e Y dos números Ímpares. Como X e Y são enumeráveis, existem f :X: $\rightarrow \mathbb{N}$ e g:Y: $\rightarrow \mathbb{N}$ bijeções.
Definimos:

$$h: X \times Y \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$h\ (x,y) =(\ f(x),\ g(x))$$

Então h é injetiva. Como $IN \times IN$ é enumerável, pela proposição 1.1, temos que X×Y é enumerável.

Proposição 1.2. O conjunto I dos números inteiros positivos ímpares é enumerável. De fato, *f : ℕ→ I ; f(n) =*2 *n*-1 é uma bijeção, como você pode visualizar no Quadro 1:

Quadro 1 – Números inteiros positivos ímpares

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
↓		↓		↓		↓		↓		↓
1		3		5		7		9		11

Nota: Subconjuntos infinitos de conjuntos enumeráveis são enumeráveis.

Como já demonstrado no problema 3, para responder à questão em relação à quantidade de números entre um conjunto e outro, temos uma relação de correspondência biunívoca entre os elementos, sendo o número 1 ao primeiro número par (o número 2), o número 2 ao segundo (4), 3 ao terceiro (6), e assim por diante.

Dissemos no Problema 3 que, intuitivamente, podemos dizer que dois conjuntos A e B têm o mesmo número de elementos se podemos pôr os seus elementos em correspondência de um para um, e se é possível estabelecer uma bijecção entre esses conjuntos. Usando um raciocínio análogo, podemos dizer que um conjunto A tem um menor número de elementos que um conjunto B se a cada elemento de A podemos fazer corresponder (injectivamente) um elemento de B, mas não conseguimos fazer essa correspondência esgotando todos os elementos de B.

Dessa forma, partimos agora para responder ao questionamento inicial:

– *Podemos concluir que o conjunto dos números naturais é menor do que o conjunto dos números inteiros, que por sua vez é menor do que o conjunto dos números racionais, e esse menor do que o conjunto dos números reais?*

Segundo Duarte (2013), diagramas como os apresentados no problema somente induzem os estudantes a pensarem que os números racionais são a maioria dentre os números reais. Outra conclusão precipitada que os estudantes podem ter é a de que existam números reais que não são nem racionais e nem irracionais.

Sendo assim, é de suma importância que o professor destaque com os estudantes que o diagrama da Figura 1 é uma representação equivocada do conjunto dos números reais, pois além de trazer obstáculos de aprendizagem quanto à cardinalidade entre os conjuntos numéricos, também induz a pensamentos errôneos como, por exemplo, a existência de números que não são racionais, nem irracionais.

Ressaltamos, portanto, que o conjunto dos números Naturais, Inteiros e Racionais são enumeráveis. Diferente dos Reais, sendo este um conjunto não enumerável.

Intuitivamente, um conjunto é enumerável quando seus elementos podem ser “ordenados” em uma lista de modo que qualquer elemento do conjunto possa ser alcançado se avançarmos o suficiente nessa lista. Para entendermos melhor este conceito, vamos apresentar o seguinte exemplo. Dado o conjunto {5,6,7} podemos enumerar seus elementos colocando o 5 como o primeiro da lista, o 6 como o segundo e o 7 como o terceiro. De modo análogo, podemos estender este raciocínio para os conjuntos infinitos, por exemplo, se tomarmos o conjunto dos números inteiros negativos podemos enumerá-los pondo o -1 como o primeiro elemento, o -2 como o segundo e assim por diante. Note que, listar os elementos de um conjunto para caracterizá-lo como enumerável, significa que existe uma bijeção entre os elementos desse conjunto e o conjunto dos naturais que tomam nessa situação a função ordinal.

Um conjunto é considerado não enumerável, quando não é possível “contar” seus elementos, ou seja, quando não se consegue estabelecer relação biunívoca com os elementos do conjunto dos números naturais.

Quanto a cardinalidade, Cantor (1845-1918) generalizou a ideia de número de elementos de um conjunto, considerando como sendo de mesma cardinalidade (ou tendo o mesmo número cardinal) dois conjuntos entre os quais possa ser definida uma correspondência biunívoca. Se existe uma bijeção entre os conjuntos A e B, escreve-se Card A = Card B.

Assim, temos que o conjunto dos números inteiros tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números naturais. Isso porque é possível estabelecer uma relação biunívoca entre cada inteiro e cada natural. Podendo dizer, portanto, que eles possuem o mesmo tamanho.

Comparando agora os números inteiros com os racionais, podemos dizer que ambos são conjuntos enumeráveis, visto ser possível estabelecer uma bijeção com os números naturais. Porém, tais conjuntos possuem cardinalidades diferentes, o conjunto dos números racionais engloba o conjunto dos inteiros, os números decimais finitos e os números decimais infinitos periódicos chamados também de dízimas periódicas. Portanto, isso torna o conjunto dos números racionais relativamente maior do que o conjunto dos números inteiros.

