TAREFAS DE APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA:
THA de números racionais

Lucas Rosa Sá Oliveira

São Paulo
2023

LUCAS ROSA SÁ OLIVEIRA

TAREFAS DE APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA:
THA de números racionais

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Armando Traldi Jr.

São Paulo
2023

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

o48t Oliveira, Lucas Rosa Sá
TAREFAS DE APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA: THA de números racionais / Lucas Rosa Sá Oliveira. São Paulo: [s.n.], 2023.
153 f.

Orientador: Armando Traldi Jr

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2023.

1. Formação de Professores. 2. Educação Matemática. 3. Tha. 4. Ensino Médio. 5. Números Racionais. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

LUCAS ROSA SÁ OLIVEIRA

TAREFAS DE APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA:
THA de números racionais

Dissertação apresentada e aprovada em 29 de maio de 2023 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Armando Traldi Jr.
IFSP – *campus* São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Rogério Marques Ribeiro
IFSP – *campus* São Paulo
Membro da Banca

Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti
Universidade Federal de Ouro Preto
Membro da Banca

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus por ter me guiado nessa jornada, dando forças para vencer os obstáculos e sabedoria para escrever esta pesquisa.

Ao meu ilustríssimo orientador Prof. Dr. Armando Traldi Jr pelos conhecimentos compartilhados, pela empatia e parceria na trajetória de minha aprendizagem.

Aos membros da Banca de Qualificação, composta pelo presidente da Banca, o Prof. Dr. Armando Traldi Jr do IFSP/Campus São Paulo, pelo Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti da UFOP, e pelo Prof. Rogério Marques Ribeiro do IFSP/Campus São Paulo pelas relevantes contribuições para o resultado desta pesquisa.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, bem como todos os docentes e discentes do Programa de Mestrado Profissional em Ciências e Matemática (ENCIMA) – IFSP.

Ao meu estimado pai, Valter da Silva Marques de Oliveira (in memoriam), que tanto me ajudou e incentivou durante minha trajetória de estudos.

A minha mãe Izabel e meu irmão Eduardo pelo apoio e por serem minha inspiração de vida.

A todos meus colegas de profissão da Etec São Mateus pelo apoio durante o desenvolvimento desta pesquisa.

E não menos importantes, aos meus digníssimos estudantes do Ensino Médio Integrado ao Técnico do curso de Nutrição e Dietética (2020 – 2022), pela parceria e pelo trabalho fantástico desenvolvido ao longo desses anos.

RESUMO

OLIVEIRA, Lucas Rosa Sá. **Tarefas de Aprendizagem de Matemática: THA de números racionais**. 2023. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. São Paulo, 2023.

Esta pesquisa é de natureza qualitativa, do tipo pesquisa-ação, que possui como objetivo investigar potencialidades e desafios na elaboração e no desenvolvimento de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem na perspectiva do professor-pesquisador e dos estudantes sobre os números racionais. Para isso, foram elaboradas três tarefas matemáticas alinhadas aos documentos curriculares e resultados de pesquisas da área da Educação Matemática, em uma perspectiva construtivista, focando os conceitos de: parte-todo, quociente, medida, razão e operador. As tarefas foram desenvolvidas com um grupo de estudantes da 3ª série de uma escola de Ensino Médio Técnico do Estado de São Paulo. Após o desenvolvimento das tarefas matemáticas com os estudantes, foi realizada a análise dos dados fundamentada na teoria APOS, na perspectiva de compreender e evidenciar as potencialidades e desafios do grupo de estudantes ao resolverem essas tarefas da THA. Como principais desafios destacam-se: preparar tarefas a partir do conhecimento matemático atual dos estudantes sobre números racionais, elaborar tarefas de modo que sejam significativas para os estudantes, articular representações e significados dos números racionais nas tarefas e avaliar o desenvolvimento dos estudantes durante a resolução das tarefas. As possibilidades são: conhecer diferentes formas como os estudantes resolvem as tarefas, pesquisar referências teóricos sobre os números racionais e teorias de ensino que acrescentem na elaboração das tarefas, refletir sobre o objetivo e processo hipotético de aprendizagem da THA e motivar os estudantes ao propor tarefas iniciais, reflexiva e de antecipação que estejam interligadas, tornando-os sujeitos ativos na construção do conhecimento. Do processo investigativo emergiu o Produto Educacional, intitulado “Tarefas de Números Racionais e Frações para o Ensino Médio”, o qual é a THA composta por quatro tarefas matemáticas envolvendo representações e significados dos números racionais.

Palavras-chave: Números Racionais. Ensino Médio. Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Teoria APOS.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Lucas Rosa Sá. **Math learning tasks: THA of rational numbers**. 2023. Master's thesis (Master's in Science and Matematics Teaching) – Federal Institute of Education, Science and Technology of São Paulo. São Paulo, 2023.

This research is the qualitative nature, of the type action-research, which aims to investigate potentialities and challenges in the elaboration and development of a Hypothetical Learning Path from the perspective of the professor-researcher and the students about rational numbers, developed with a group of high school students. For this, three mathematical tasks were elaborated in line with the curriculum documents and research results in the area of Mathematics Education, in a constructivist perspective, focusing on the concepts of: part-whole, quotient, measure, reason and operator. The tasks were developed with a group of 3rd grade students from a Technical High School in the State of São Paulo. After the development of mathematical tasks with the students, data analysis was carried out based on the APOS theory, with a view to understanding and highlighting the potentialities and challenges of the group of students when solving these THA tasks. As main challenges stand out: preparing tasks from students current mathematical knowledge about rational numbers, designing tasks so that they are meaningful to students, articulating representations and meanings of rational numbers in the tasks, and evaluating the students development during resolution of the tasks. The possibilities are: knowing different ways in which students solve tasks, researching theoretical references on rational numbers and teaching theories that add to the preparation of tasks, reflect on the objective and hypothetical learning process of THA and motivate the students by proposing intial-tasks, reflexive and anticipatory that are interconnected, making them active subjects in the construction of knowledge. From the investigative process emerged the Educacional Product, entitled "Tasks of Rational Numbers and Fractions for High School", which is the THA composed of four mathematical tasks involving representations and meanings of rational numbers.
Keywords: Rational Numbers. High School. Hypothetical Learning Path. APOS Theory.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

"A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu,
mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre
aquilo que todo mundo vê."
(Arthur Schopenhauer)

Nesta parte, apresenta-se a importância do ensino dos números racionais, a principal motivação deste estudo, o que pesquisas revelam acerca do ensino desses números no Ensino Médio, o que os documentos curriculares recomendam para o ensino desse conjunto numérico, a relevância desse objeto matemático para os estudantes, o caminho buscado pelo pesquisador para se aperfeiçoar, uma breve introdução sobre os principais referenciais teóricos utilizados, a problemática, as hipóteses e, por fim, os objetivos desta pesquisa.

Os números racionais estão presentes em diversas situações do cotidiano, seja na contagem do dinheiro, na leitura de receitas de alimentos, no cálculo de distância e tempo, entre outros. Também podem ser expressos por um tipo de representação: numérica (número decimal, fração, porcentagem) ou geométrica (figuras). Se as relações de o dobro e o triplo são importantes, as que apresentam um meio, um terço também são por significar o processo inverso. Portanto, o estudo dessas representações acontece durante a Educação Básica e são relevantes à formação do cidadão.

Em meus oito anos como professor de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e Médio Técnico das escolas estaduais de São Paulo, observei alguns desafios comuns entre estudantes no uso dos números racionais que me motivaram a pesquisar estratégias para superá-los. Esses desafios ocorrem, por exemplo, na representação e conversão numérica/geométrica, na compreensão de seus diferentes significados, na interpretação de situações-problema e nas operações básicas, em especial com frações.

Nesse sentido, os números racionais representam maior desafio para estudantes que estudaram pouco esse conjunto, no sentido de compreender e operar com suas representações e seus significados nos anos finais do Ensino Fundamental, e para professores que precisam revisá-los muitas vezes suas em suas aulas no Ensino Médio. Pesquisas acadêmicas realizadas por Severo (2009), Krug (2015) e Oliveira (2017), mostraram resultados em que seu ensino costuma ser pautado em processos mecanizados, com exercícios genéricos e sem uma contextualização coerente com a realidade do estudante. Os autores também apresentaram resultados mostrando que os estudantes possuem dificuldades na compreensão das representações e significados dos números racionais. Ainda, acrescentaram aos resultados as vantagens em utilizar a metodologia ativa no ensino e as possibilidades de criar estratégias diversificadas para a construção de argumentações nas resoluções de tarefas.

Portanto, fica claro a importância de investigar as potencialidades para o ensino-aprendizagem dos números racionais a partir de novas perspectivas, seguindo as orientações de documentos curriculares e modelos de ensino, para proporcionar uma aprendizagem que seja relevante na vida do estudante.

Além disso, considerando a importância do ensino-aprendizagem dos números racionais, avaliações externas como a da Educação Básica, denominada Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), realizada por estudantes de outros anos e da 3ª série do Ensino Médio, abordam esse conjunto por meio de competências envolvendo conteúdos matemáticos. Dentre as competências da matriz de referência para avaliação do SARESP da 3ª série do Ensino Médio, pode-se destacar:

> Competência de área 1: Desenvolver o raciocínio quantitativo e o pensamento funcional, isto é, o pensamento em termos de relações e a variedade de suas representações, incluindo as simbólicas, as algébricas, as gráficas, as tabulares e as geométricas. Aplicar expressões analíticas para modelar e resolver problemas. Competência de área 3: Construir e ampliar noções de variação de grandeza para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. Compreender e fazer uso das medidas, ou de sistemas convencionais, para o cálculo de perímetros, áreas, volumes e relações entre as diferentes unidades de medida. Competência de área 4: Ler, construir e interpretar informações de variáveis expressas em gráficos e tabelas. (SÃO PAULO, 2009, p. 86-88).

Também, assim como o SARESP é relevante para verificar o desempenho dos estudantes na Educação Básica, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que além de avaliar competências e habilidades desenvolvidas por estudantes, é usado no processo seletivo de estudantes para o ingresso em cursos superiores, tanto de instituições públicas, como privadas. Destaca-se na matriz de referência do ENEM 2022, as seguintes competências relacionadas ao conjunto dos números racionais:

> Competência de área 1. – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais. H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais. H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem. H3 – Resolver situação-

> problema envolvendo conhecimentos numéricos. H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas. H5 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos. (BRASIL, 2021, p. 5).

Atualmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o principal documento normativo que fundamenta as propostas curriculares para Educação Básica. Dessa forma, pode-se destacar a importância do desenvolvimento de competências e habilidades envolvendo a: leitura, escrita, ordenação, compreensão e resolução de problemas com números racionais nos anos finais do Ensino Fundamental.

Embora na BNCC não seja abordado especificamente esse conjunto numérico no Ensino Médio, é ressaltado que a área da Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio “propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental”. (BRASIL, 2018, p. 527). Com isso, o próprio sugere que os conhecimentos matemáticos estudados no ciclo anterior, sejam explorados sob uma visão integrada à realidade dos estudantes em diversos contextos no Ensino Médio.

À vista disso, para os estudantes desenvolverem as competências e habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas, é necessário que eles ampliem seu próprio modo de: raciocinar, representar, comunicar, argumentar, aprendendo conceitos e produzindo representações e procedimentos mais sofisticados. (BRASIL, 2018).

Ainda neste documento, destacam-se as seguintes competências específicas da Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio:

> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 530).

Logo, essas competências podem estar relacionadas a diferentes formas de organizar a aprendizagem, com base nos próprios processos de construção do conhecimento matemático, assim como em situações do cotidiano. (BRASIL, 2018).

Diante de minhas inquietações, senti a necessidade como professor de Matemática da

Educação Básica, em buscar meios para aprimorar as minhas estratégias de ensino sobre conceitos matemáticos relacionados ao conjunto dos números racionais. Procurei, então, aperfeiçoar os meus conhecimentos ingressando no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), o que possibilitou-me aprofundar o estudo de metodologias inovadoras na compreensão do currículo e na expectativa de implementar as recomendações propostas pelos documentos curriculares à prática de sala de aula.

Ao iniciar os estudos no mestrado, aproximei-me do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Profissional (GPEMP), que faz parte do Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIM), coordenado pelo professor Dr. Armando Traldi Jr., que coordena o projeto de pesquisa "Trajetória hipotética de aprendizagem: formação do professor e a implementação curricular de Matemática". Identifiquei-me com os estudos desenvolvidos pelo grupo, o que me motivou a ampliar os meus conhecimentos relacionados a teoria de Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), proposta em 1995 por Martin Simon.

Segundo Simon (1995) uma THA é composta pelo objetivo de aprendizagem dos estudantes, pelas tarefas de aprendizagem, e pelo processo hipotético de aprendizagem. Essa teoria pode ser vista como uma ferramenta de ensino inovadora, sob uma perspectiva construtivista, que contribui para o planejamento de aulas eficazes de Matemática. Para o autor, se o estudante fosse empenhado em trabalhar tarefas que não foquem apenas em procedimentos mecânicos, mas que abordem a construção do conhecimento matemático a partir de seu conhecimento atual, a aprendizagem seria mais ampla e significativa.

Dessa forma, o uso da THA torna-se importante para o processo de ensino-aprendizagem de matemática, possibilitando ao professor selecionar tarefas matemáticas que promovam por meio de tarefas o desenvolvimento da capacidade de: reflexão, raciocínio lógico e resolução de situações-problema, bem como "selecionar tarefas de aprendizagem que estimulem o envolvimento do estudante com o conceito a ser aprendido". (SIMON, 2004, p. 92).

Pires (2009) apresenta a visão de outros pesquisadores a respeito da THA, que a consideram como uma ferramenta de investigação e de planejamento de aulas não só da Matemática. Essa autora afirma que autores exploram a THA em temas específicos e mostra haver pesquisas que objetivam compreender o planejamento do professor, enquanto outras estão centradas no processo do desenvolvimento e avaliação da aprendizagem. Portanto, existem muitas perspectivas de cenários no estudo da THA relacionadas ao estudante, ao professor e a tarefa.

Diante disso, esta pesquisa visa responder a seguinte problemática: ***quais potencialidades e desafios são revelados no processo de elaboração e desenvolvimento de uma THA sobre números racionais, desenvolvida com um grupo de estudantes do Ensino Médio?***

Por hipóteses, temos que o grupo de estudantes desenvolve o conhecimento relacionado aos números racionais quando: ***i)*** compreende as representações dos números racionais; ***ii)*** apresenta conversões adequadas entre as diferentes representações dos números racionais; e ***iii)*** interioriza os significados dos números racionais para a resolução de tarefas.

Portanto, o objetivo desta pesquisa é: investigar potencialidades e desafios na elaboração e no desenvolvimento de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem na perspectiva do professor-pesquisador e dos estudantes sobre os números racionais, implementada com um grupo de estudantes do Ensino Médio.

Esse objetivo se desdobrou nos seguintes objetivos específicos:

- ➢ Levantar resultados de pesquisas na área da Educação Matemática a respeito do ensino dos diferentes significados dos números racionais, e incorporar os resultados nas tarefas elaboradas nesta pesquisa;
- ➢ Compreender os diferentes significados das tarefas matemáticas sobre números racionais;
- ➢ Investigar a compreensão de um grupo de estudantes sobre as representações e os significados dos números racionais;
- ➢ Refletir sobre o processo de desenvolvimento da compreensão de um grupo de estudantes sobre as representações e os significados dos números racionais;
- ➢ Propor um produto educacional que aborde as representações e os significados dos números racionais.

Este trabalho ficou dividido em cinco capítulos: a Introdução, o capítulo I trata dos pressupostos teóricos e da teoria de análise que fundamentam esta pesquisa; o capítulo II que aborda o percurso metodológico para elaborar e desenvolver este estudo; o capítulo III que apresenta a elaboração, o desenvolvimento e a análise da THA e as considerações.

CAPÍTULO I
PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E TEORIA DE ANÁLISE

"O conhecimento não pode ser uma cópia, visto que é sempre uma relação entre objeto e sujeito."
(Jean Piaget)

Neste capítulo, apresenta-se as teorias utilizadas para análise, elaboração e desenvolvimento das tarefas matemáticas compostas pelas tarefas. Assim, temos a THA e suas possibilidades como método de ensino; o objeto matemático sendo os números racionais com suas representações e seus significados; e a teoria APOS, que contribui na investigação e análise do processo de ensino-aprendizagem envolvendo as tarefas matemáticas.

1.1 TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM (THA)

O pesquisador Martin Simon desenvolveu um modelo de ensino em 1995, que possibilita identificar os principais aspectos importantes para o planejamento e desenvolvimento de aulas de matemática. Esse modelo tem como base a perspectiva construtivista de Jean Piaget (1896 - 1980), que apresenta o estudante como sujeito ativo no papel de sua aprendizagem, e o professor como mediador na construção do conhecimento.

A ***Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA)*** "é composta por três componentes: o objetivo de aprendizagem que define a direção, as tarefas de aprendizagem, e o processo hipotético de aprendizagem – uma previsão de como o pensamento e a compreensão do aluno evoluirão no contexto das tarefas de aprendizagem". (SIMON, 1995, p. 136, tradução nossa). Por isso, a THA proporciona ao professor um modelo de ensino, que pode contribuir para o planejamento e desenvolvimento de tarefas matemáticas relevantes para o estudante, além de possibilitar inovadoramente a investigação do processo de ensino-aprendizagem de matemática.

Diante disso, o autor descreve que para elaborar a THA deve-se considerar alguns aspectos importantes: ***(a)*** a identificação clara do objetivo de aprendizagem do professor; ***(b)*** o levantamento do conhecimento matemático atual dos estudantes; ***(c)*** o planejamento de tarefas matemáticas para alcançar o objetivo; e ***(d)*** as tarefas matemáticas como ferramentas para aprendizagem de conceitos matemáticos. Após definir o objetivo de aprendizagem, é necessário pensar sobre o processo hipotético de aprendizagem – considerando o conhecimento matemático atual dos estudantes e os desafios que surgirão no percurso do desenvolvimento da THA – que contemplem um conjunto de tarefas matemáticas adequadas ao objetivo. Desse modo, essas etapas podem viabilizar a elaboração de tarefas matemáticas eficazes para o ensino-aprendizagem de matemática.

Pires ao utilizar a THA em seus estudos, afirmou que outros conhecimentos do professor de Matemática devem ser considerados na elaboração da THA, destacando:

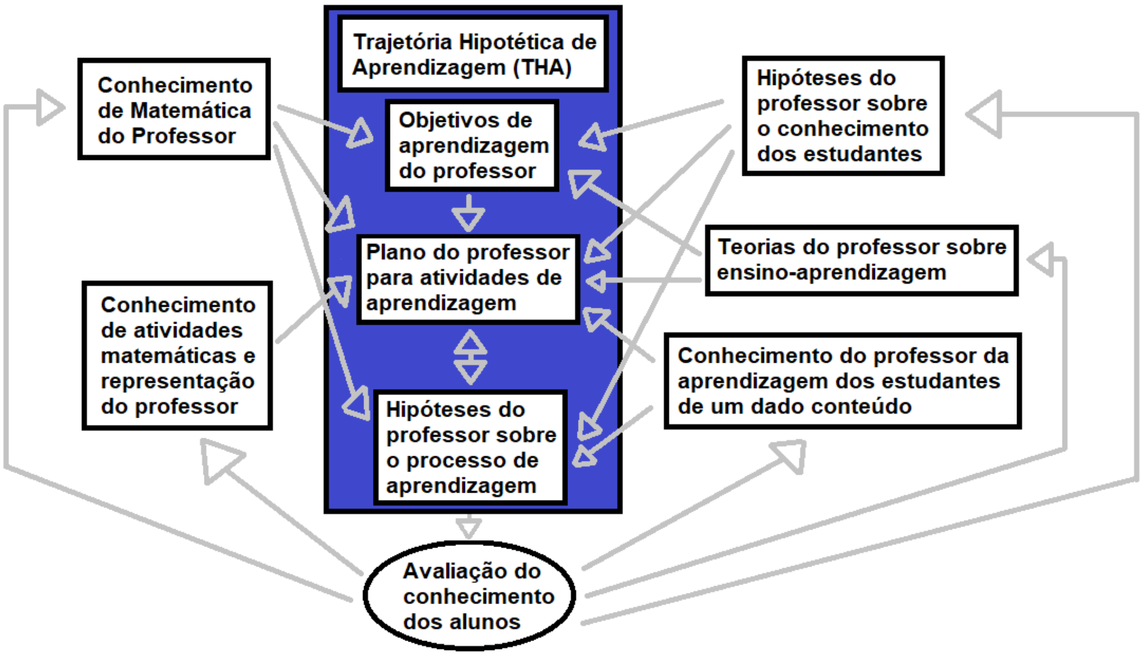
> Teorias de ensino sobre Matemática; representações matemáticas; materiais didáticos e atividades; e teorias sobre como alunos constroem conhecimentos sobre um dado assunto – saberes estes derivados da pesquisa em literatura e/ou da própria experiência docente. (PIRES, 2009, p. 154).

Simon (2004) também discute um conhecimento importante para compreender o desenvolvimento das estruturas mentais dos estudantes, ao realizar as tarefas matemáticas que compõe a THA, denominado mecanismo de relação "atividade-efeito". Esse mecanismo é uma criação da abstração reflexiva de Piaget, e permite descrever como uma tarefa com objetivos traçados pelos estudantes pode criar novas concepções sofisticadas. O estudante realiza uma tarefa (conjunto de ações) que possibilita ao professor observar os efeitos da tarefa realizada, assim o estudante cria registros mentais (relação da atividade-efeitos), que podem ser analisados e avaliados pelo professor na busca da compreensão do pensamento matemático do estudante.

Nesse sentido, as tarefas possuem potencial para auxiliar estudantes na construção de novos conceitos a partir da perspectiva de relação atividade-efeito. Destacam-se três tipos de tarefas: ***tarefas iniciais***, realizadas com os conhecimentos prévios dos estudantes; ***tarefas reflexivas***, levam os estudantes a refletirem e geram abstração de regularidades na relação atividade-efeito; e ***tarefas de antecipação***, que exigem abstração e análise de regularidades nessa relação. (SIMON; TZUR, 2004).

De acordo com Simon (1995), os elementos de construção da THA denominado *"*Ciclo de Ensino de Matemática*"*, representam as inter-relações cíclicas que ocorrem entre o conhecimento do professor, a avaliação do conhecimento dos estudantes, a realização das tarefas e a THA, como mostra a figura 1.

Figura 1 – Domínios do conhecimento do professor, THA e interações com os alunos



Fonte: Simon (1995, p. 137, tradução nossa).

As tarefas matemáticas elaboradas são baseadas: ***(i)*** nos objetivos de aprendizagem do professor; ***(ii)*** nas hipóteses do professor sobre o conhecimento dos estudantes; ***(iii)*** nas hipóteses do professor sobre o processo de aprendizagem; ***(iv)*** no conhecimento de Matemática do professor; ***(v)*** no conhecimento de tarefas matemáticas do professor; ***(vi)*** nas Teorias de Ensino-Aprendizagem do professor; ***(vii)*** no conhecimento do professor sobre a aprendizagem dos estudantes sobre um conteúdo; e ***(viii)*** na avaliação do conhecimento dos estudantes.

Essas hipóteses são baseadas nas tarefas envolvidas e são interdependentes. Também, o conhecimento do professor sobre os estudantes possibilita a criação do objetivo de ensino e das hipóteses, que contribuem para o desenvolvimento dos processos hipotéticos de aprendizagem e das tarefas matemáticas.

Por ser construída nesse processo, a THA está sujeita a modificações do início ao fim de seu desenvolvimento. Dessa maneira, a palavra "trajetória" apresentada por Simon (1995) representa, por exemplo, uma viagem planejada que no caminho há pequenos ajustes devido às condições e situações encontradas sem alterar a condição de adquirir novos conhecimentos, o caminho é a trajetória e o caminho antecipado é a trajetória hipotética.

Portanto, o professor deve ajustá-la no sentido de refletir sobre o objetivo alcançado, mediando o processo de aprendizagem, e avaliando constantemente os desafios encontrados pelos estudantes nas tarefas a fim de melhorá-las. Os estudantes podem reagir de diferentes maneiras diante do desenvolvimento das tarefas ao dependerem de suas experiências matemáticas, então é necessário reformular as tarefas se algum conceito não for alcançado.

Dessa forma, a THA pode possibilitar caminhos para a reflexão sobre a construção de conhecimentos matemáticos e afins; e também, pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, sob uma perspectiva inovadora, na implementação dessa teoria no currículo de Matemática nas escolas da Educação Básica.

Para o professor poder compreender as potencialidades das tarefas da THA e saber como aproveitá-las em suas aulas, é necessário que antes ele saiba a diferença entre os tipos de tarefas e a atividade, bem como utilizá-las de maneiras eficazes para potencializar o ensino-aprendizagem de matemática, o que será abordado no próximo tópico.

1.2 TAREFA E ATIVIDADE

A matemática é caracterizada por ser abstrata, ou seja, por mais que se possa associar objetos matemáticos (números, figuras, dentre outros) ao meio físico, não se pode encontrá-los concretamente em lugar nenhum. Outro aspecto importante da matemática é a relação entre um objeto matemático e conceito matemático. Essa relação é pessoal em todos os estudantes, cada um tem sua forma de aprender e pensar, o que ocasiona aos estudantes terem seus próprios conhecimentos, construídos de diferentes maneiras, sobre tais objetos e conceitos matemáticos.

Nesse sentido, há estudantes que contam com as mãos, desenham palitinhos e ainda usam o cálculo mental para contar a fim de realizar uma tarefa, ambos utilizam o mesmo objeto matemático, porém abordam-no segundo seus conhecimentos e preferências. Com o conceito matemático não é muito diferente, por exemplo, para calcular um volume de um recipiente o estudante pode utilizar fórmulas, adaptações de medidas e objetos para mensurar e pressupor esse volume. Logo, o conceito de volume estudado pelos estudantes é o mesmo, só que segundo seus conhecimentos matemáticos construídos ao longo de sua formação pode se apresentar de diferentes maneiras.

Um estudante ao afirmar que uma representação fracionária é maior ou menor que outra apenas observando, sem compreender o porquê do conceito matemático que torna isso fato, ele não está aprendendo tal conceito, apenas identificou um padrão de entradas e saídas, por exemplo. O professor deve se preocupar em desenvolver a base dos conceitos matemáticos e não apenas focar o cálculo, incentivando o estudante a questionar e discutir o por quê (dúvidas) e porquês (curiosidades) desses conceitos.

Segundo Simon “um conceito matemático não é resultado de um processo empírico, em que o aluno apenas vê um padrão entre as entradas e as saídas”. (SIMON, 2020, p. 4, nossa tradução). Em face do exposto, aprender não é apenas ver, pois o estudante precisa ter o conceito matemático para reconhecer um exemplo dele, sem esse conceito, apenas o objeto matemático é visualizado. Portanto, o objetivo de ensino precisa estar nas tarefas que os estudantes se envolvem para resolvê-las, por meio das representações conhecidas, então o conceito matemático pode ser aprendido e explorado por meio dessas tarefas.

O estudante, ao resolver uma tarefa por meio de uma sequência de ações já conhecida por ele, pode chegar num momento em que não precise mais realizar essas ações por poder antecipar o resultado dessas ações. Diante disso, o conceito matemático pode ser promovido a partir de uma tarefa já conhecida pelo estudante, antecipando o resultado das ações sem ter que realizá-las. (SIMON, 2020).

Ainda, para Simon (2020, p. 10, nossa tradução) “[...] A articulação de um conceito envolve a especificação da compreensão da necessidade lógica e inclui a identificação do conhecimento prévio sobre o qual se baseia a compreensão”. Então os conceitos matemáticos se desenvolvem por meio das ações dos estudantes, seja física ou mental, e que ao utilizarem ações conhecidas são apoiados na construção de novos conhecimentos sobre seus conhecimentos prévios. Ao antecipar o resultado de ações, de maneira que não precise mais realizar essas ações para determinar o resultado, significa que o conceito matemático foi assimilado pelo estudante.

Esses objetos e conceitos matemáticos estão presentes em todo processo de ensino-aprendizagem, organizados em tarefas de matemática. Para desenvolver essas tarefas com eficiência é necessário compreender a diferença entre tarefa e atividade, bem como seus tipos.

De acordo com Ponte (2014), o ensino de Matemática que valoriza o papel ativo do estudante na aprendizagem precisa da noção de tarefas, pois as tarefas são elementos fundamentais na organização da atividade. O autor aborda os diferentes tipos de tarefas para: apoiar a aprendizagem; verificar o que o estudante aprendeu (tarefas para avaliação); e também, compreender de maneira aprofundada as capacidades, processos de pensamento e desafios dos estudantes (tarefas para investigação).

Além disso, Ponte também apresenta alguns questionamentos sobre as tarefas propostas em sala de aula, como elas são interpretadas por estudantes e professores, como podem ser trabalhadas nesse ambiente, quais desafios podem surgir na resolução das tarefas pelos estudantes, os tipos de tarefas e o modo que o professor pode lidar com estes desafios. Nesse sentido, o autor afirma que é importante entender o conceito de tarefa relacionando próximo ao conceito de atividade, porém sendo distinto. Também, para ele é importante considerar os diferentes tipos de tarefas, analisando suas vantagens e limitações. Outro aspecto importante são as representações das tarefas que precisam ser articuladas em seus diferentes tipos de representações. (PONTE, 2014).

Ainda, o autor apresenta a noção de atividade como um sistema de ações físicas ou mentais, que incluem a realização de muitas tarefas num determinado contexto. Enquanto a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações sobre a atividade propostas pelo professor, sendo exterior ao estudante e resultando em diversas atividades.

Enquanto as Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (NCTM), o qual é um documento importante na orientação curricular para o ensino de Matemática, trata da distinção entre tarefa e atividade, como apresentando anteriormente, sendo a tarefa exercícios, problemas, questões, projetos, construções e aplicações no qual os estudantes interagem entre si por meio da atividade. (PONTE, 2014, p. 16).

Também, o autor afirma que as tarefas longas podem ser muito ricas, mas podem causar a dispersão dos estudantes, principalmente se forem ligadas a um contexto da realidade e formuladas somente nos procedimentos puramente matemáticos. Por isso, a diversificação das tarefas é necessária para cada tarefa desempenhar seu papel efetivo no processo de ensino-aprendizagem.

Ponte (2014, p. 21 – 22) apresenta quatro tipos de tarefas que possuem importância no ensino: ***(i)*** tarefa de natureza mais fechada (exercícios, problemas) – relacionada ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes baseados na relação entre dados e resultados; ***(ii)*** tarefa de natureza mais acessível (explorações, exercícios) – contribui para o estudante ter um elevado grau de sucesso e confiança em sua resolução; ***(iii)*** tarefa de natureza mais desafiante (investigações, problemas) – indispensável para a evolução do estudante na experiência matemática; e ***(iv)*** tarefa de cunho mais aberto – essenciais para desenvolver no estudante competências e habilidades ao lidar com situações complexas.

Sendo assim, o professor deve organizar uma sequência de tarefas diversificadas de modo que os estudantes atinjam os objetivos de aprendizagem, conforme Ponte (2014, p. 22):

> além da diversificação das tarefas, é importante que estas proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos, a compreensão dos procedimentos, o conhecimento das formas de representação relevantes e das conexões de cada conceito dentro da Matemática e com outros domínios.

Diante do exposto, este trabalho considera a ***tarefa*** como um conjunto de questões, problemas e desafios elaborados com intuito de atingir os objetivos previstos sobre a aprendizagem de um conhecimento matemático. E a ***atividade*** como um conjunto de ações físicas ou mentais para atingir os objetivos propostos na tarefa.

1.3 NÚMEROS RACIONAIS: REPRESENTAÇÕES E SIGNIFICADOS

Os ***números racionais*** surgiram no Antigo Egito (3.000 a.C.), com a necessidade de representar as partes de um número inteiro. Nos períodos das cheias, o rio Nilo inundava as terras que ficavam submersas, tornando-se férteis para o cultivo da agricultura. Assim que as águas baixavam era necessário remarcar os limites de terrenos de cada proprietário, para os impostos serem arrecadados corretamente. Os matemáticos demarcavam as terras com cordas para resolver esse problema. As cercas ou marcos ficavam submersos durante essas épocas levando a criação de um método abstrato de delimitação dessas terras. Diante disso, não eram encontrados apenas números inteiros, então daí surgiu a necessidade de utilizar os números fracionários. (BOYER, 1974).

Nesse sentido, os números racionais surgiram da necessidade de medir, que significa comparar grandezas pela divisão de dois números inteiros obtendo um quociente. Para que essa comparação seja distinguida, criou-se um padrão de comparação para todas as grandezas do mesmo tipo, denominada: unidades de medida. Por exemplo, litro e mililitro para volume, quilograma e grama para massa, entre outros.

Ao se efetuar uma divisão de dois números inteiros, nem sempre há uma representação no conjunto dos inteiros para esse quociente. Portanto, foi necessário criar um novo conjunto numérico para resolver esse problema, o conjunto dos Números Racionais. Esse conjunto é representado pela letra $\mathbb{Q}$, e com o passar das décadas, outras civilizações aprimoraram esse conceito para as representações que conhecemos atualmente.

Segundo Guidorizzi (2013, p. 19), os números racionais são representados por "$\mathbb{Q} = \left\{\boldsymbol{\frac{a}{b}} \middle| \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}\right\}$, no qual $\mathbb{Z}$ indica o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, \boldsymbol{-3}, \boldsymbol{-2}, \boldsymbol{-1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \ldots\}$". Nesse sentido, o ensino dos números racionais tem se tornado objeto de estudo e pesquisa no campo da Educação Matemática, pelos desafios de compreensão das suas representações e seus significados por parte dos estudantes e pela abordagem metódica dos professores. Assim sendo, as principais ideias desenvolvidas sobre os números racionais no currículo escolar tendem a ser abordadas por uma forma específica de interpretação e mecanizada pelos professores, que deixam de lado outras representações e significados que poderiam ser mais bem explorados, mostrando reflexos na compreensão desse conjunto numérico entre estudantes e professores. (KIEREN, 1976).

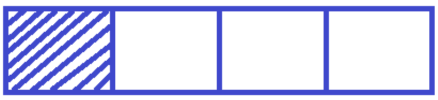
Os números racionais também podem ser representados nas seguintes formas: ***numérica*** (fracionária $\frac{2}{5}$, decimal $\mathbf{0,4}$ e percentual $\mathbf{40}$%) e ***geométrica*** (figuras divididas em partes iguais). Na forma fracionária, se dividir o numerador 2 pelo denominador 5, obtém-se a forma decimal *0,4*. Esse tipo de divisão pode resultar em um decimal finito ($\frac{1}{2} = \mathbf{0,5}$) ou decimal infinito conhecido como dízima periódica ($\frac{1}{3} = \mathbf{0,333\ ...}$). Na forma percentual, a noção de *Porcentagem* está na fração cujo denominador é 100, representada por $\boldsymbol{n}$% ou $\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{100}}$, assim $\mathbf{0,4}$ pode ser escrita como $\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}}$ ou $\mathbf{40}$%.

Ainda, pode-se destacar mais uma ideia matemática importante na representação fracionária, a ***Equivalência***. A fração equivalente é a fração que representa o mesmo número ou quantidade e para encontrá-la basta multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número. Por exemplo, a fração $\frac{2}{5}$ multiplicada por 20, $\frac{2 \cdot 20}{5 \cdot 20}$ resulta na fração equivalente $\frac{40}{100}$, representando o mesmo valor de $\mathbf{0,4}$.

O pesquisador Kieren (1976) apresentou ***quatro significados*** (subconstrutos) básicos e fundamentais no processo de compreensão e construção de número racional: ***quociente, medida, razão e operador***. O autor não considera o significado parte-todo como outros pesquisadores, pois para ele essa ideia já está presente no quociente, medida e operador. Porém, é importante para o estudante conhecer esse significado antes de usar os outros.

A relação ***parte-todo*** significa a divisão do número fracionário $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$, em que o todo foi dividido em "$\boldsymbol{b}$" partes sendo consideradas "$\boldsymbol{a}$" partes. Nesse sentido, temos como exemplo a fração $\frac{1}{4}$ que indica que o todo está divido em quatro partes e que uma delas foram tomadas. Pode-se utilizar a representação geométrica para mostrar essa fração de uma forma mais clara, como mostra a figura 2.

Figura 2 – Representação da Parte-todo



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

O ***quociente*** representa o resultado da divisão de dois números inteiros, podendo ser associado a definição formal de números racionais, no qual $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$, com $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sendo inteiros e $\boldsymbol{b}$

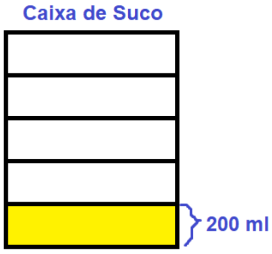
diferente de zero. Assim, pode-se afirmar que a fração $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$ significa duas unidades de chocolate divididas em cinco parte iguais, por exemplo.

Figura 3 – Representação do Quociente

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A ***medida*** significa o próprio quociente da ideia de "quanto cabe" e duas grandezas da mesma natureza. Por exemplo, escolhendo a unidade de medida de capacidade, pode-se identificar quantos copos de suco de $\mathbf{200}\ \boldsymbol{ml}$ cabem em $\mathbf{1}\ \boldsymbol{litro}$ de suco, ou seja, $\frac{\mathbf{200}}{\mathbf{1.000}}$ ou $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$.

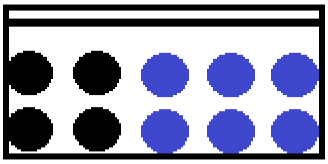
Figura 4 – Representação de medida



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A ideia de ***razão*** está na comparação de partes com partes e não partes com o todo. Logo, sua representação fracionária pode ser utilizada com índice de comparação entre duas grandezas. Por exemplo, numa caixa com dez bolas, pode-se representar a razão entre bolas pretas e azuis por $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{6}}$ ou $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$, assim a cada dez bolas, quatro são pretas e seis são azuis.

Figura 5 – Representação da razão

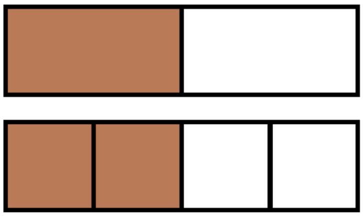


Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Além disso, pode-se associar a ideia de ***Proporção*** à ***razão***, que significa representar uma igualdade entre duas razões, como mostrado no exemplo anterior, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, tendo que $\frac{4+6}{6} = \frac{2+3}{3}$, isto é, a forma do numerador com o denominador divide pelo numerador do primeiro, a razão é igual.

O ***operador*** representa as transformações em que um número racional pode sofrer por meio das operações matemáticas básicas. Nesse sentido, pode-se transformar a fração $\frac{1}{2}$ na fração equivalente $\frac{2}{4}$ multiplicando o numerador e denominador por dois, por exemplo.

Figura 6 – Representação de Operador e Fração Equivalente



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Também, considerando o conjunto $\mathbb{Q}$, pode-se propor como operador as operações de ***adição, subtração, multiplicação e divisão*** de números racionais, em especial nas frações.

Assim, a partir de $\mathbb{Q}$, na adição e subtração tem-se:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{b \times c}{b \times d}$ e $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} - \frac{b \times c}{b \times d}$, utilizando a noção de equivalência efetuar essas operações, transformando os denominadores em valores comuns.

Na multiplicação tem-se:

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$, onde numerador é multiplicado por numerador e o mesmo ocorre com denominador.

E na divisão tem-se:

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}}$, ao multiplicar as duas frações pelo inverso da segunda fração, o que significa dividir a fração por 1.

Em suas considerações sobre a construção do conceito de número racional, Kieren (1993, p. 64 – 65 citado por Rodrigues, 2005, p. 34), propôs um modelo teórico que enfatiza às estruturas cognitivas e apresenta possíveis interconexões entre as ideias que formam o conceito, considerando o conhecimento atual do sujeito até a sua formalização. Esse modelo apresenta um mapa em que se identificam quatro níveis pelos quais deve passar a construção do conceito de número racional:

> [...] o nível dos conhecimentos intuitivos; os subconstrutos; um terceiro nível, obtido a partir dos subconstrutos em direção a um pensamento multiplicativo mais formal; o conhecimento estruturado nos números racionais dentro de um conjunto quociente. (KIEREN, 1993, p.64-65 apud RODRIGUES, 2005, p. 34).

Nesse sentido, Kieren (1993, p. 54 citado por Rodrigues, 2005, p. 38) afirma que:

> O estudo dos números racionais por intermédio dos subconstrutos fornece suporte para uma análise semântica, psicológica e pedagógica do ensino do número racional, bem como um suporte empírico para seu estudo. [...] também que a ideia intuitiva de participação tem um papel importante na construção do conhecimento do número racional por parte do sujeito e propõe, como ponto de partida para uma posterior construção formal, a abordagem dos números racionais como um conhecimento humano, a partir de suas bases intuitivas e de seus significados.

Assim, Kieren verificou por meio de experiências que os estudantes mobilizam diferentes representações e significados dos números racionais para resolver situações-problema. (RODRIGUES, 2005, p. 38). Por exemplo, para resolverem um problema com jarra de suco e copo, utilizam a ideia de razão; para resolverem um problema de repartição de lanche, usam a ideia de quociente, entre outros.

Rodrigues (2005) ressalta que um currículo montado segundo as ideias e orientações de Kieren possibilita uma interligação mais eficaz em vários campos da Matemática. O que se pode notar o quanto as representações e significados dos números racionais são importantes para estudar outros objetos e conceitos matemáticos no Ensino Médio, pois para aprendê-los o estudante tem que usar pelo menos uma representação e significado.

Dessa maneira, se os números racionais fossem considerados apenas uma extensão dos números inteiros ou algoritmo, permaneceriam apenas no campo dos números. Porém, quando se usa a visão dos significados e representações, os números racionais se tornam significativos para aprendizagem do estudante, possibilitando contato com outros domínios da matemática desde os anos iniciais da Educação Básica. (KIEREN, 1976).