Já em relação ao conjunto dos números racionais com os reais, temos que o conjunto dos números reais é extremamente maior que o conjunto dos números racionais, visto que esteja contido nele o conjunto dos números irracionais. Ocorre que os números irracionais são não enumeráveis, enquanto os racionais são enumeráveis. Em outras palavras, os irracionais possuem uma quantidade que não dá para contar, diferentemente dos racionais que possuem uma bijeção com os naturais e, por esse motivo, é possível contá-los. Essa condição, de ter contido nele um conjunto não enumerável, faz com que o conjunto dos números reais também seja um conjunto não enumerável. Assim, concluímos que o Conjunto dos Números reais é maior que o conjunto dos números racionais, consequentemente maior que os inteiros e, portanto, maior que os naturais.

Referências

ABED, A. L. Z. **O desenvolvimento das habilidades socioemocionais como caminho para aprendizagem e o sucesso escolar de alunos da educação básica**. São Paulo: Ministério da Educação e Cultura – Conselho Nacional de Educação, 2014.

ÁVILA, G. S. S. **Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais**. RPM 5. SBM. 1984.

ÁVILA, G. S. S. **Análise Matemática para licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2006.

BIGODE, A. L. **Matemática Atual**. São Paulo: Atual, 1994.

BORTOLETTO, A. R. S. **Reflexões relativas às definições do número π (PI) e à presença da sua história em livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental**. Orientadora: Maria Guiomar Carneiro Tomazello. 2008. 139 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências Humanas, Universidade Metodista de Piracicaba, 2008. Disponível em: http://iepapp.unimep.br/biblioteca_digital/down.php?cod=NDUx. Acesso em: 6 ago. 2022.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (3.° e 4.° ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951

DUARTE, C. E. L. **Conjuntos numéricos**. 2013. 41 f. Dissertação (Mestrado em Álgebra; Análise matemática; Ensino de matemática; Geometria e topologia; Matemática Aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

HOTEL de Hilbert. Projeto: M3 - Vídeo. Criação e coordenação geral: Sarah Yakhni. Roteirista: Patrícia Roman. Campinas, SP: Unicamp, 2012. 1 vídeo (10 min). Disponível em: https://youtu.be/BsS0Kt1f8QY. Acesso em: 10 out. 2022.

IMPA. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Georg Cantor (1845-1918): **pai do infinito e do ICM**. 15 dez. 2017. Disponível em: https://impa.br/noticias/georg-cantor-1845-1918-pai-do-infinito-e-do-icm/ . Acesso em: 06 ago. 2022.

IOCHIDA, L. C.; **Os sete passos**. São Paulo: Universidade Federal de São Paulo/Escola Paulista de Medicina/Departamento de Medicina, 2001. Disponível em: https://cisama.sc.gov.br/assets/uploads/90c54-os_sete_passos.pdf. Acesso em: 5 ago. 2022.

KONRAD55_2020. Ei, você é bom em Matemática, não é? Site iFunny, 22 apr. 2020. Disponível em: https://br.ifunny.co/picture/ei-voce-e-bom-em-matematica-isso-e-entao-me-Cem37kSb7?s=cl. Acesso em: 6 ago. 2022.

LESSA, J. R. **Função Injetora**. Site Infoescola, 2006-2022. Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/funcao-injetora/. Acesso em: 7 ago. 2022.

LIMA, E. L. Deve-se usar máquina calculadora na escola? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 7, p. 20-22, 1985.

LIMA, E. L. **Análise Real**. IMPA, CNPq, 1997.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro, 2006. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2012a. v. 1.

LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro, IMPA, 2012b. v. 1. (Coleção Matemática Universitária).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO [MEC]. **Base Nacional Comum Curricular** – versão final. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 30 jul. 2022.

NIVEN, I. **Números**: Racionais e Irracionais. Tradução R. Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

OLIVEIRA, G. A. **Números Irracionais e Transcendentes**. Orientador: João Carlos Ferreira Costa. 2015. 84 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Profissional em Rede Nacional) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2015. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/127674/000844541.pdf?sequence=1&isAllowed=. Acesso em: 6 ago. 2022.

RUDIN, W. **Princípios de análise matemática**. Tradução E. R. H. Brito. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971. 296 p.

SANTOS, J. P. O. **Introdução à Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. (Coleção Matemática Universitária).

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista**. São Paulo: SEDUC, 2020.

SILVA, L. P. M. **Valor de Pi**. Site Mundo Educação, [2002]. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/valor-pi.htm#:~:text=Publicado%20por%20Luiz%20Paulo%20Moreira%20Silva. Acesso em: 6 Ago. 2022.

SOUZA, D. V. **O Ensino de Noções de Cálculo Diferencial e Integral por meio da Aprendizagem Baseada em Problemas**. 2016. 159 f. Dissertação (Mestrado em

Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2016.

YOKOYAMA, L. A. Há infinitos maiores que outros? ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo, 2016.