1.4 TEORIA APOS

Os conceitos matemáticos são construídos por meio de processos que podem ser estudados pelo professor, de modo que ele reflita sobre como ocorrem as etapas de construção do conhecimento matemático. Esse método consiste na análise de ações, processos e objetos matemáticos, sendo organizados e reorganizados em esquemas, e possibilita a reflexão sobre como o estudante constrói novos conceitos matemáticos a partir do seu conhecimento atual.

Dubinsky (1991) apresentou um método que auxilia a compreensão do mecanismo de ***abstração reflexiva*** (proposto por Piaget em 1980), ***a teoria APOS (action, process, object, scheme)***. Esse mecanismo pode auxiliar na compreensão de como o estudante pode construir seu conhecimento matemático. A respeito desse mecanismo, o autor destaca que:

> O conceito de abstração reflexiva pode ser uma ferramenta poderosa no estudo do pensamento matemático avançado, que pode fornecer uma base teórica que apoia e contribui para a nossa compreensão do que é e como podemos ajudar os estudantes a desenvolver a capacidade de se envolver nele. (DUBINSKY, 1991, p. 95).

Ainda para o autor, a ***abstração reflexiva*** possibilita criar um quadro para descrever qualquer conceito matemático e como adquiri-lo. Nesse sentido, Dubinsky (1991, p. 97) apresenta os três tipos de abstração estudados por Jean Piaget:

a) ***abstração empírica*** é definida pelo conhecimento obtido a partir das propriedades dos objetos. Esse conceito está relacionado com as experiências externas ao sujeito, o conhecimento é interno sendo resultado das construções realizadas internamente pelo sujeito, extraindo propriedades comuns dos objetos e generalizações. Por exemplo: uma fruta pode ter cores e tamanhos diferentes para cada sujeito que a olha;

b) ***abstração pseudo-empírica*** é relacionada com a abstração empírica e reflexiva, que considera as propriedades introduzidas pelas ações do sujeito nos objetos. Por exemplo: uma correspondência observada entre dois conjuntos de objetos alinhados 1 – 1, o conhecimento dessa situação pode ser empírico considerando os objetos, porém as relações feitas 1 - 1 a partir das ações do sujeito são resultados de construções internas;

c) ***abstração reflexiva*** é a coordenação geral das ações derivada do sujeito e absolutamente interna. Por exemplo: quando o estudante faz várias ações individuais ao formar pares, triplos, entre outros, interiorizando e coordenando ações para formar uma ordenação total.

Diante disso, esses tipos de abstração não são totalmente independentes, pois as ações que possibilitam a abstração-pseudo empírica e reflexiva, acontecem sobre objetos que só é possível conhecer suas propriedades por meio da abstração empírica. Porém, a abstração empírica só ocorre por esquemas de assimilação construídos pela abstração reflexiva. Em resumo, a interdependência da abstração empírica e pseudo-empírica está na retirada de conhecimentos de objetos, operando ou imaginando ações, enquanto a abstração reflexiva usa a interiorização e coordenação de ações formando novas ações.

Dubinsky (1991) apontou em seu estudo alguns exemplos de abstração reflexiva considerando os quatro métodos analisados por Piaget, importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado, e acrescentou um quinto método que Piaget não considera como abstração reflexiva. Assim, destacam-se os seguintes métodos de construção da abstração reflexiva:

i. ***Interiorização*** é o processo que utiliza "[...] símbolos, linguagens, imagens e imagens mentais [...] para representar (...) ou seja, para construir processos internos para dar sentido a fenômenos observados". (DUBINSKY, 1991, p. 100). O estudante constrói um conjunto de ações que podem ser executadas mentalmente, sem necessariamente indicar as descrições durante a ação. O autor cita como exemplo a propriedade comutativa da adição, em que o estudante verifica que os resultados da soma de dois números inteiros a e b são iguais, independente da ordem das parcelas, isto é, $\boldsymbol{a+b}$ é igual a $\boldsymbol{b+a}$, logo ele interioriza que $\boldsymbol{a+b=b+a}$.

Outro exemplo considerando os números racionais é quando o estudante representa uma metade na forma fracionária, na forma decimal e na forma geométrica, interiorizando que as diferentes ações resultam no mesmo objeto matemático.

ii. ***Coordenação*** é quando "[...] envolvem a composição ou coordenação de dois, ou mais processos para construir um novo". (DUBINSKY, 1991, p. 100). Assim, é por meio da coordenação que se pode fazer a composição entre objetos, ações ou processos para construir novos elementos.

Um exemplo de coordenação envolvendo os números racionais é quando o conceito de equivalência é utilizado para transformar denominadores diferentes em iguais, o estudante usa a multiplicação para igualar os denominadores (coordena processos) e efetua a operação de soma com as novas frações equivalentes às iniciais.

iii. ***Encapsulação*** é a "[...] conversão de um processo (dinâmico) em um objeto (estático)". (DUBINSKY, 1991, p. 100). Segundo o autor, essa pode ser considerada a construção mais importante (na Matemática) e a mais difícil (para os estudantes), por isso eles devem estar cientes desse processo.

Um exemplo envolvendo os números racionais é a proporção, onde o estudante relaciona grandezas (dinâmico) e testa afirmações em cima dos resultados obtidos pela fração (estático).

iv. ***Generalização*** é quando o estudante "aprende a aplicar um esquema existente a uma coleção mais ampla de fenômenos, dizemos que o esquema foi generalizado". (DUBINSKY, 1991, p. 101). Logo, pode acontecer quando se compreende a aplicabilidade mais ampla do esquema e, também, quando um processo é encapsulado em um objeto.

O autor cita outro exemplo sobre os números racionais, em que quando existe a razão entre duas quantidades de maneira que um esquema existente como igualdade ou adição, pode ser aplicado a ele para obter uma proporção ou multiplicação. O esquema permanece inalterado, mas a aplicabilidade se torna mais ampla, pois o objeto muda para o estudante na medida que ele compreende como o esquema pode ser assimilado.

v. ***Reversibilidade*** é acrescentada pelo autor que a apresenta como "[...] um novo processo que consiste em inverter o processo original". (DUBINSKY, 1991, p. 101). Deste modo, caracteriza-se na possibilidade de pensar de forma ao contrário, sem desfazer o sentido inicial, mas em construir um novo processo revertendo o original.

Outro exemplo de Reversibilidade envolvendo os números racionais é quando o estudante converte uma fração/decimal para a representação de porcentagem e vice-versa.

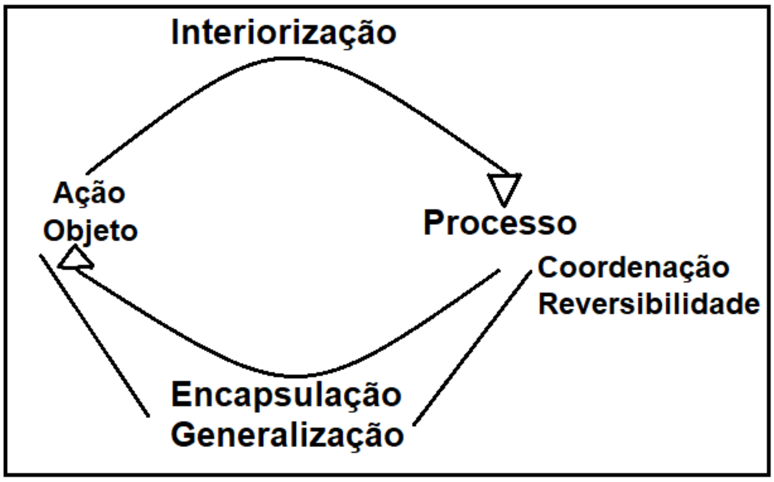
Os tipos de abstração reflexiva podem ser trabalhados individualmente ou combinados entre si. Nesse sentido, a abstração reflexiva é "a construção de objetos mentais e ações mentais sobre esses objetos". (DUBISNKY, 1991, p. 101).

Dubinsky (1991) baseou-se nesses elementos para elaborar a teoria APOS, que trata da construção de conceitos matemáticos envolvendo ações, processos e objetos formando um esquema, descrito como uma atividade dinâmica, ou seja, sua reconstrução é contínua.

A construção mental de um conceito matemático começa com a manipulação objetos físicos ou mentais em forma de ações. Essas ações são interiorizadas em processos e encapsuladas em objetos matemáticos. Esses objetos podem ser desencapsulados em processos com base em como foram formados e, por fim, as ações, os processos e os objetos podem ser estruturados e reorganizados em esquemas. (PRADO, 2010).

Diante disso, a teoria APOS possibilita a análise da construção de conceitos matemáticos a partir das etapas de ação, processo, objeto e esquema trabalhados em qualquer ordem, tendo os cinco tipos de construção organizados como mostra a figura 7.

Figura 7 – Esquemas e sua construção



Fonte: Dubinsky (1991, p. 106, tradução nossa).

O ***objeto*** pode ser considerado todos os objetos matemáticos como números, variáveis, conjuntos, funções, dentre outros e devem ser construídos pelo estudante durante o desenvolvimento de seu conhecimento matemático. Uma ***ação*** é toda transformação no qual os passos realizados sobre um objeto matemático são compreendidos. Um ***processo*** é uma construção interna onde o estudante realiza uma ação e tem controle sobre a transformação do objeto matemático, possibilitando descrever os passos e invertê-los quando for conveniente. E finalmente, quando uma coleção de objetos e processos são organizados de maneira estruturadas formam então um ***esquema***. (PRADO, 2010).

A abordagem utilizada para implementação desta teoria é a decomposição genética que possibilita a separação de vários elementos que constituem um conceito matemático. Então, os esquemas são decompostos em ações, processos e objetos, para confrontar o estudante com a teoria descrita acima para melhorar a compreensão do conceito matemático.

Por exemplo, para o conceito de fração equivalente, sugere-se a seguinte decomposição genética: 1) A ação de representar dois números inteiros como uma razão, sendo o denominador diferente de zero. 2) A interiorização do passo 1 é perceber que algumas frações são simplificáveis. 3) Capsular o processo do passo 2 possibilita identificar que frações podem ser simplificadas mais de uma vez. 4) Aplicar um esquema que mostre que uma fração simplificada será a mesma se for multiplicada pelos mesmos valores. 5) Aplicar definição mostrando o que é uma fração equivalente e suas representações.

Dessa maneira, a abstração reflexiva, a teoria APOS e a decomposição genética tornam-se uma oportunidade eficaz para o professor analisar o desenvolvimento do pensamento matemático avançado e como novos conceitos matemáticos são construídos pelo estudante.

CAPÍTULO II
PERCURSO METODOLÓGICO

"O importante na ciência não é obter novos dados, mas descobrir novas maneiras de pensar sobre eles."
William Lawrence Bragg

Neste capítulo, apresenta-se os referenciais teórico-metodológicas qualitativa do tipo pesquisa-ação, os caminhos tomados para o desenvolvimento deste estudo, a descrição das tarefas matemáticas elaboradas, a descrição da escola e do perfil do grupo de estudantes, os instrumentos utilizados para a coleta de dados, o processo de estudo bibliográfico, a descrição das dissertações selecionadas para análise e a síntese da revisão bibliográfica.

2.1 TIPO DE PESQUISA E O PROFESSOR-PESQUISADOR

A pesquisa realizada é de natureza ***qualitativa***, que a partir das ideias de Bogdan e Biklen (1994, p. 47 – 51), a descreve como: ***(i***) a fonte direta dos dados é o ambiente natural da pesquisa, nesse contexto, é o ambiente da sala de aula onde foi desenvolvida a THA; ***(ii)*** a investigação é descritiva, assim os dados são obtidos por meio dos registros escritos ou orais das interações na realização das atividades. Para esta pesquisa, os dados foram recolhidos por protocolo de atividades, gravações de áudio e diário de bordo; ***(iii)*** o processo importa mais do que os resultados ou produtos, pois os resultados só fazem sentido compreendendo os caminhos escolhidos pelos estudantes durante a realização dos processos nas tarefas matemáticas. Também se relaciona com a importância dos procedimentos, das tarefas e das ações que possibilitam observar desempenhos dos participantes que levam a resultados relevantes; ***(iv)*** os dados tendem a ser analisados indutivamente, nesse sentido os dados são tomados como uma referência geral com base no conhecimento obtido através da realização das tarefas e versa da percepção de quais partes do estudo trazem questões mais importantes, considerando as abstrações construídas a partir dos dados organizados; ***(v)*** o significado é muito importante na abordagem qualitativa, uma vez que possibilita ao pesquisador analisar e compreender os significados daquele objeto para os participantes. Por fim, é abordado pelos pesquisadores o modo como os diferentes estudantes dão o significado em suas vidas.

Deste modo, a fim de realizar esta investigação utilizou-se a perspectiva da pesquisa qualitativa do tipo ***pesquisa-ação***, que segundo Thiollent (1986, p. 14) é definida como:

> [...] um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo.

Assim, a pesquisa-ação considera a participação ativa das pessoas (pesquisador e participantes do estudo) no contexto/ambiente social investigado, que descrevem as observações e ações do grupo na resolução de situações-problema, no caso desta pesquisa é o grupo de estudantes na sala de aula e o pesquisador, que também é o professor da turma e que será denominado neste texto como professor-pesquisador.

Ainda, Thiollent (1986, p. 15) afirma que:

> Na pesquisa-ação os pesquisadores desempenham um papel ativo no equacionamento dos problemas encontrados, no acompanhamento e na avaliação das ações desencadeadas em função dos problemas. [...] a pesquisa-ação exige uma estrutura de relação entre pesquisadores e pessoas da situação investigada que seja de tipo participativo.

Nesse sentido, a pesquisa-ação se revelou apropriada pelo fato de o professor-pesquisador atuar há três anos com a turma de Ensino Médio investigada, possibilitando acompanhar e avaliar as ações com um olhar a partir da realidade e necessidade de cada estudante. Logo, fica claro a importância da pesquisa-ação para esta pesquisa considerando a relação entre o professor-pesquisador e o grupo de estudantes durante o processo de ensino-aprendizagem, proporcionando ao professor-pesquisador observar a resolução das tarefas realizadas pelos estudantes de um ponto de vista mais próximo do que teriam outros pesquisadores.

Ainda, para Thiollent (1986, p. 18) a pesquisa-ação se caracteriza na relação entre objetivo prático e objetivo do conhecimento. O objetivo prático contribui para solucionar o problema central da pesquisa da melhor forma, por meio de soluções e ações possíveis para auxiliar o grupo de pessoas na transformação da situação. Enquanto o objetivo de conhecimento consiste na obtenção de informações (consideradas de difícil acesso por outros procedimentos) e na ampliação do conhecimento em determinadas situações (mobilização, ações, representações). Por fim, esses objetivos tornam a pesquisa-ação em aspectos variados, a partir de um equilíbrio, possibilitando a reflexão, discussão e produção de conhecimentos que beneficiam o grupo de estudantes envolvidos na pesquisa, ou seja, o que vai ao encontro do objetivo desta pesquisa.

O ***professor-pesquisador*** tem em vista estudar problemas que se originam em sua prática profissional. Esse estudo gera novas possibilidades de pesquisa, onde a pesquisa acadêmica não consegue chegar, por meio da vivência em sala de aula. A pesquisa-ação está relacionada ao professor-pesquisador por promover um caráter participativo em transformações ligadas às suas próprias práticas, sendo democráticas e contribuindo para mudanças na sociedade.

Nesse sentido, a implementação de práticas inovadoras em sala de aula tem sido considerada por professores-pesquisadores nas diferentes formas de ensino e pesquisa. Por isso, é importante definir a pesquisa científica e a pesquisa do professor a partir de sua finalidade. Segundo Garcia (2009, p. 177):

> a pesquisa científica tem a preocupação com a originalidade, a validade e o reconhecimento por uma comunidade científica. A pesquisa do professor busca o conhecimento da realidade, para transformá-la, visando à melhoria das práticas pedagógicas e à autonomia do professor. Em relação ao rigor, o professor pesquisa sua própria prática e encontra-se, portanto, envolvido, diferentemente do pesquisador teórico. Em relação aos objetivos, a pesquisa do professor tem caráter instrumental e utilitário, enquanto a pesquisa acadêmica em educação em geral está conectada com objetivos sociais e políticos mais amplos.

Diante disso, é importante destacar também o significado de professor e de pesquisador: o professor é o profissional que prepara estudantes ministrando aulas ou cursos em todas as modalidades de ensino; já o pesquisador visa reunir informações sobre um determinado problema ou assunto específico e analisá-las a partir do método científico com o intuito de ampliar seu conhecimento de um determinado assunto, descobrir situações novas e refutar teorias precedentes.

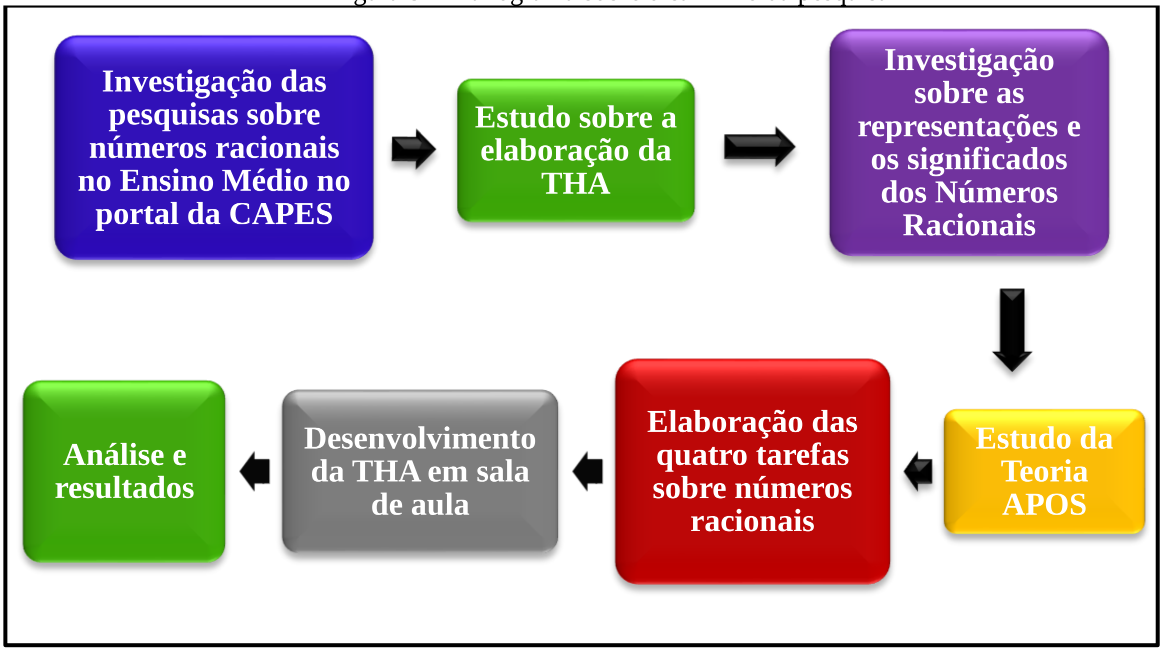
Portanto, o professor-pesquisador é reflexivo, podendo analisar e repensar suas próprias metodologias de ensino para aperfeiçoar sua prática pedagógica, com objetivos claros e relevantes para o meio acadêmico e social, tornando seus estudantes críticos e reflexivos na produção do conhecimento.

2.2 CAMINHO DA PESQUISA

Para compreender o caminho da pesquisa, faz necessário retomar a problemática desta pesquisa: ***quais potencialidades e desafios são revelados no processo de elaboração e desenvolvimento de uma THA sobre números racionais, desenvolvida com um grupo de estudantes do Ensino Médio?*** E também o objetivo: investigar potencialidades e desafios na elaboração e no desenvolvimento de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem na perspectiva do professor-pesquisador e dos estudantes sobre os números racionais, implementada com um grupo de estudantes do Ensino Médio.

Para responder à problemática desta pesquisa, realizou-se um estudo aprofundado a partir: ***(i)*** de dissertações e teses no portal de periódicos da CAPES, com intuito de investigar quais são os tipos de tarefas nas tarefas matemáticas desenvolvidas em pesquisas na sala de aula, bem como seus principais resultados, adotadas no ensino dos números racionais no Ensino Médio; ***(ii)*** da proposta da THA descrita por Simon (1995) para elaborar as tarefas matemáticas sobre os números racionais; ***(iii)*** dos aspectos didáticos relacionados as representações e os significados dos números racionais, segundo as ideias de Kieren (1976), para elaborar as tarefas matemáticas propostas na THA; e por fim, ***(iv)*** da teoria APOS de Dubinsky (1991) para analisar os resultados encontrados referente a compreensão do estudante na resolução das tarefas sobre os números racionais.

Figura 8 – Fluxograma sobre o caminho da pesquisa



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A THA elaborada pelo professor-pesquisador foi composta por quatro tarefas matemáticas com tarefas que abordam as representações e os significados dos números racionais:

- ✓ ***Tarefa I – Dominó das conversões***, nessa tarefa foram propostas três tarefas dissertativas e um jogo de dominó a fim de discutir o significado de parte-todo e equivalência, por meio da representação numérica e geométrica.
- ✓ ***Tarefa II – Compreendendo o quociente de números racionais e operando com adição e subtração de frações***, nessa tarefa foram propostas quatro tarefas dissertativas para estudar o significado de quociente, da conversão entre decimal e fração e das operações de adição e subtração de frações pela equivalência. Essa tarefa está relacionada aos significados estudados nas tarefas anteriores.
- ✓ ***Tarefa III – Estudando porcentagem, medida e razão a partir da multiplicação e divisão de números racionais***, nessa foram propostas cinco tarefas dissertativas com o intuito de compreender as representações e os significados de porcentagem, medida e razão com a multiplicação e divisão de frações. Essa tarefa também possui relação com os significados estudados nas tarefas anteriores.
- ✓ ***Tarefa IV – Resolução de questões do ENEM envolvendo números racionais***, nessa tarefa foram propostas sete questões sobre problemas envolvendo as representações e os significados dos números racionais a partir do conhecimento atual do estudante. Essa tarefa se relaciona com todas as representações e significados estudados nas tarefas anteriormente, porém não foi desenvolvida em sala de aula com os estudantes, ficando como uma tarefa complementar no produto educacional.

Essas tarefas foram planejadas a partir do que o professor-pesquisador conhece sobre o conhecimento matemático atual do grupo de estudantes, do processo hipotético de aprendizagem e do que se cogita investigar com o objetivo proposto da THA.

Para analisar as tarefas da THA solucionadas pelos estudantes, utilizou-se a teoria APOS de Dubinsky (1991) que possibilita observar aspectos importantes do processo de ensino-aprendizagem sobre as representações e os significados dos números racionais. Dessa maneira, esperou-se responder à problemática desta pesquisa, apresentar os principais resultados e discutir as possibilidades para o ensino-aprendizagem dos números racionais no Ensino Médio.

2.3 CENÁRIO DA PESQUISA

Esta pesquisa foi submetida ao ***Comitê de Ética e Pesquisa (CEP)*** do IFSP pela plataforma Brasil, sendo aprovada pelo Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE), identificada pela numeração 60885922.8.0000.5473.

O estudo foi desenvolvido na sala de aula da ***Escola Técnica do Estado de São Paulo, Etec SÃO MATEUS***, localizada na zona leste de São Paulo capital. Ao todo foram 39 estudantes, na faixa etária de 16 a 18 anos, da ***3ª série do curso de Técnico em Nutrição e Dietética Integrado ao Ensino Médio (ETIM)***.

Por se tratar de Ensino Técnico Integrado ao Ensino Médio, esses alunos lidam com cálculos, planilhas, medições e outras tarefas em disciplinas do curso técnico da área da saúde que envolvem situações com os números racionais.

O professor-pesquisador é o próprio professor titular que lecionou para essa turma desde 2020 até 2022. O fato de o pesquisador ser o professor da turma possibilitou que esse formulasse hipóteses sobre o conhecimento de seus alunos após esses anos de trabalho em conjunto, além de possuírem uma boa relação entre professor-aluno, proporcionando um ambiente de trabalho agradável.

2.4 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Para coletar os dados empregou-se: (i) *protocolo de atividades*, onde o pesquisador recolheu as três tarefas escritas realizadas em dupla ou grupo para análise, considerando as que apresentaram aspectos relevantes para esta pesquisa; (ii*) gravações de áudio*, para transcrever perguntas e explicações dos estudantes no processo de resolução das tarefas e (iii*) diário de bordo*, registro escrito passo a passo a partir das observações diretas das interações entre professor-pesquisador e os estudantes, no desenvolvimento das tarefas de matemática que é o produto educacional.

2.5 ESTUDO BIBLIOGRÁFICO

Este estudo bibliográfico foi realizado em ***março de 2020***, visando investigar os tipos de tarefas matemáticas sobre números racionais abordadas no Ensino Médio e seus resultados, a partir do ***catálogo de teses e dissertações da CAPES (portal digital que apresenta produções de mestrado e doutorado de todo o Brasil)***, usando como busca as palavras-chave "números racionais" AND "ensino médio", tendo ao todo encontrado 30 trabalhos com os títulos descritos no quadro abaixo.

Quadro 1 – Número, autores e títulos das dissertações

N°	AUTORES	TÍTULOS
1	SEVERO, D.F.	Números racionais e ensino médio: uma busca de significados.
2	FERREIRA, C. S.	A tecnologia como ferramenta para superação das deficiências da base e otimização da aprendizagem em matemática: uma experiência com os números racionais.
3	SILVA, E. D. DA.	Os conceitos elementares de estatística a partir do homem vitruviano: uma experiência de ensino em ambiente computacional.
4	SILVA, F. A. F.	Significados e representações dos números racionais abordados no exame nacional do ensino médio – ENEM.
5	SILVA, M. C. DA.	Reta graduada: um registro de representação dos números racionais.
6	CERAGIOLI, L.	Conhecimentos de alunos do programa de educação jovens e adultos (EJA) relativo aos números racionais na forma fracionária.
7	AUGUSTO, C. R.	Aprendizagem de função afim: uma intervenção de ensino com auxílio do software Graphmatica.
8	SANTOS, A. C. G. DOS.	Uma contribuição ao ensino de números irracionais e de incomensuralidade para o ensino médio.
9	SOUZA, M. G. DE.	Conjunto e funções: conceitos, propriedades e demonstrações visando à formação continuada do professor de matemática da educação básica.
10	KRUG, C. B. S.	Ensino dos números racionais comparando medidas de unidade.
11	MATOS, R. N. DE.	Uma contribuição para o ensino aprendizagem dos números racionais: a relação entre dízimas periódicas e progressões geométricas.

12	FIORELLI, J. DE O.	Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum generalizados aplicados no ensino básico.
13	PEREIRA, A. P.	Frações contínuas, representações de números reais e aproximação de números reais por números racionais.
14	PIMENTEL, T. T.	Construção dos números reais via cortes de Dedeking.
15	OLIVEIRA, L. C. G. DE.	Análise de erros cometidos pelos discentes do sétimo ano do ensino fundamental e primeiro ano do ensino médio no estudo dos números racionais na sua forma fracionária.
16	SILVA, A. L. V. DA.	Números reais no ensino médio: identificando e possibilitando imagens conceituais.
17	OLIVEIRA, A. M. N.	Irracionais e frações contínuas no ensino médio.
18	TELES, R. A. DE M.	A relação entre a aritmética e álgebra na matemática escolar: um estudo sobre a influenciada compreensão das propriedades da igualdade e do conceito de operações inversas com números racionais na resolução de equações polinomiais do 1° grau.
19	NASCIMENTO, A. M. DO.	Frações contínuas e aplicações no ensino médio.
20	SILVA, J. V. G. DA.	Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos em matemática do 6° ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático.
21	MOSCA, M. A.	Números irracionais no ensino médio: desdobrando o tema com equações polinomiais.
22	COSTA, P. C.	A construção do número reais e aplicações no ensino médio.
23	GREGIO, B. C.	Sequências de números reais e as famosas constantes matemáticas.
24	SANTOS, F. DE O. L. H. DOS.	Fundamentos do cálculo diferencial.
25	MELGAR, W. L. U.	Diferentes construções do número real.
26	SILVA, A. A. DA.	Desvendando a crise da incomensurabilidade. Uma proposta para a educação básica utilizando frações contínuas.
27	MELO, S. M.	Um estudo das relações dos alunos com os saberes matemáticos escolares.

28	BACCARIN, F. L.	Conjuntos infinitos e suas surpresas: uma sequência de atividades.
29	BELINI, M. M.	A razão áurea e a sequência de Fibonacci.
30	SILVA, R. DE S. DA.	Jogo distância em batalha: investigação do processo contextualizado de aprendizagem matemática à luz da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A partir da leitura dos títulos e considerando o objeto matemático de estudo, foram retirados 22 trabalhos que não tinha explicitados a expressão “números racionais”. E também foi retirado 1 (um) trabalho de n. 6 que, apesar de apresentar a expressão “números racionais”, declarava ter como objeto de estudo “a modalidade EJA”, o que não é foco desta pesquisa. Verificou-se ainda que a dissertação de n. 18 não estava disponível no formato on-line, por isso ela foi retirada da análise.

Então, restaram ao todo 7 (sete) trabalhos para continuar a análise a partir do objetivo de investigação.

Quadro 2 – Número, autores, títulos e resumos das dissertações

N°	AUTORES	TÍTULOS	RESUMOS
1	SEVERO, D. F.	Números racionais e ensino médio: uma busca de significados.	Esta pesquisa tem como objetivo analisar registros de representação de números racionais, apresentados por alunos de Ensino Médio [...]
2	SILVA, M. C.	Reta graduada: um registro de representação dos números racionais.	O presente trabalho tem por foco a introdução do conceito de número racional no Ensino Fundamental [...]
3	SILVA, F. A. F.	Significados e representações dos números racionais abordados no exame nacional do ensino médio – ENEM.	Essa pesquisa se propõe a investigar quais são os significados e as representações dos números racionais que são contemplados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. [...]

4	KRUG, C. B. S.	Ensino dos números racionais comparando medidas de unidade.	A presente pesquisa teve como objetivo investigar a possibilidade de desenvolver o processo de ensino e aprendizagem da divisão de números racionais com tarefas pautadas na interpretação da medida. Adotamos como metodologia a Engenharia Didática e elaboramos uma sequência didática a fim de desenvolver o trabalho com estudantes do Ensino Médio. [...]
5	MATOS, R. N. de.	Uma contribuição para o ensino aprendizagem dos números racionais: a relação entre dízimas periódicas e progressões geométricas.	Este trabalho teve como objetivo principal apresentar uma contribuição para o ensino aprendizagem dos números racionais, destacando principalmente a relação entre dízimas periódicas e progressões geométricas. [...]
6	PEREIRA, A. P.	Frações contínuas, representações de números reais e aproximação de números reais por números racionais.	[...] Mostramos a ligação desta expansão e o algoritmo de Euclides para o cálculo do m.d.c. Explorando as propriedades dos convergentes, abordamos a aproximação de números irracionais por números racionais, mostrando que as melhores aproximações são obtidas via frações contínuas [...]
7	OLIVEIRA, L. C. G. de.	Análise de erros cometidos pelos discentes do sétimo ano do ensino	O presente trabalho foi desenvolvido com o intuito de

		fundamental e primeiro ano do ensino médio no estudo dos números racionais na sua forma fracionária.	investigar quais são as dificuldades apresentadas por alunos do sétimo ano com relação as quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) no estudo das Frações e ao mesmo tempo analisar se essas mesmas dificuldades persistem com os alunos do primeiro ano do Ensino Médio. [...]

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Realizada a leitura dos resumos dos 7 (sete) trabalhos selecionados, o trabalho n. 2 foi retirado dos trabalhos a serem analisados por explicitar no resumo uma investigação com o foco na “introdução do conceito de número racional no Ensino Fundamental”, o que não faz parte do objetivo de investigação desta pesquisa. Também foi retirado o n. 3 que se trata de um artigo sobre “números racionais no ENEM de 1998 a 2008 (antigo ENEM) e 2009 a 2011 (novo ENEM)”, não sendo uma dissertação. E por fim, foi retirado o trabalho n. 6 que aborda uma investigação que não tem como finalidade o estudo dos “significados dos números racionais, mas a construção dos números irracionais a partir dos números racionais”.

Nesse sentido, foram selecionados 4 (quatro) dissertações para serem analisadas e descritas a partir dos desenvolvimentos das tarefas e resultados apresentados.

Quadro 3 – Número, autores e títulos das dissertações selecionadas para análise

N°	AUTORES	TÌTULOS
1	SEVERO, D. F.	Números racionais e ensino médio: uma busca de significados.
2	KRUG, C. B. S.	Ensino dos números racionais comparando medidas de unidade.
3	MATOS, R. N. de.	Uma contribuição para o ensino aprendizagem dos números racionais: a relação entre dízimas periódicas e progressões geométricas.

4	OLIVEIRA, L. C. G. de.	Análise de erros cometidos pelos discentes do sétimo ano do ensino fundamental e primeiro ano do ensino médio no estudo dos números racionais na sua forma fracionária.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

2.5.1 DESCRIÇÃO DAS DISSERTAÇÕES SELECIONADAS PARA ANÁLISE

Severo (2009) desenvolveu a dissertação ***“Números racionais e ensino médio: uma busca de significados”***, cujo objetivo é “Analisar os registros de representação de números racionais, apresentados por alunos do Ensino Médio, e verificar se esses alunos relacionam o significado dos números racionais com situações da vida cotidiana em que esses números são empregados”. (SEVERO, 2009, p. 11). Como problemática, a autora propôs investigar quais as dificuldades apresentadas por estudantes ao lidar com os significados dos números racionais no cotidiano. Para elaborar as tarefas, ela utilizou alguns autores para mostrar a importância dos números racionais a partir: das formas de representação, das atribuições dos significados, das conexões entre a matemática e a vida cotidiana, dos registros de representação semiótica e dos números racionais nas avaliações de larga escala.

A autora adotou a metodologia qualitativa do tipo naturalístico-construtivista, e os instrumentos de pesquisa foram dois testes formados por questões relacionadas ao conteúdo, observações em sala de aula e um questionário para professores. Um teste é composto por cinco tarefas tratando dos registros de transformações das frações aplicados aos estudantes da 1ª e 2ª série do Ensino Médio de uma escola Estadual em Porto Alegre – RS. O segundo teste foi adaptado a partir de questões do SAEB e o SAERS que permitiram a reflexão sobre objetivo específico em cada questão.

Após a análise dos resultados, a autora afirmou que os estudantes apresentaram dificuldades nos registros de representação dos números racionais como: fazer a conversão da fração para a forma decimal; localizar o número racional na reta numérica; cometeram erros nos cálculos de um mesmo registro; mostraram dificuldades em compreender o conceito de fração com relação ao significado de parte-todo, bem como, a conversão da representação na linguagem materna para a linguagem numérica e fracionária; não dominam os registros de representação decimal e erram ao considerar a porcentagem sempre num total de 100 elementos.

Nesse sentido, a autora concluiu que os estudantes não dominam os registros de representação dos números racionais, além de não conseguirem relacionar os significados dos números racionais com as situações do cotidiana.

O trabalho intitulado ***"Ensino dos números racionais comparando medidas de unidade"***, elaborado por Krug (2015), possui o objetivo de "investigar se é possível desenvolver o processo de ensino e aprendizagem da divisão de números racionais com tarefas pautadas na interpretação da medida". (KRUG, 2015, p. 10). Ele levantou, como problemática, se é possível desenvolver o processo de ensino-aprendizagem a partir da divisão de números racionais com tarefas baseadas na interpretação da medida. Para responder o problema de pesquisa, ele adotou a metodologia da Engenharia Didática definida em quatro fases: análises preliminares, concepção e análise prévia, aplicação de uma sequência didática e análise posteriormente e avaliação.

O autor explica o que aconteceu nas quatro fases. Na análise preliminar ocorre a apresentação dos participantes da pesquisa, estudantes da 1ª Série do Ensino Médio de uma escola Estadual no Paraná. Na concepção e análise prévia verificam-se os conhecimentos dos estudantes por meio do instrumento de entrevista semiestruturada sobre a divisão dos números racionais, especialmente na interpretação da medida. Esse instrumento é uma lista com 11 tarefas envolvendo dois significados dos números racionais na forma fracionária, frações equivalentes, relação entre ordem dos números racionais e a densidade como divisão desse conjunto. Na aplicação da sequência didática é considerado as informações inicialmente obtidas na segunda fase, assim é possível articular com o objetivo principal. E por fim, a análise posteriormente e avaliação apresenta os dados da análise antes confrontado com os resultados da análise das hipóteses iniciais e das sessões de ensino.

A partir das entrevistas semiestruturadas, o autor elencou alguns pontos importantes observados sobre os estudantes: não possuem conhecimento dos significados dos números racionais sobre medida e divisão como interpretação da medida; a aprendizagem foi baseada na interpretação parte-todo dos números racionais com tarefas de contagem das partes em representações geométricas de superfície; o modelo linear comum para ensino dos números racionais como medida não foi significativo; os estudantes mostraram dificuldade em representar geometricamente frações maiores que a unidade e divisões com números racionais; não demonstraram conhecimento sobre equivalência de frações, ordem e densidade dos racionais; não compreendem o significado da unidade dos números racionais e apesar de resolverem questões envolvendo números racionais, possuem conhecimento limitado a respeito do número racional.

O autor ainda, descreveu a sequência didática em quatro sessões: na sessão 1 revisou conceitos para estudar a divisão dos números racionais, na sessão 2 revisou as operações com números racionais, nas sessões 3 e 4 observou situações de aprendizagem da divisão de números racionais pautada na interpretação da medida.

Por fim, o autor concluiu destacando as principais dificuldades quanto ao ensino-aprendizagem dos números racionais, tais como há predomínio do ensino mecanizado baseado na memorização do algoritmo e de fórmulas, falta conhecimento a respeito do conceito dos números racionais em situações contextualizadas, a interpretação da parte-todo e a carência na formação de professores para trabalhar esse conteúdo. Além disso, a investigação apontou que as tarefas potencializaram o aprendizado do ensino do conceito da divisão dos números racionais com questões relacionadas a ordem, equivalência e densidade; da utilização do segmento de reta como medida que proporcionou aos estudantes distinguirem a diferença entre os números racionais e inteiros e das tarefas baseadas na interpretação geométrica da medida dos números racionais em segmentos de reta. Assim, o uso da aprendizagem dos números racionais por meio da representação geométrica de segmentos de reta possibilita aos estudantes construir seu conhecimento por uma aprendizagem ativa e significativa sobre a operação de divisão nesse conjunto.

A pesquisa de Matos (2017) denominada ***"Uma contribuição para o ensino aprendizagem dos números racionais: a relação entre dízimas periódicas e progressões geométricas"***, teve como objetivo "Apresentar uma contribuição para o ensino aprendizagem dos números racionais, explorando a relação existente entre dízimas periódicas e progressões geométricas". (MATOS, 2017, p. 22). Para realizar o estudo, o autor levantou algumas questões importantes para sua pesquisa: como é a proposta para o ensino de dízimas periódicas e progressão geométrica infinita nos livros didáticos; quais relações os livros didáticos relacionam entre elas; quais as formas existentes para abordagem das dízimas periódicas e progressões geométricas; e quais as contribuições possíveis para o ensino aprendizagem dos números racionais com outros conteúdos.

Na busca para responder os questionamentos apresentados, o autor utilizou como metodologia a pesquisa bibliográfica, examinando diversos trabalhos de outros autores e análise das abordagens dos livros didáticos, documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental e Médio, as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica e o Programa Nacional do Livro Didático e a Proposta Curricular – Currículo Básico Comum do Estado de Minas Gerais.

Também analisou as sequências didáticas propostas pelos autores de livros didáticos, por meio de perguntas, para observar a abordagem em relação ao conteúdo de dízima periódica e progressão geométrica. Constatou que a relação entre dízimas periódicas e progressões geométricas só aparecem no Ensino Médio, e que para utilizar a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica é necessário que o estudante saiba operar com adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais. O autor apresentou uma proposta de reorganização da ordem da abordagem do ensino dos números racionais (em especial as dízimas periódicas) e a progressão geométrica no 1° ano do Ensino Médio.

Dessa forma, o autor concluiu que as tarefas sugeridas em sua pesquisa possuem a função de auxiliar o professor em sala de aula colocando em prática as orientações dos PCN e contribuir para o ensino-aprendizagem dos números racionais, por meio de resoluções de situações-problema de outros conteúdos, proporcionando estratégias de aprendizagem diversificadas.

A dissertação denominada ***"Análise de erros cometidos pelos discentes do sétimo ano do ensino fundamental e primeiro ano do ensino médio no estudo dos números racionais na sua forma fracionária"*** desenvolvida por Oliveira (2017), teve como objetivo "contribuir para o enriquecimento do estudo sobre o Conjunto dos Números Racionais, em sua forma fracionária". (OLIVEIRA, 2017, p. 28). Também buscou identificar e analisar os desafios de aprendizagem sobre frações dos estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental e da primeira série do Ensino Médio de uma escola Estadual em Sergipe. Essa pesquisa teve como problemática responder se os estudantes dominam o conteúdo de frações e se os erros cometidos em ambos os níveis são semelhantes.

Além disso, para desenvolver esse estudo o autor utilizou a metodologia qualitativa do tipo naturalístico-construtivista, como referencial teórico adotou alguns autores e pesquisadores sobre os números racionais e os PCN. Como instrumentos de avaliação aplicou dois testes formados por questões relacionadas ao conteúdo (contextualizadas ou não envolvendo operações básicas com frações), observações em sala de aula e um questionário para professores. Para analisar e interpretar o estudo utilizou como perspectiva a Análise de Erros para categorizar as respostas em corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco.

Após a análise dos resultados obtidos nos questionários, o autor afirmou que os erros cometidos no Ensino Fundamental também ocorreram no Ensino Médio com maior frequência. A maioria dos estudantes do primeiro ano possuem dificuldades em tratar dos algoritmos nas operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes, não possuem habilidades para resolver situações envolvendo multiplicação e divisão de frações, não sabem interpretar resolução de problemas e não dominam o conceito de fração como parte-todo na interpretação do problema não compreendendo seu significado.

Enfim, o autor concluiu respondendo à problemática de que os estudantes não dominam o conteúdo de frações, nem compreendem os diferentes significados das frações e suas operações, carregando esses desafios para o Ensino Médio. Ainda, deixa claro que é necessário ensinar sobre frações com metodologias que não foquem em procedimentos mecânicos, mas que construam conceitos, formulando e validando estratégias em soluções de problemas.

2.5.2 SINTESE DAS TAREFAS DA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica possibilitou observar aspectos relevantes para agregar na elaboração das tarefas matemáticas desta pesquisa. Severo (2009, p. 23) influenciou ao utilizar autores que tratam das representações e dos significados: ponto racional, quociente, fração, operador e razão. O ponto racional é abordado segundo as conversões entre uma fração para número decimal na reta numérica; o quociente é tratado como divisão de objetos; a fração é versado como o conceito de parte-todo; o operador é mostrado apenas na multiplicação e divisão de objetos por frações e a razão é discorrido na comparação entre grandezas.

Alguns significados são apresentados nos exemplos de forma contextualizada um pouco fora da realidade, o que serve de exemplo para não ser utilizado na criação de tarefas, por exemplo: "se dizemos que um grupo de 72 alunos resolveu uma prova e destes, $\frac{5}{7}$ foram aprovados [...]". (SEVERO, 2009, p. 24).

A primeira tarefa sugere a conversão da forma fracionária ou decimal para a reta numérica; a segunda sugere representar frações em número decimal; a terceira sugere converter um registro na língua materna para o gráfico; a quarta relacionar a representação fracionária com a geométrica e a quinta sugere a conversão do registro da língua materna para o registro numérico decimal. Diante disso, foi possível separar os seguintes aspectos que influenciaram na elaboração das tarefas desta pesquisa: as tarefas com as representações entre numérica e geométrica dos números racionais, além dos significados de parte-todo, quociente, razão e operador.

Krug (2015, p. 14) também influenciou ao considerar outros autores na elaboração das tarefas que tratam dos significados de: parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Por abordar a divisão de números racionais como medida, o autor optou por tarefas que tratem do significado de parte-todo e operador utilizando a divisão de números racionais com tarefas pautadas na interpretação de medidas.

O autor apresentou tarefas que tratam da representação numérica (fração) para a representação geométrica; a representação de quocientes de números racionais por figuras geométricas; os operadores com números racionais pouco contextualizados ficando apenas na forma geométrica ou fracionária e a representação de resultados das operações na reta numérica. Também apresentou mais uma situação que deve ser repensada ao elaborar tarefas do cotidiano: “Um padeiro distribui três bolos iguais entre um grupo de crianças de tal forma que cada criança ganhe $\frac{3}{5}$ de um bolo”. (KRUG, 2015, p. 58). Assim, foram observados outros aspectos que agregaram na elaboração das tarefas dessa pesquisa: a conversão das representações numérica e geométrica e o resultado das operações básicas sendo representados na forma numérica ou geométrica.

Matos (2017) abordou os significados dos números racionais na forma decimal e fracionária a partir dos livros didáticos e da conversão e representação numérica entre fração e dízima periódica. Também apresentou a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, ou seja, somando frações por meio de métodos. As tarefas foram baseadas em muitos exercícios que envolvem procedimentos mecanizados. Logo, por focar na parte tradicional sem contextualização e nos procedimentos mecanizados sobre frações e as representações numéricas, as tarefas serviram como exemplo para não serem repetidas por não trazerem nenhuma novidade para o ensino.

Oliveira (2017) definiu e demonstrou os conceitos de máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e o conjunto dos números racionais na sua construção e relação de ordem. Tratou da adição, subtração, multiplicação, divisão, potência e radiciação de frações sem contextualização, na forma mecânica. Algumas tarefas possuíram o significado de parte-todo, mas o autor não deixou claro se tinha essa intenção. Apresentou também tarefas que tratam do conceito de equivalência e identificação de frações equivalentes, o que foi aproveitado como ideia na elaboração das tarefas dessa pesquisa.

Nesse sentido, considerando os aspectos principais das tarefas matemáticas analisadas, foi elaborada e desenvolvida uma THA sobre os números racionais para um grupo de estudantes da 3ª série do Ensino Médio, composta por tarefas que tratam: das conversões entre as representações numéricas e geométricas, dos significados dos números racionais contextualizados e das resoluções de problemas do ENEM.

CAPÍTULO III
TAREFAS DE MATEMÁTICA: DESENVOLVIMENTO DA THA

"Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção."

(Paulo Freire)

Neste capítulo, descreveu-se o desenvolvimento das três tarefas da THA com o grupo de estudantes e apresentou-se a análise desses resultados a partir da reflexão da teoria APOS. As tarefas foram elaboradas e desenvolvidas a partir das hipóteses do professor-pesquisador sobre o conhecimento de seus estudantes. Por isso, as tarefas sobre os números racionais são uma sugestão de material didático e poderão ser modificadas conforme o professor julgar necessário para atingir seu objetivo.

Para compreender o desenvolvimento desta THA é necessário relembrar os três tipos de tarefas propostas por Simon e Tzur (2004): tarefas iniciais são realizadas com os conhecimentos prévios dos estudantes; tarefas reflexivas levam os estudantes a refletirem e geram abstração de regularidades na relação atividade-efeito (ações e efeitos da tarefa); e tarefas de antecipação que exigem abstração e análise de regularidades nessa relação. Por fim, o diálogo entre professor e estudante fica definido como: (E) para os estudantes e (P) para o professor.

3.1 TAREFA I – O DOMINÓ DAS CONVERSÕES

A Tarefa I é uma tarefa inicial sobre o significado de parte-todo e sua representação numérica e geométrica. Os estudantes foram divididos em grupos de três a cinco pessoas de acordo com suas preferências e orientados para participarem ativamente, discutindo as ideias com seus grupos e respeitando as opiniões dos colegas no decorrer da realização das tarefas.

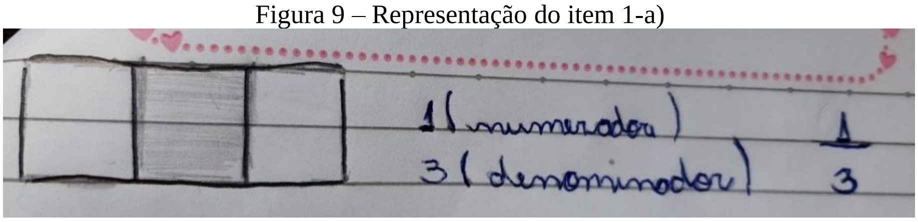
No desenvolvimento da tarefa, os estudantes interagiam entre si discutindo pontos de vistas sobre representações e significados dos números racionais e questionavam o professor sobre alguns termos ou conceitos que não se lembravam, mas que com a mediação do professor foram esclarecidos.

Durante a realização da leitura do item 1), uma estudante perguntou o que significava a palavra "congruentes", que então foi explicado pelo professor, como mostra o diálogo e a figura 9, resolução feita pela estudante.

(E): O que é uma figura congruente?

(P): É uma figura que tem a mesma forma e tamanho.

Figura 9 – Representação do item 1-a)



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Outra dúvida apresentada por outra estudante de outro grupo foi que não ficou claro o item 1-b) "Que significado está representado?". Alguns estudantes apresentaram dúvidas em muitos termos específicos da matemática presentes nos enunciados.

O professor explicou serem um dos significados de parte-todo, quociente, medida, razão e operações, no qual um desses se encaixava na resolução da tarefa, como apresentado no diálogo abaixo e a figura 10 mostra como os estudantes resolveram.

(E): Eu não entendi a pergunta da 1-b), como assim "significado"?

(P): Você tem quantas partes de quanto aqui?

(E): Pintadas?

(P): É.

(E): 1 de 3, um terço.

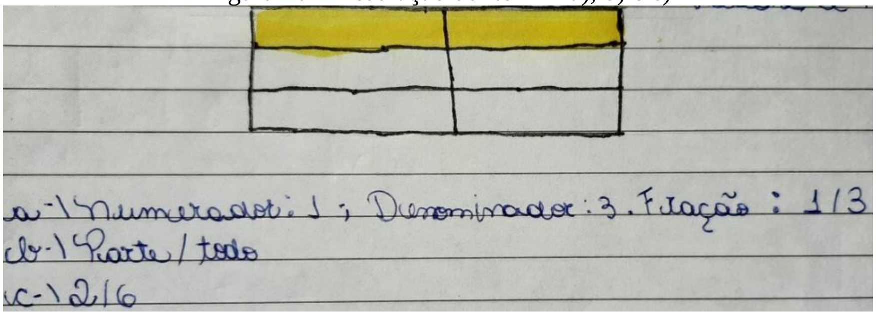
(P): Isso significa o que para você? O que vem na sua mente? Que conceito é esse?

(E): Divisão. Fração.

(P): Sim. Quando vocês aprenderam sobre fração, você tem um chocolate, divide em três partes e toma uma, o nome desse procedimento chama parte-todo. Esse é um dos significados da fração, você tem um objeto inteiro, divide em três partes e toma uma parte, então pode ser qualquer fração.

(E): Ah, entendi.

Figura 10 – Resolução do item 1- a), b) e c)



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Essa estudante também apresentou outra pergunta interessante em destacar sobre a fração, como mostra o diálogo abaixo.

(E): Na c) eu precisava fazer outro desenho ou pode ser em cima do primeiro?

(P): Pode.

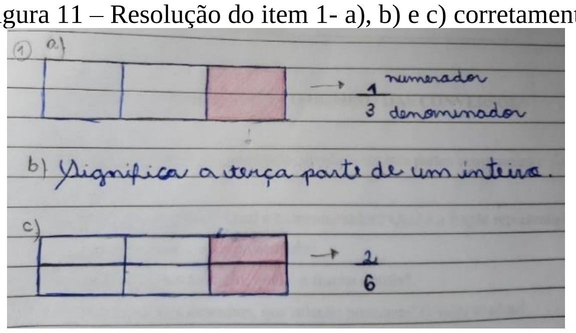
(E): Posso deixar $\frac{2}{6}$ ou preciso simplificar?

(P): Pode deixar.

Percebe-se que os estudantes possuem seus próprios conhecimentos a respeito de um objeto matemático, a partir do momento que ela pergunta se é preciso ou não simplificar uma fração. Por isso, é importante valorizar o conhecimento matemático atual do estudante durante a realização das tarefas, incentivando-o a resolver da maneira correta que se sinta mais à vontade. Esses procedimentos realizados pelo estudante possibilitam ao professor compreender como o estudante constrói seu pensamento matemático – por exemplo – a partir do mecanismo atividade-efeito.

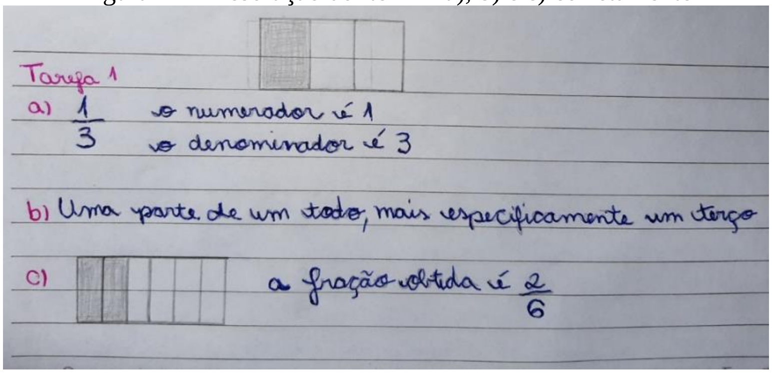
Também alguns estudantes optaram por resolver o item 1-c) separado do a) em duas figuras, isso mostra que cada um tem sua liberdade na construção de seu conhecimento, como mostra a resolução de outros estudantes na figura 11 e 12.

Figura 11 – Resolução do item 1- a), b) e c) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 12 – Resolução do item 1- a), b) e c) corretamente

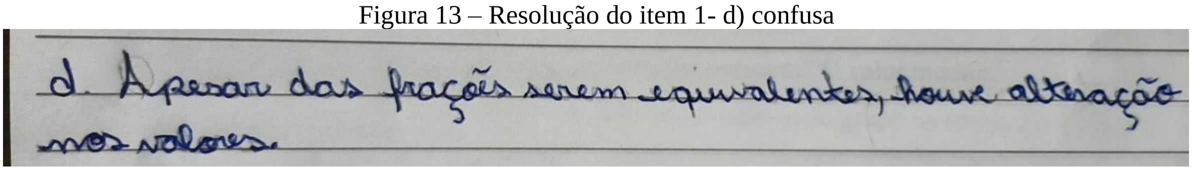


Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Por serem tarefas simples, geraram algum tipo de desconforto nos estudantes por parecerem muito fáceis ou não lembrarem dos conceitos, representações e significados. Porém, com a mediação do professor gradualmente eles foram criando confiança na resolução das tarefas.

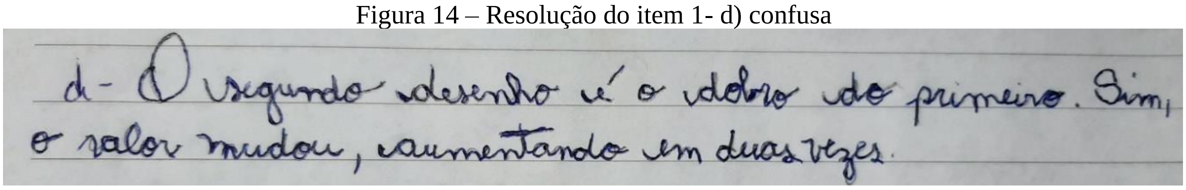
Nesse sentido, percebeu-se que os estudantes ao resolverem o item 1-d) apresentaram confusão na compreensão da conversão entre a representação numérica, geométrica e o significado de parte-todo, sendo resolvidos de forma parcialmente correta. O significado de parte-todo ficou claro, mas a conversão entre as representações se perde na ideia de frações equivalentes não ficando claro a resposta, como mostram as resoluções nas figuras 13, 14, 15 e 16.

Figura 13 – Resolução do item 1- d) confusa



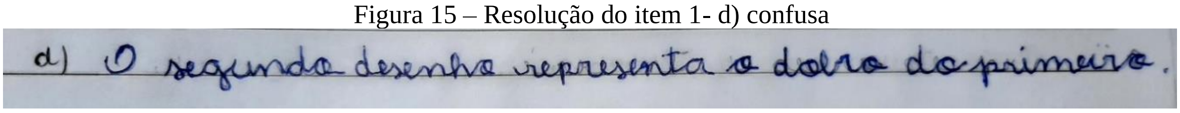
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 14 – Resolução do item 1- d) confusa



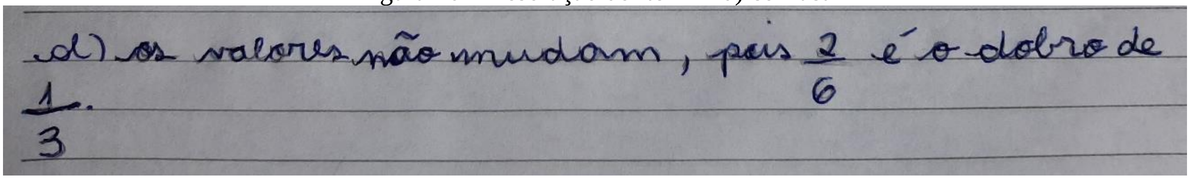
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 15 – Resolução do item 1- d) confusa



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

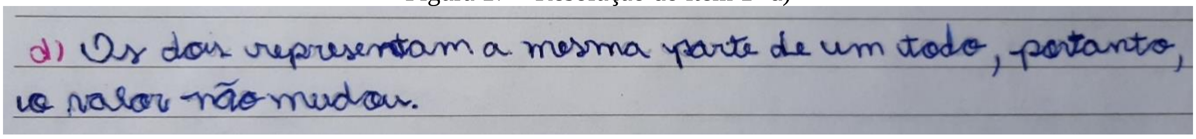
Figura 16 – Resolução do item 1- d) confusa



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

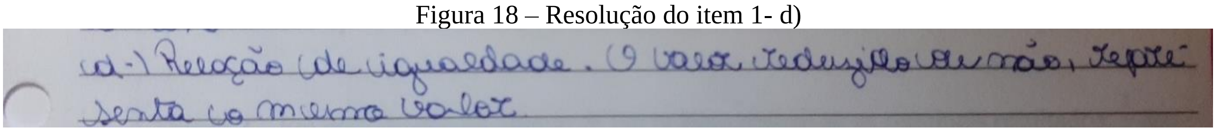
Enquanto isso, outros estudantes apresentaram corretamente a resolução da tarefa do item 1-d), como mostram as figuras 17, 18 e 19.

Figura 17 – Resolução do item 1- d)



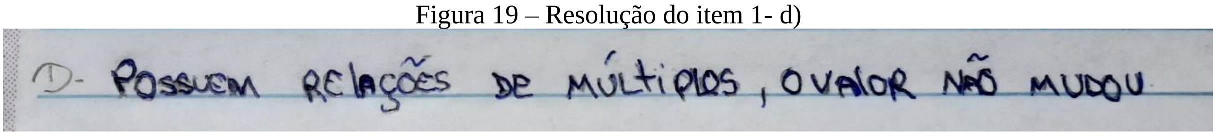
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 18 – Resolução do item 1- d)



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 19 – Resolução do item 1- d)



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Analisando a resolução do item 1), a partir das ideias de Dubinsky (1991) foi possível observar que os estudantes compreenderam a representação numérica e geométrica dos números racionais ao executarem as ações coordenando os processos e interiorizando as representações e o significado de parte-todo. É interessante destacar para o professor que deve relembrar o estudante quando abordar esse significado numa situação-problema.

Na resolução do item 2), alguns estudantes ficaram confusos na estratégia de repartir a figura geométrica na fração solicitada, mas com professor questionando e levando-os a refletirem a partir da ideia usada no item 1) – significado de parte-todo – eles conseguiram solucionar o item, como mostram os diálogos abaixo e as figuras 20 e 21.

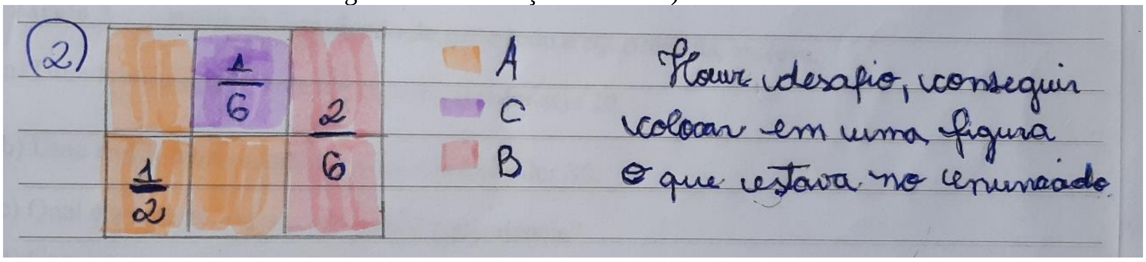
(E): Na questão 2), não sabemos como representar a fração na forma de figura. São três figuras ou uma?

(P): Dentro de uma figura, você deve repartir na proporção conforme as frações. O que significa $\frac{1}{6}$? O que significa $\frac{2}{6}$? Se somar, você tem $\frac{3}{6}$ que é equivalente a $\frac{1}{2}$?

(E): Sim.

(P): Tentem usar esse raciocínio.

Figura 20 – Resolução do item 2) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

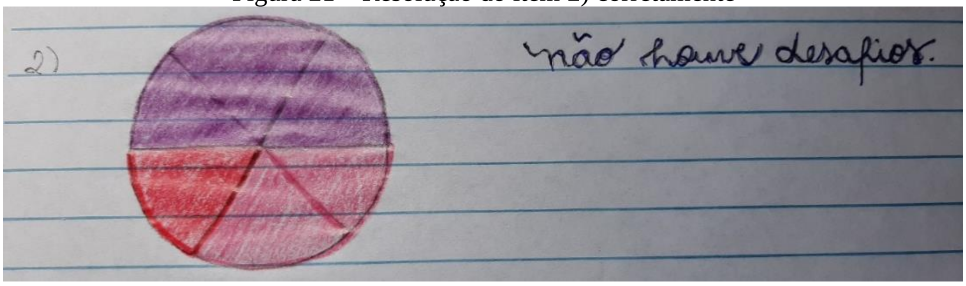
(E): É para fazer uma figura geométrica para cada chapa ou uma para o total?

(P): Você vai representar as frações na mesma figura.

(E): E se a gente dividir em seis, porque aí vai dar o total, aí a gente pega desses seis, metade que vai ser da chapa A e o que sobrar vai ser das outras chapas?

(P): Exatamente.

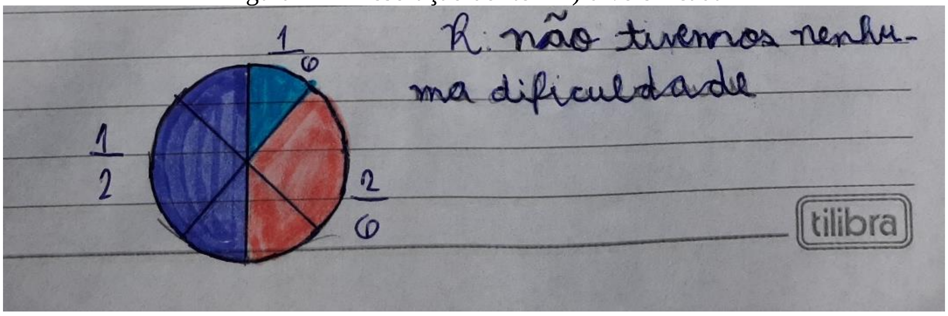
Figura 21 – Resolução do item 2) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

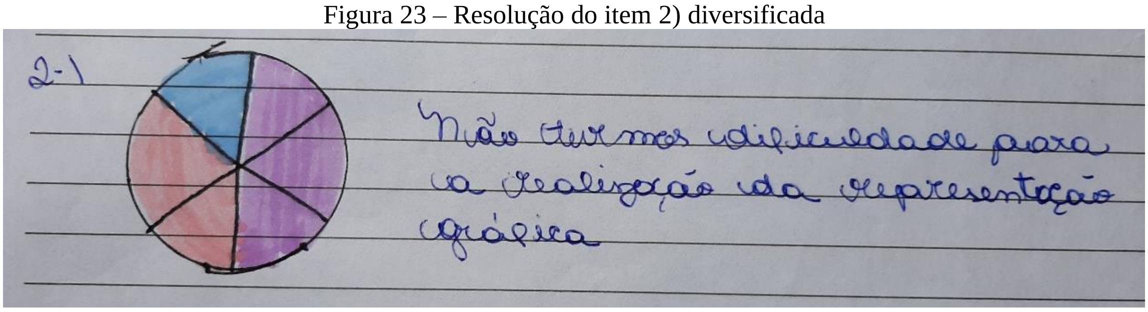
Mais uma vez, percebeu-se que quando os estudantes possuem autonomia para trabalhar segundo seus conhecimentos, cada um escolhe a maneira mais confortável para resolver a tarefa, o que é bom para motivar o estudante na construção de sua aprendizagem matemática, como mostram as diferentes formas resolvidas nas figuras 20, 21, 22, 23 e 24.

Figura 22 – Resolução do item 2) diversificada



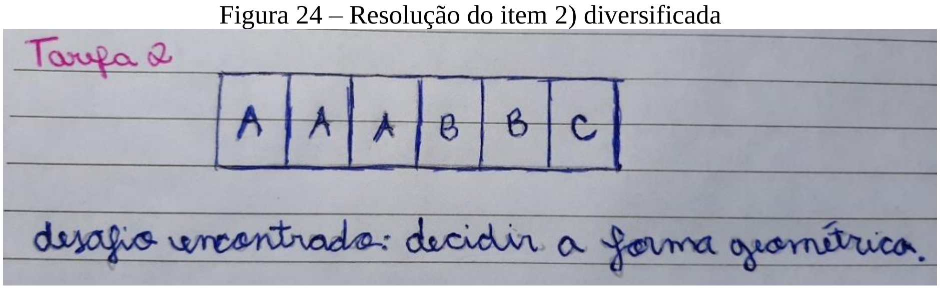
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 23 – Resolução do item 2) diversificada



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 24 – Resolução do item 2) diversificada



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Analisando a resolução do item 2), com as ideias de Dubinsky (1991) foi possível observar que os estudantes interiorizaram o significado de parte-todo ao coordenarem ações para transformar a representação numérica em geométrica relacionando suas representações corretamente.

Por último, a resolução do item 3) causou dúvida em alguns estudantes sobre que relação entre parte-todo e equivalência eles visualizaram, mas com os conhecimentos abordados nos itens anteriores, foi possível que estudantes com a mediação do professor resolvessem o último item da tarefa I.

Embora seja confuso tentar estabelecer uma relação entre parte-todo e equivalência, a ideia da questão foi levar o estudante a refletir que é possível visualizar uma fração como parte-todo e converter em uma fração equivalente, numérica ou geométrica, sem perder o mesmo significado.

Assim, os estudantes levantaram os seguintes questionamentos sobre o item 3), principalmente sobre o item c) que pergunta “que relação entre parte-todo e equivalência você visualizou”, porém conseguiram chegar a uma reflexão coerente com a ideia da questão, como mostram os diálogos abaixo e as figuras 25, 26 e 27.

(E): O que é parte-todo? Equivalência a gente sabe.

(P): Olhando para o primeiro desenho, o que vocês representaram? O que significa esse retângulo?

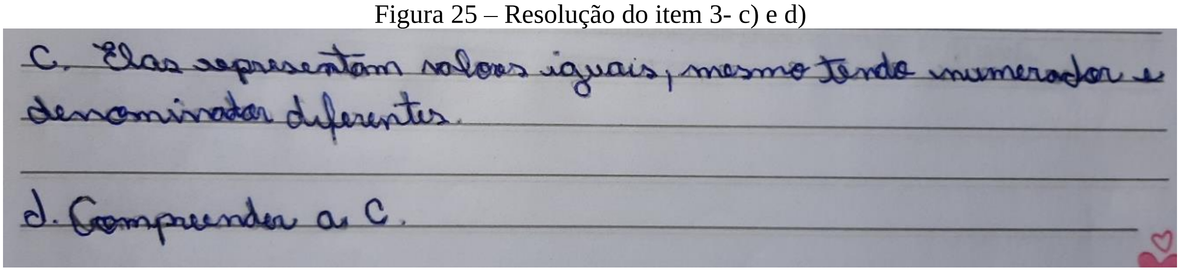
(E): A parte-toda.

(P): Mas como a gente representa essa fração?

(E): Divisão?

(P): Imagine que você tem um chocolate ou objeto inteiro, divide em tantas partes e você escolhe uma parte desse objeto que você quiser. Então a fração pode ter esse significado.

Figura 25 – Resolução do item 3- c) e d)


c. Elas representam valores iguais, mesmo tendo numerador e denominador diferentes.

d. Compreender a c.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

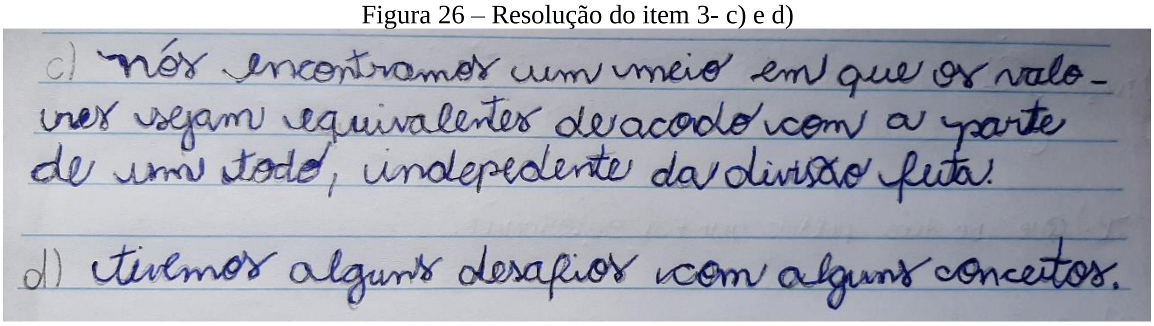
(E): A gente tá com dúvida em relação a essa parte-todo, o que seria desses dois casos?

(P): Dentre da parte-todo e equivalência, o que vocês entendem?

(E): Que a parte-todo é um pedaço de tudo e a equivalência é igualdade?

(P): Exatamente, a fração $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ são equivalentes e tem a relação de parte-todo.

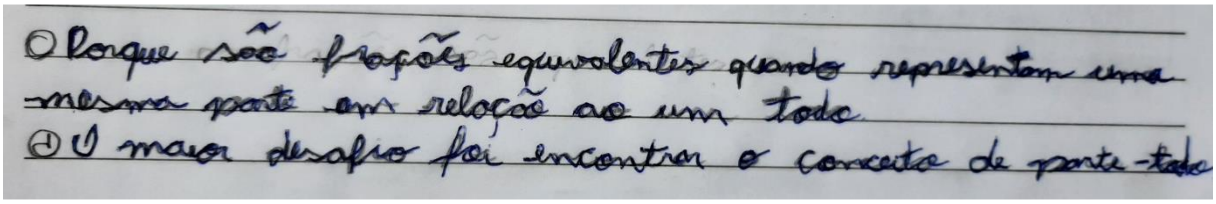
Figura 26 – Resolução do item 3- c) e d)


c) nós encontramos um meio em que os valores sejam equivalentes de acordo com a parte de um todo, indepedente da divisão feita.

d) tivemos alguns desafios com alguns conceitos.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

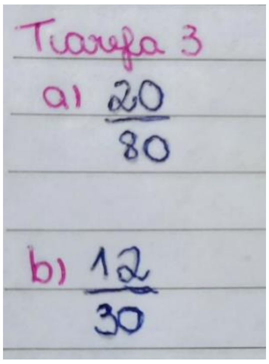
Figura 27 – Resolução do item 3- c) e d)



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

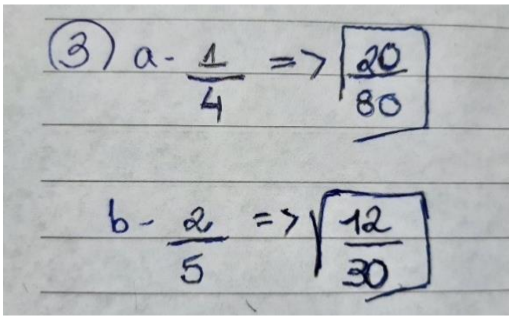
Outro ponto interessante em observar no item 3-a) e b), é que alguns estudantes resolveram diretamente as conversões em frações equivalentes com numerador 20 e denominador 30, enquanto outros realizaram o processo mais detalhado, como mostram as figuras 28 e 29.

Figura 28 – Resolução do item 3- a) e b) direto



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 29 – Resolução do item 3- a) e b) direto



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Especificamente na figura 29, os estudantes usaram o símbolo de “implica” como igualdade mostrando uma confusão no uso dos símbolos matemáticos na resolução do item da tarefa.

Analisando a resolução do item 3) de acordo as ideias de Dubinsky (1991), os estudantes compreenderam o significado de parte-todo e o conceito de equivalência ao anteciparem o resultado das conversões ao usarem ações mentais coordenando processos na construção e conversão das frações em frações equivalentes.

Ao final da resolução da tarefa I, cada grupo de estudantes jogou o jogo "Dominó das frações". As orientações do professor sobre as regras consistiram em dividir seis peças para cada estudante, eles decidiram quem começou com qualquer peça, ligando a parte numérica com a geométrica, assim se não tivessem a peça para combinar era só passar a vez. Houve algumas dúvidas, mas com a mediação do professor o jogo funcionou muito bem e motivou os estudantes a gostarem do conteúdo estudado, como mostra o diálogo abaixo.

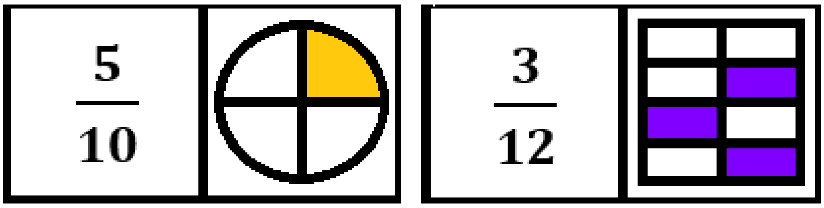
(P): Conseguiram associar a relação de parte-todo, equivalência e o dominó?

(E1): No começo foi difícil associar a fração e a imagem, mas depois deu certo.

(E2): Eu travei um pouco, foi difícil associar a fração a imagem, mas com esforço foi, só não gostei que perdi.

(E3): Eu fui multiplicando e dividindo mentalmente.

Figura 30 – Exemplo de como funciona o dominó (*1/4 em duas representações*)



Fonte: Jogo "O Dominó das frações".

Os estudantes conseguiram resolver a tarefa I, atingiram os objetivos propostos na THA e os resultados esperados foram ao encontro das hipóteses. Em alguns momentos foram necessários a intervenção do professor para os estudantes relembrarem termos ou conceitos básicos e os instigassem a refletirem sobre seu conhecimento matemático para resolverem a tarefa. Por exemplo, relembrar do numerador e denominador, do significado de parte-todo, da representação geométrica do número racional e do conceito de equivalência associado a fração.

A seguir, destacam-se três diálogos interessantes de estudantes de grupos diferentes sobre a representação numérica e geométrica dos números racionais e o significado parte-todo.

Grupo 1

(P): Vocês conseguiram associar a relação de parte-todo e equivalência? Que relação vocês enxergaram?

(E): Que ambas são iguais, apesar de ter numerador e denominador diferentes.

Grupo 2

(P): A partir do significado de parte-todo e equivalência, o que você associou?

(E): Os dois representam a mesma coisa, só que um é o dobro do outro. É só isso.

Grupo 3

(P): Vocês conseguiram entender a relação entre parte todo e equivalência? Qual é a relação que vocês identificaram?

(E): São frações diferentes, mas que são a mesma conta e parte. Representa a mesma quantidade.

A partir da teoria APOS de Dubinsky (1991), a tarefa I foi resolvida pelos estudantes com ações – atividade física ou mental – sobre a representação numérica e geométrica dos números racionais a partir do significado de parte-todo. Essas ações geraram coordenação de processos que resultaram em novos objetos matemáticos e na interiorização das representações e do significado de parte-todo, assim os itens da tarefa formaram um esquema.

Também houve muitos processos em que os estudantes transformaram as frações e refletiram descrevendo suas características sem ter demonstrado o passo a passo, mostrando que o resultado do processo foi antecipado e, por isso, assimilado.

Por fim, tem-se que a tarefa I foi elaborada e resolvida em espiral, portanto cada item da tarefa esteve interligado, em que os estudantes usaram ações em objetos matemáticos e coordenaram processos criando novos objetos matemáticos, criando um esquema.

3.2 TAREFA II – COMPREENDENDO O QUOCIENTE DE NÚMEROS RACIONAIS E OPERANDO COM ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

A Tarefa II é uma tarefa inicial e reflexiva sobre os significados de quociente e operador – adição e subtração – com frações. Os estudantes foram divididos em duplas ou trios conforme suas escolhas e a necessidade para a aula ocorrer de maneira adequada. Os estudantes interagiram entre si e apresentaram suas dúvidas ao professor que com sua mediação foram resolvidas.

Durante a leitura do item 1) e 2) uma estudante perguntou como era para montar a fração e com a mediação do professor conseguiu resolveu a tarefa, como mostra a figura 31.

(E): Como assim qual é a relação entre o item 1 e 2?

(P): O que você fez no item 1?

(E): Fração e dividi.

(P): E na tarefa 2?

(E): A mesma coisa.

(P): Você conseguiu enxergar alguma relação, algo em comum?

(E): Só o processo.

(P): Mas que processo?

(E): Da fração e divisão.

(P): Mas como que você fez esse processo?

(E): Coloquei 30 sobre 60 e dividi.

(P): Isso.

(E): Na segunda, em vez de colocar o 30, coloquei 24, porque são os pedaços.

(P): Então, essa relação que você obteve é a divisão de dois números inteiros, o nome desse significado é o quociente.

(E): Então o quociente é o resultado da divisão?

(P): Exatamente, outro significado da fração.

(E): A gente não tá entendendo a 2-b)?

(P): O que teve em comum? O que vocês fizeram?

(E): Quociente.

(P): Isso. Na segunda questão, a mesma coisa, ou seja, você pegou dois números inteiros e?

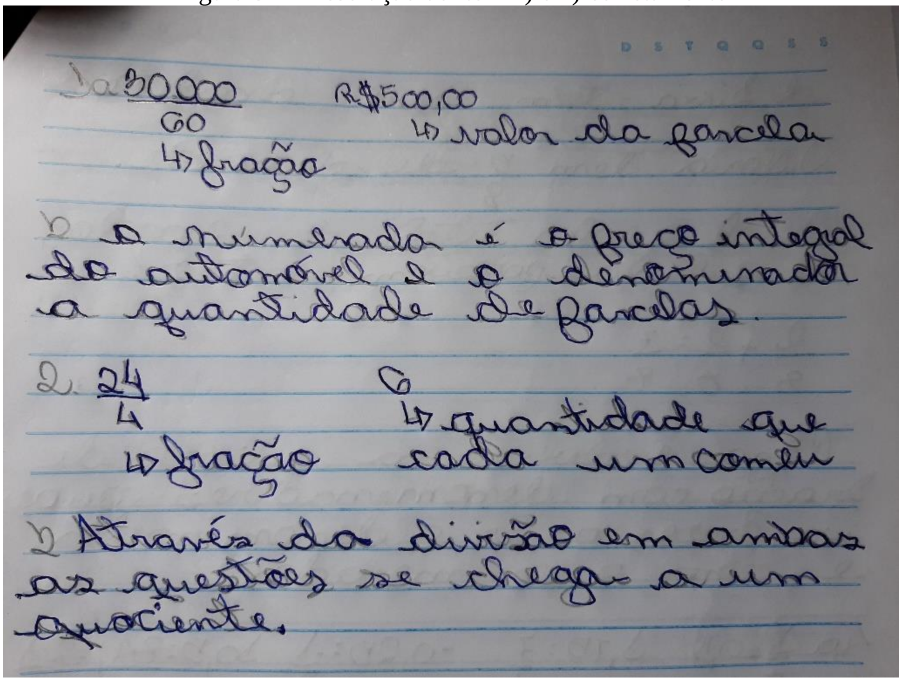
(E): Dividiu?

(P): Exatamente. Então o que é o quociente?

(E): O resultado das divisões de dois números.

(P): Então se você pegar um objeto e dividir, está aplicando o conceito de quociente.

Figura 31 – Resolução do item 1) e 2) corretamente


1) a) $\frac{30.000}{60}$ R$500,00
↳ fração ↳ valor da parcela
b) o numerador é o preço integral do automóvel e o denominador a quantidade de parcelas.
2. $\frac{24}{4}$ 6
↳ fração ↳ quantidade que cada um comeu
b) Através da divisão em ambas as questões se chega a um quociente.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Outro grupo apresentou a mesma dúvida sobre o item 2) e resolveu corretamente após a intervenção do professor, como mostra a figura 32.

(E): A questão a) da 2), a gente tá meio que confuso, porque de primeira a gente entendeu quantos pedaços cada um comeu pela lógica, só que não sei como represento isso, se é 2 sobre 8, 6 sobre 24? Não entendi.

(P): Você tem que pegar sempre números inteiros, então vamos analisar a pergunta, qual é o total de pedaços que eles comeram?

(E): 24 pedaços.

(P): E todos comeram a mesma quantia, então é 24 sobre quanto?

(E): 24 sobre 4.

(P): Isso. O total de quanto cada um comeu. Por que o que é o quociente, vocês sabem?

(E): Não?

(P): O quociente é o resultado da divisão de dois números inteiros, desde que o denominador não seja zero.

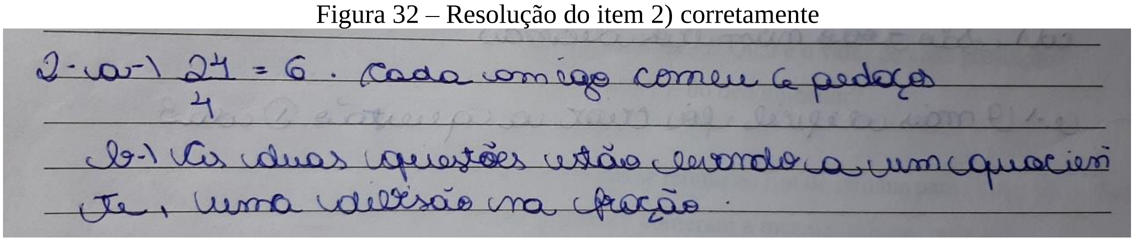
(E): Na primeira questão não dividi, fui simplificando e deu a mesma coisa.

(P): Você pode ir simplificando até chegar no valor.

(E): O resultado de uma multiplicação é produto. O resultado de uma divisão é? Quociente?

(P): Correto.

Figura 32 – Resolução do item 2) corretamente



2-a-) $\frac{24}{4} = 6$. Cada amigo comeu 6 pedaços

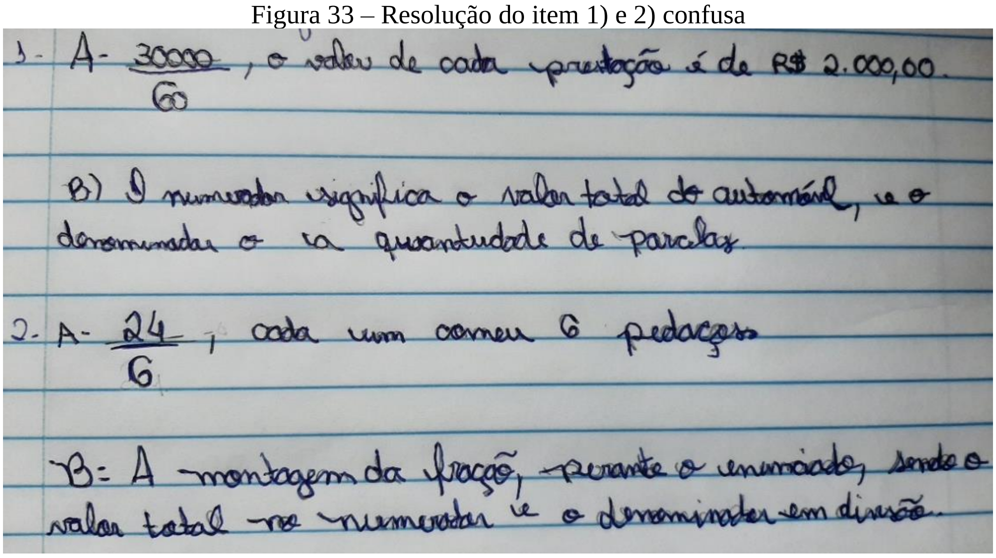
b-) As duas questões estão levando a um quociente, uma divisão na fração.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Os estudantes possuem seu próprio conhecimento sobre um objeto ou conceito matemático, por isso conseguiram representar as frações aplicando o significado de quociente. É importante que o professor valorize e incentive a autonomia do estudante para resolver as tarefas do seu jeito, caso esteja correta a construção do seu raciocínio lógico-matemático.

Dois grupos apresentaram confusões no processo de resolução dos itens 1) e 2), a montagem está correta, mas o resultado está incorreto, como mostram as figuras 33, 34 e 35.

Figura 33 – Resolução do item 1) e 2) confusa



1- A- $\frac{30000}{60}$, o valor de cada prestação é de R$ 2.000,00.

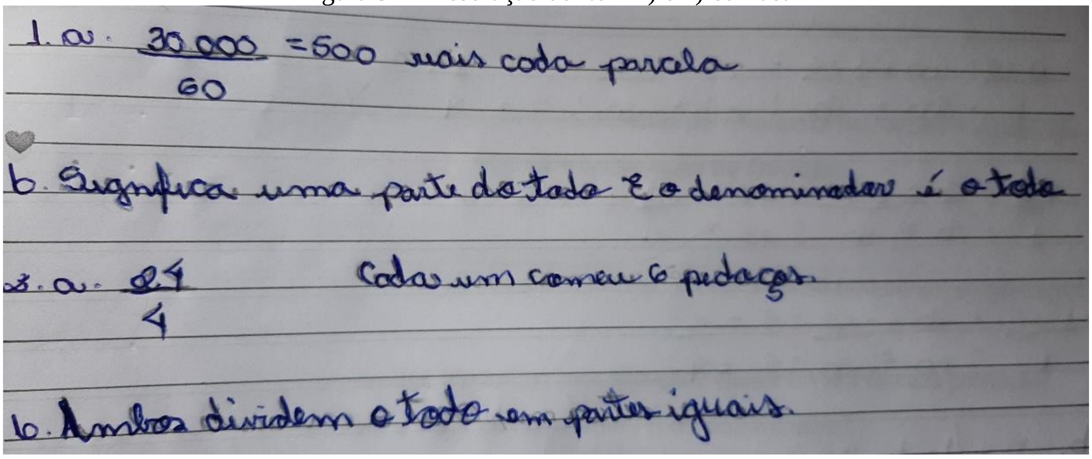
B) O numerador significa o valor total do automóvel, e o denominador o a quantidade de parcelas.

2- A- $\frac{24}{6}$, cada um comeu 6 pedaços

B: A montagem da fração, perante o enunciado, sendo o valor total no numerador e o denominador em divisão.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 34 – Resolução do item 1) e 2) confusa



1. a. $\frac{30\,000}{60} = 500$ reais cada parcela

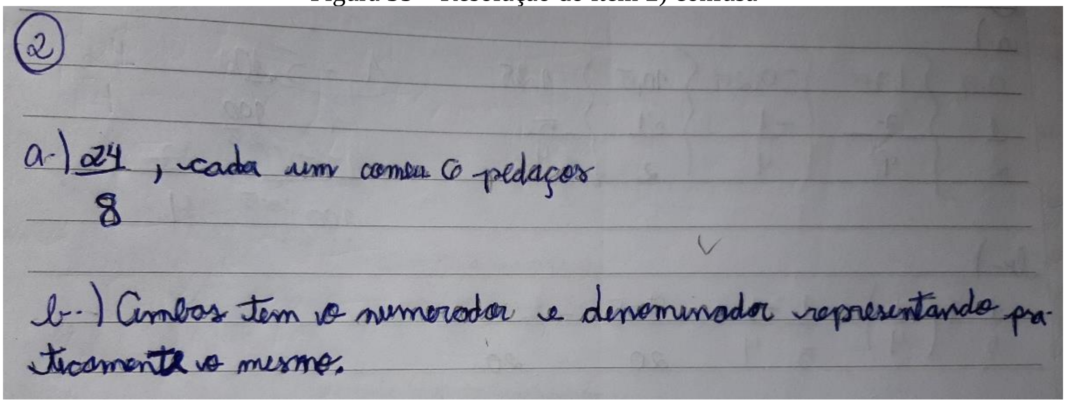
b. Significa uma parte do todo E o denominador é o todo

2. a. $\frac{24}{4}$ Cada um comeu 6 pedaços.

b. Ambos dividem o todo em partes iguais.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 35 – Resolução do item 2) confusa



2

a-) $\frac{24}{8}$, cada um comeu 6 pedaços

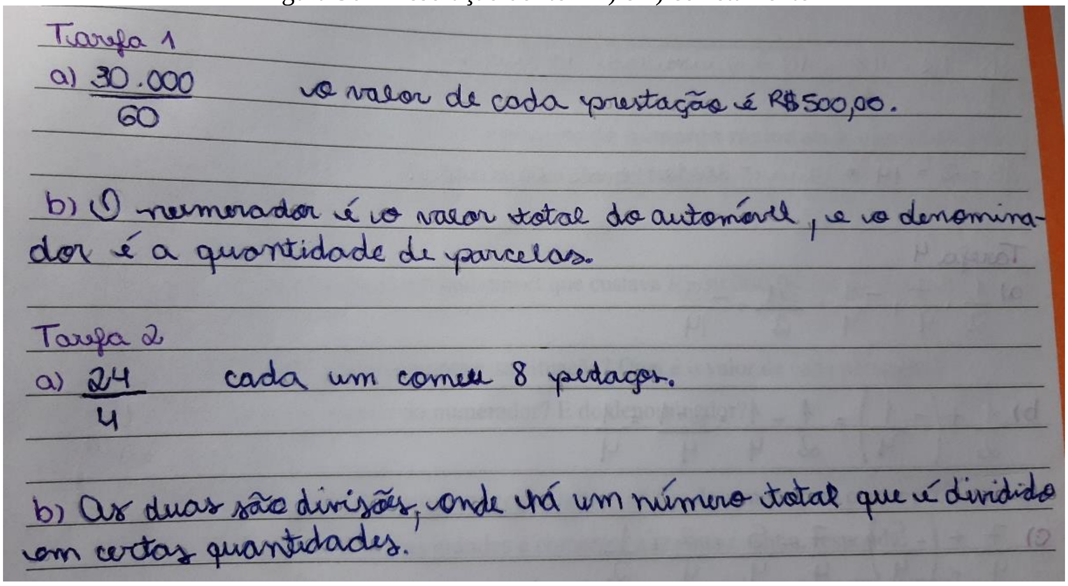
b-) Ambos tem o numerador e denominador representando praticamente o mesmo.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Simon (2004) afirma que, os desafios propostos em tarefas contextualizadas com conceitos matemáticos podem possibilitar ao estudante desenvolver habilidades cognitivas, sendo mais significativas do que a metodologia baseada em processos mecânicos, decorados e sem a compreensão desses conceitos no dia a dia. As questões e dúvidas que surgiram durante a resolução das tarefas sobre a relação entre os significados dos números racionais possibilitaram reflexões e discussões por parte dos estudantes, que vão além da resolução de processos e trazem situações contextualizadas dos números racionais relevantes para o estudante em seu cotidiano.

Os outros grupos resolveram corretamente os itens 1) e 2), como mostram as figuras 36, 37 e 38.

Figura 36 – Resolução do item 1) e 2) corretamente



Tarefa 1

a) $\frac{30.000}{60}$ o valor de cada prestação é R$500,00.

b) O numerador é o valor total do automóvel, e o denominador é a quantidade de parcelas.

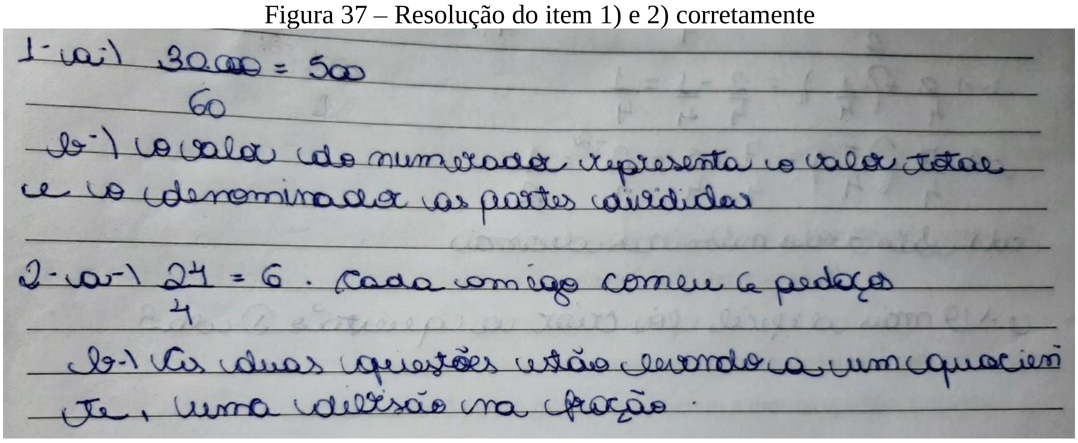
Tarefa 2

a) $\frac{24}{4}$ cada um comeu 8 pedaços.

b) As duas são divisões, onde há um número total que é dividido em certas quantidades.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 37 – Resolução do item 1) e 2) corretamente



1-a-) $\frac{30.000}{60} = 500$

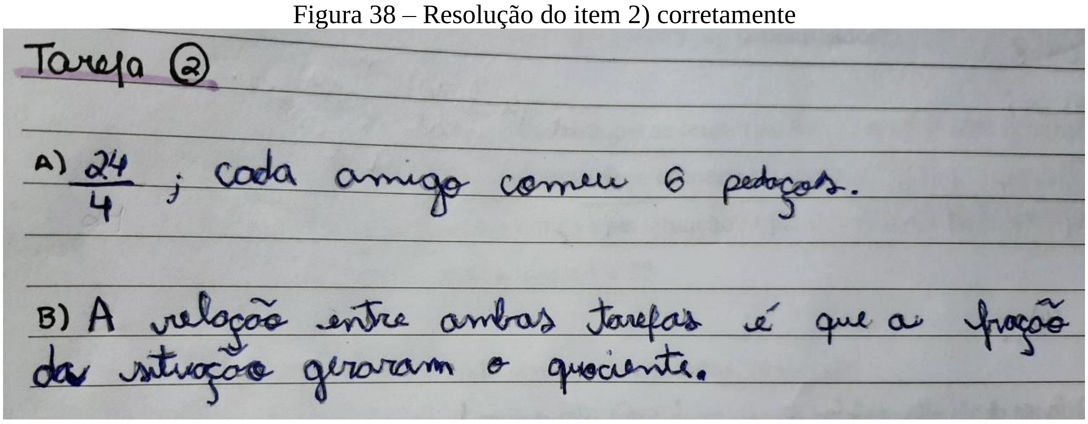
b-) o valor do numerador representa o valor total e o denominador as partes divididas

2-a-) $\frac{24}{4} = 6$. Cada amigo comeu 6 pedaços

b-) As duas questões estão levando a um quociente, uma divisão na fração.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 38 – Resolução do item 2) corretamente



Tarefa 2

A) $\frac{24}{4}$; cada amigo comeu 6 pedaços.

B) A relação entre ambas tarefas é que a fração das situação geraram o quociente.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Analisando a resolução do item 1) e 2), a partir das ideias de Dubinsky (1991) observou-se que os estudantes realizaram ações e coordenaram processos montando as frações e efetuando as divisões, compreendendo que em ambos os itens, o resultado é o quociente.

No desenvolvimento do item 3-a), b) e c), uma estudante de outro grupo questionou em como fazer a soma de frações e usou a noção de frações equivalentes, realizada na tarefa I, para somar e subtrair as frações corretamente, como mostra a figura 39.

(E): Por exemplo, se a gente fosse somar, não deveria deixar o denominador igual? Vezes 3 em baixo e em cima, aí manteria o denominador igual e somaria o numerador, aí ficaria 4 terços?

(P): Isso.

(E): A questão b) da 3), não conseguimos fazer.

(P): Quantos pedaços de pizza tem?

(E): 24.

(P): Depois de escrever, o que você deve fazer?

(E): Subtrair $\frac{5}{8}$***.***

(P): Isso. Porém se transformar 24 numa fração equivalente, faz sentido?

(E): Não.

(P): O que significa $\frac{24}{8}$***?***

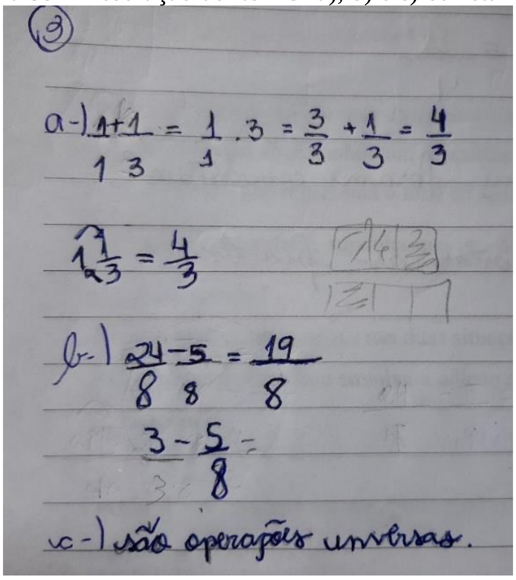
(E): 24 é o total, 3 é o número das pizzas.

(P): Isso. Então, você pode fazer a conta com as 3 pizzas menos $\frac{5}{8}$ ***de pedaços, ou converter diretos sobre o total de pedaços.***

(E): Ah, então vai dar $\frac{19}{8}$***.***

(P): Isso, pode converter de cabeça os pedaços $\frac{24}{8}$ ***ou 3 menos*** $\frac{5}{8}$***.***

Figura 39 – Resolução do item 3- a), b) e c) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Outro grupo de estudantes apresentou uma dúvida para somar e subtrair frações, que com a intervenção do professor conseguiram resolver, como mostra a figura 40.

(E): A gente não entendeu a relação entre o sanduiche inteiro, que é uma fração e um terço de mais um pouco de sanduíche, como que a gente vai juntar?

(P): É exatamente como escreveram, $\mathbf{1 + \frac{1}{3}}$.

(P): Para somar você vai pensar na relação de equivalência aprendida ontem, um retângulo divido em 3 partes, mais 1 parte de 3. Quantos pedaços de lanche você vai separar? Você pode somar essas duas frações?

(E): Não. Eu acho que tem que colocar uma divisão, dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima.

(P): Quase isso. Você vai transformar esse número numa fração equivalente. Porque pensa bem, se esse lanche for dividido em três partes, você pode somar as partes que sobraram? Pensa comigo, se você dividir esse lanche na mesma proporção 1 e $\mathbf{\frac{1}{3}}$***, você não poderá somar os pedacinhos?***

(E): Sim.

(P): Então como que você transforma um lanche inteiro equivalente a esse?

(E): Metade?

(P): Quase.

(E): Aí põe dois aqui?

(P): Divide aí para a gente ver.

(P): Só que como ele é um lanche completo, todos os quadradinhos estão pintados, não estão?

(E): É.

(P): Então o que dá, agora não ficou mais um inteiro, que fração ele representa?

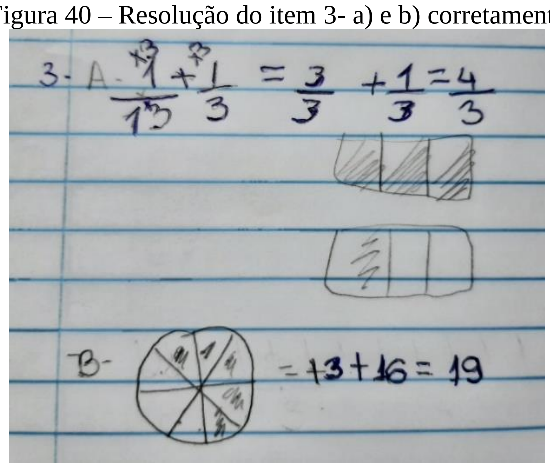
(E): 4/6?

(P): Quase.

(P): Vocês possuem $\frac{3}{3}$ ***que é equivalente a 1, pela multiplicação do numerador e denominador por 3. Então o que dá*** $\frac{3}{3}$ ***mais*** $\frac{1}{3}$***?***

(E): 4/3.

Figura 40 – Resolução do item 3- a) e b) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Ainda, outro grupo apresentou a seguinte dúvida sobre o item 3) e com a mediação do professor resolveram corretamente, como mostra a figura 41.

(P): O que vocês fizeram aqui na pizza?

(E): Porque o denominador é diferente, então a gente multiplicou os denominadores das frações para dar base igual.

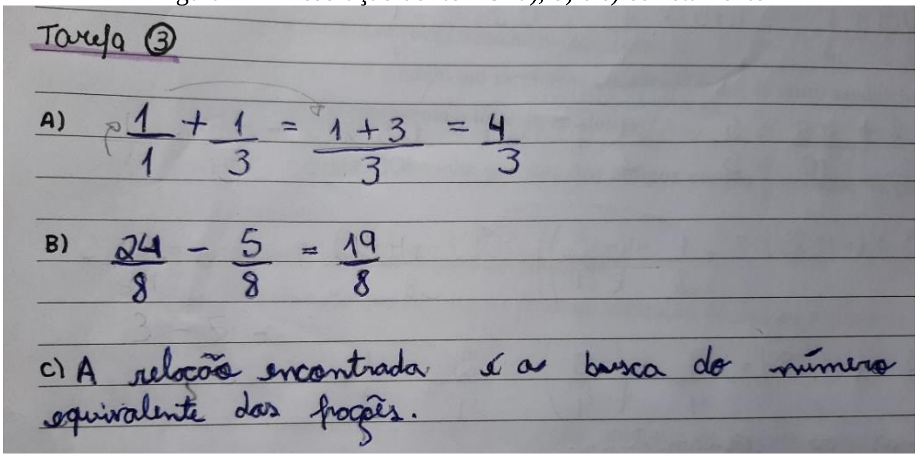
(P): Você usou fração equivalente?

(E): Sim.

(P): Então vocês transformaram $\frac{1}{1}$ ***em*** $\frac{3}{3}$***?***

(E): Isso.

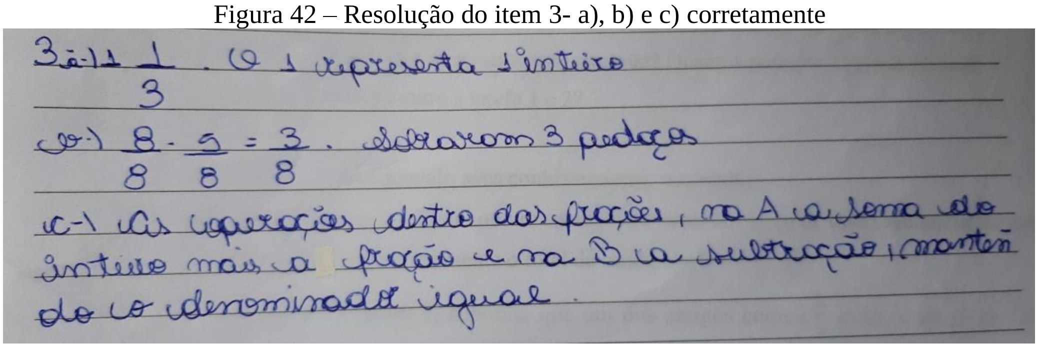
Figura 41 – Resolução do item 3- a), b) e c) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

No item 3), uma estudante de outro grupo sugeriu escrever a fração com $\mathbf{1\frac{1}{3}}$ resolvendo corretamente e utilizando seu conhecimento sobre o conceito de fração mista, como mostra a figura 42.

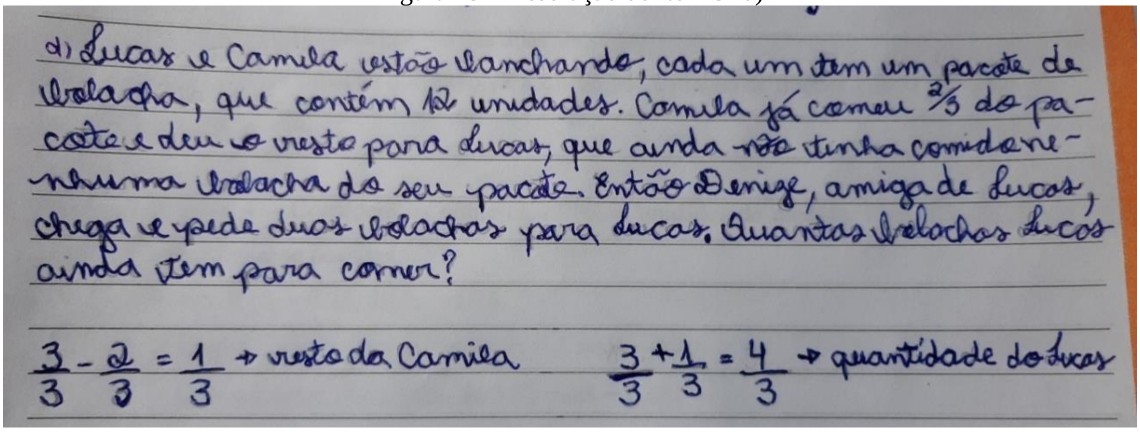
Figura 42 – Resolução do item 3- a), b) e c) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Por fim, além das resoluções adequadas, os estudantes conseguiram criar um problema do item 3-d) e resolveram utilizando conceitos, representações e significados aprendidos nos itens da tarefa anterior, como mostram as figuras 43, 44 e 45.

Figura 43 – Resolução do item 3- d)



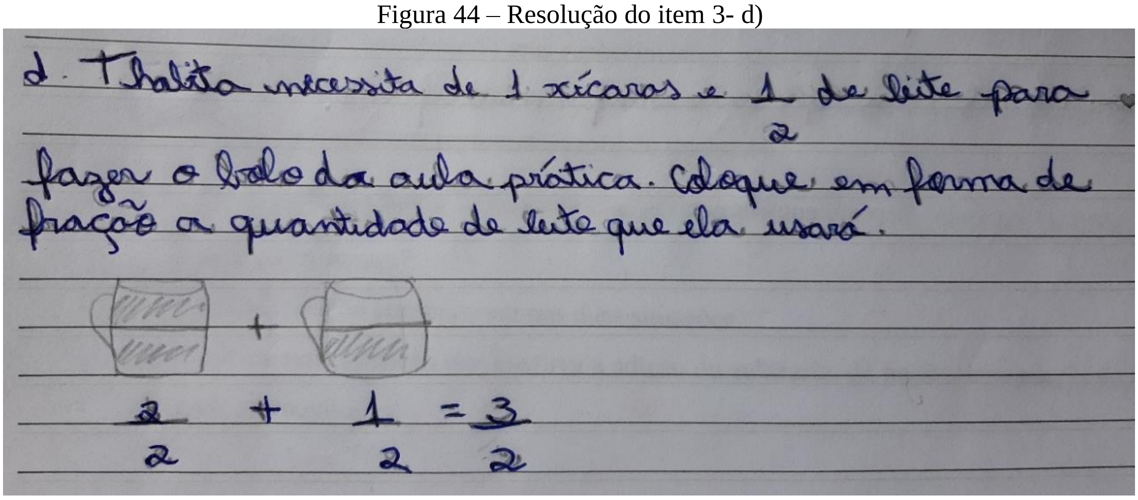
d) Lucas e Camila estão lanchando, cada um tem um pacote de bolacha, que contém 12 unidades. Camila já comeu $\frac{2}{3}$ do pacote e deu o resto para Lucas, que ainda não tinha comido nenhuma bolacha do seu pacote. Então Denise, amiga de Lucas, chega e pede duas bolachas para Lucas. Quantas bolachas Lucas ainda tem para comer?

$\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ → resto da Camila

$\frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ → quantidade do Lucas

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 44 – Resolução do item 3- d)

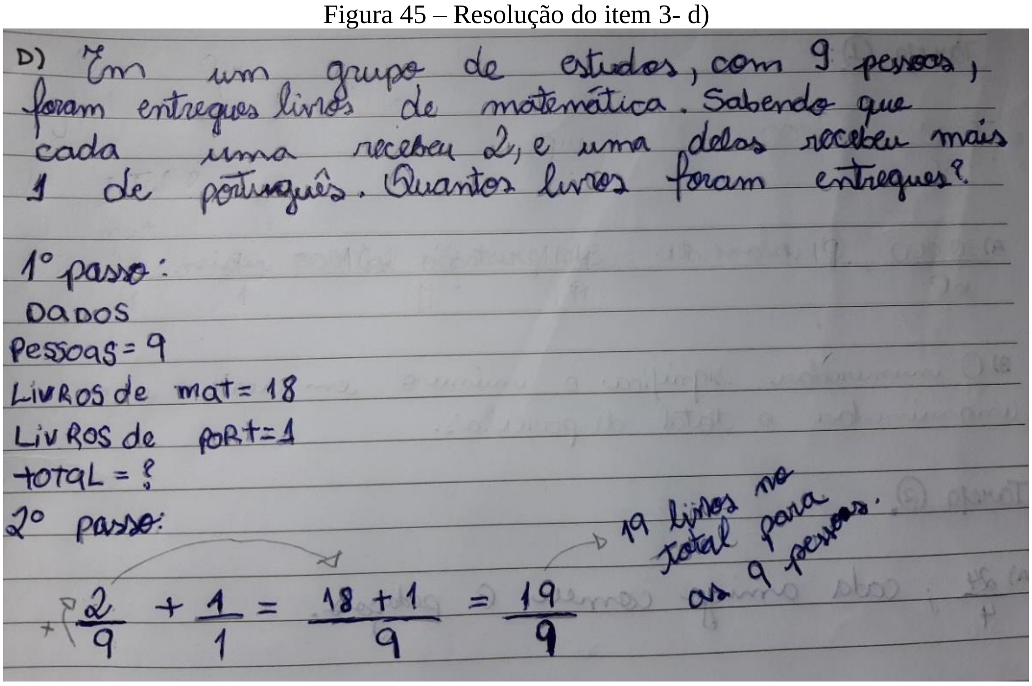


d. Thalita necessita de 1 xícaras e $\frac{1}{2}$ de leite para fazer o bolo da aula prática. Coloque em forma de fração a quantidade de leite que ela usará.

$\frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 45 – Resolução do item 3- d)



D) Em um grupo de estudos, com 9 pessoas, foram entregues livros de matemática. Sabendo que cada uma recebeu 2, e uma delas recebeu mais 1 de português. Quantos livros foram entregues?

1° passo:

DADOS

Pessoas = 9

Livros de mat = 18

Livros de port = 1

total = ?

2° passo:

$\frac{2}{9} + \frac{1}{1} = \frac{18 + 1}{9} = \frac{19}{9}$ → 19 livros no total para as 9 pessoas.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Analisando a resolução do item 3) segundo as ideias de Dubinsky (1991), os estudantes coordenaram processos e capsularam às frações aplicando o conceito de fração equivalente e usaram ações para operar com adição e subtração de frações corretamente.

No item 4) alguns estudantes apresentaram as seguintes dúvidas sanadas pelo professor, como mostra o diálogo abaixo e a figura 46.

(E): Como resolve o item 4-a) "converter número decimal para fração"?

(P): Que número você multiplica por outro e a vírgula anda para casa da direita?

(E): Por 10.

(P): Então se você multiplicar um número decimal, você deve multiplicar no numerador e denominador por um número de base 10 para transformar numa fração equivalente com numerador inteiro e poder simplificar.

(E): Entendi.

(P): Na última questão, como vocês fizeram as conversões de número decimal para fração?

(E): A gente foi pela lógica, 10 e meio é $\frac{21}{2}$***.***

(P): Mas vocês saberiam usar equivalência nesse para descobrir isso?

(P): Como transformariam $\frac{1{,}75}{1}$ ***em*** $\frac{7}{4}$***?***

(E): Multiplicaria por 4.

(P): Sim, mas poderia resolver de outra maneira.

(E): Por quê?

(P): Para você transformar em número inteiro tem que multiplicar por base 10, não é isso?

(E): Sim.

(P): Então quantas vezes tem que multiplicar ali?

(E): 1? 10?

(P): Duas, não é isso?

(E): Por que duas?

(P): Porque 100 dá um número inteiro, a vírgula anda duas casas para a direita. Só que se você multiplicar em cima, você tem?

(E): Ah, que multiplicar em baixo, então ficaria $\frac{175}{100}$.

(P): Por quanto você simplificaria?

(E): 50? Não, por 5?

(P): 25.

(E): Ah, senão terá que simplificar várias vezes.

(P): Isso. Quanto deu?

(E): $\frac{7}{4}$.

(P): Perceberam? Então qualquer número decimal para você transformar numa fração, é só transformar numa fração equivalente.

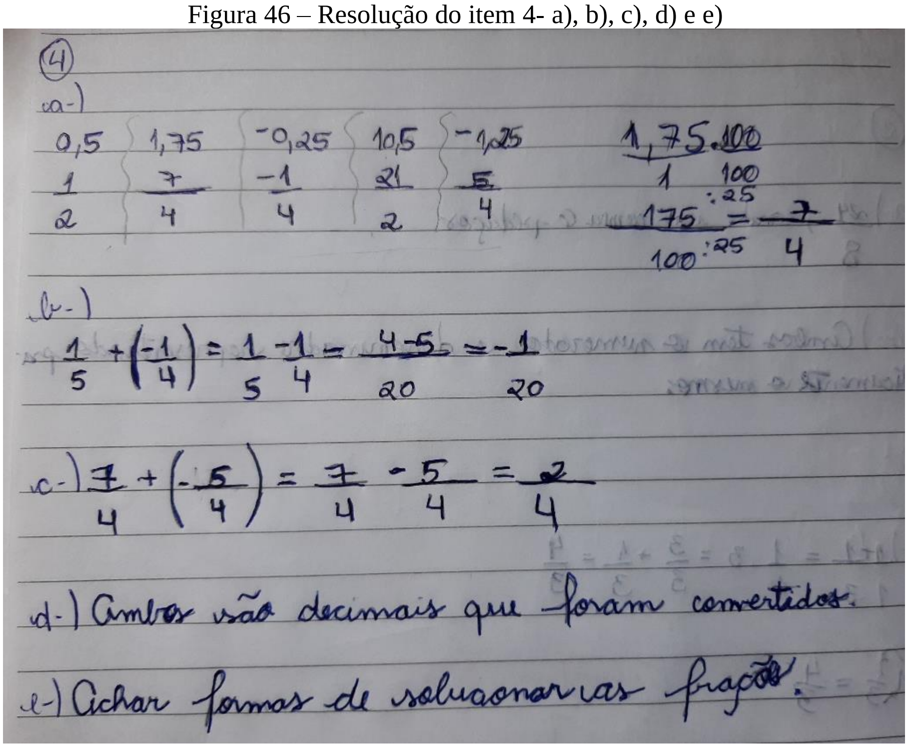
(E): Ah, então em todos esses casos daria para multiplicar por 100?

(P): Às vezes até mais, depende das casas. Por exemplo, nesse 10,5 por quanto você multiplicaria?

(E): Por 10.

(P): Então sempre que você quiser transformar um número decimal em fração, você usa equivalência, aí você simplifica e reduz. Isso é muito útil no vestibular, porque aparece lá 10,5 ao quadrado, se você transformar em fração, facilita o cálculo.

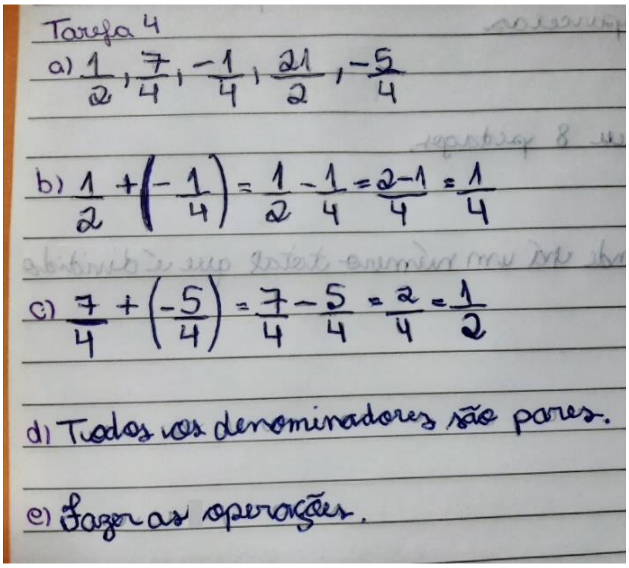
Figura 46 – Resolução do item 4- a), b), c), d) e e)



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

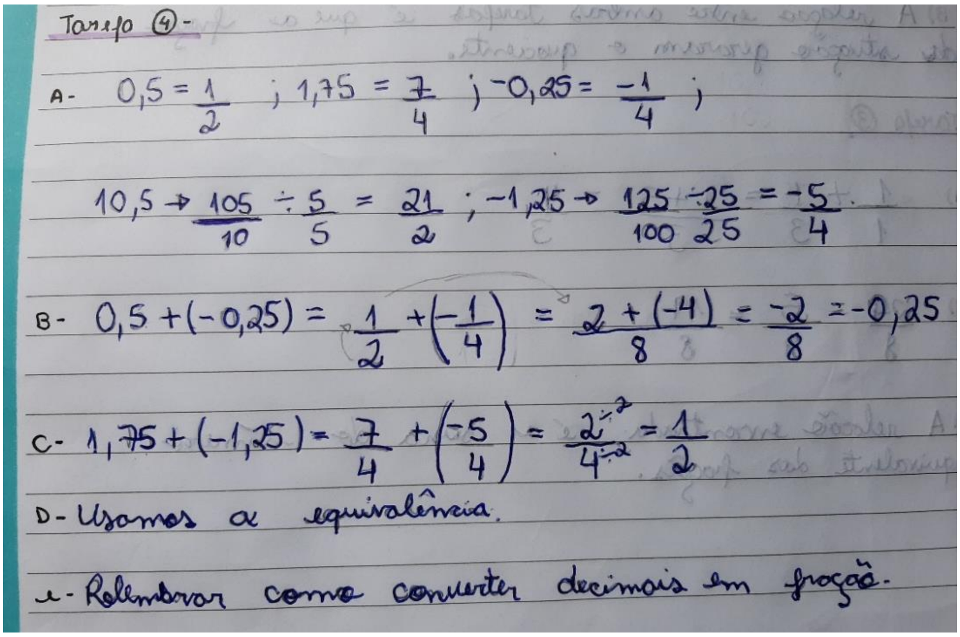
Por último, os grupos conseguiram resolver o item 4) corretamente, como mostram as figuras 47, 48, 49, 50, 51 e 52.

Figura 47 – Resolução do item 4- a), b), c), d) e e)



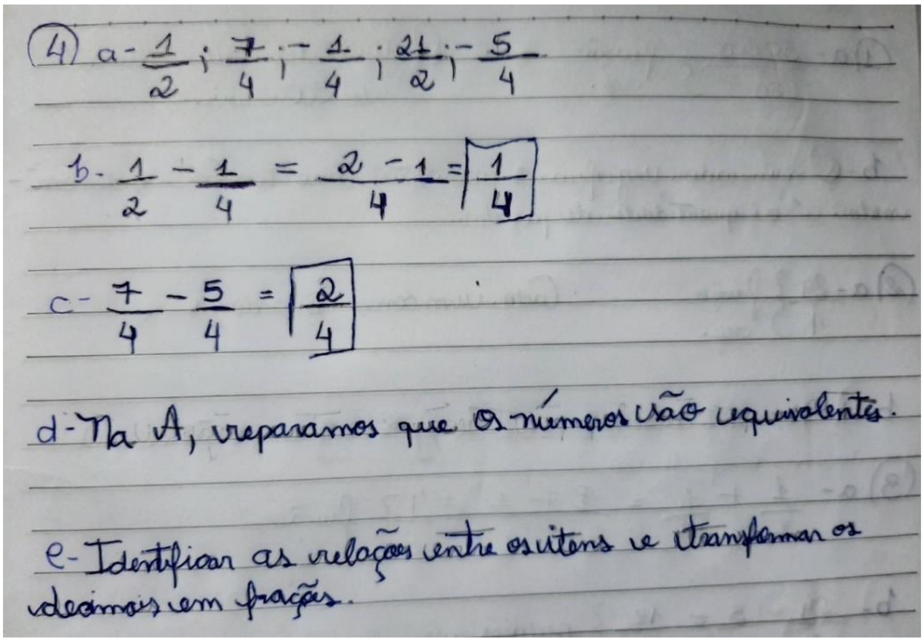
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 48 – Resolução do item 4- a), b), c), d) e e)



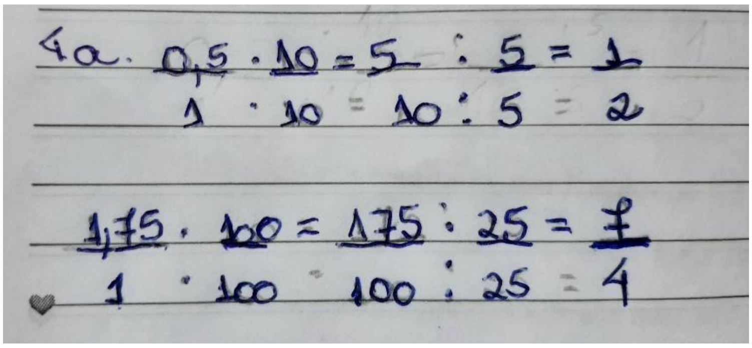
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 49 – Resolução do item 4- a), b), c), d) e e)



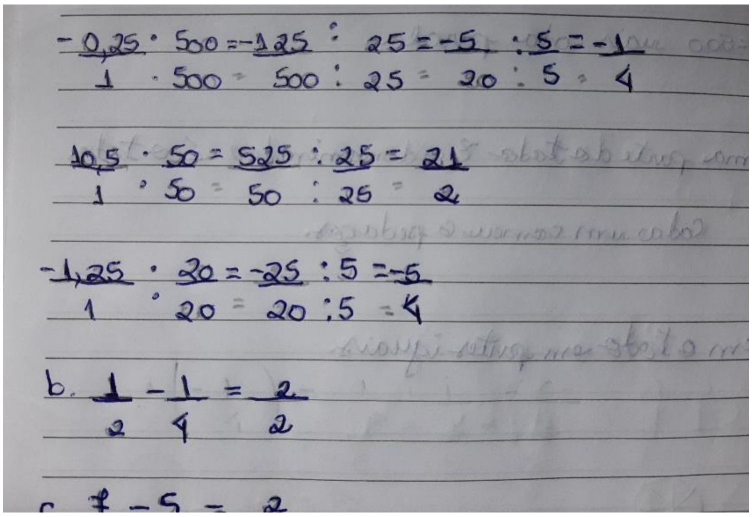
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 50 – Resolução do item 4- a), b), c), d) e e)



4a. $\frac{0,5}{1} \cdot \frac{10}{10} = \frac{5}{10} : \frac{5}{5} = \frac{1}{2}$

$\frac{1,75}{1} \cdot \frac{100}{100} = \frac{175}{100} : \frac{25}{25} = \frac{7}{4}$



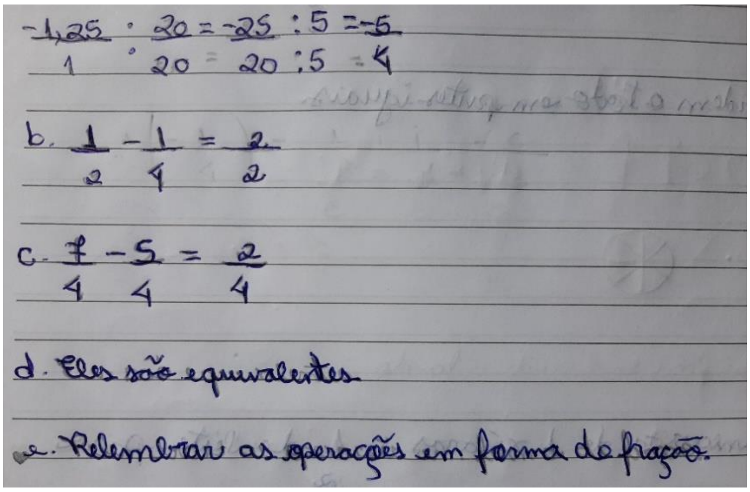
$-\frac{0,25}{1} \cdot \frac{500}{500} = -\frac{125}{500} : \frac{25}{25} = -\frac{5}{20} : \frac{5}{5} = -\frac{1}{4}$

$\frac{10,5}{1} \cdot \frac{50}{50} = \frac{525}{50} : \frac{25}{25} = \frac{21}{2}$

$-\frac{1,25}{1} \cdot \frac{20}{20} = -\frac{25}{20} : \frac{5}{5} = -\frac{5}{4}$

b. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{2}$

c. $7 - 5 = 2$



$-\frac{1,25}{1} \cdot \frac{20}{20} = -\frac{25}{20} : \frac{5}{5} = -\frac{5}{4}$

b. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{2}$

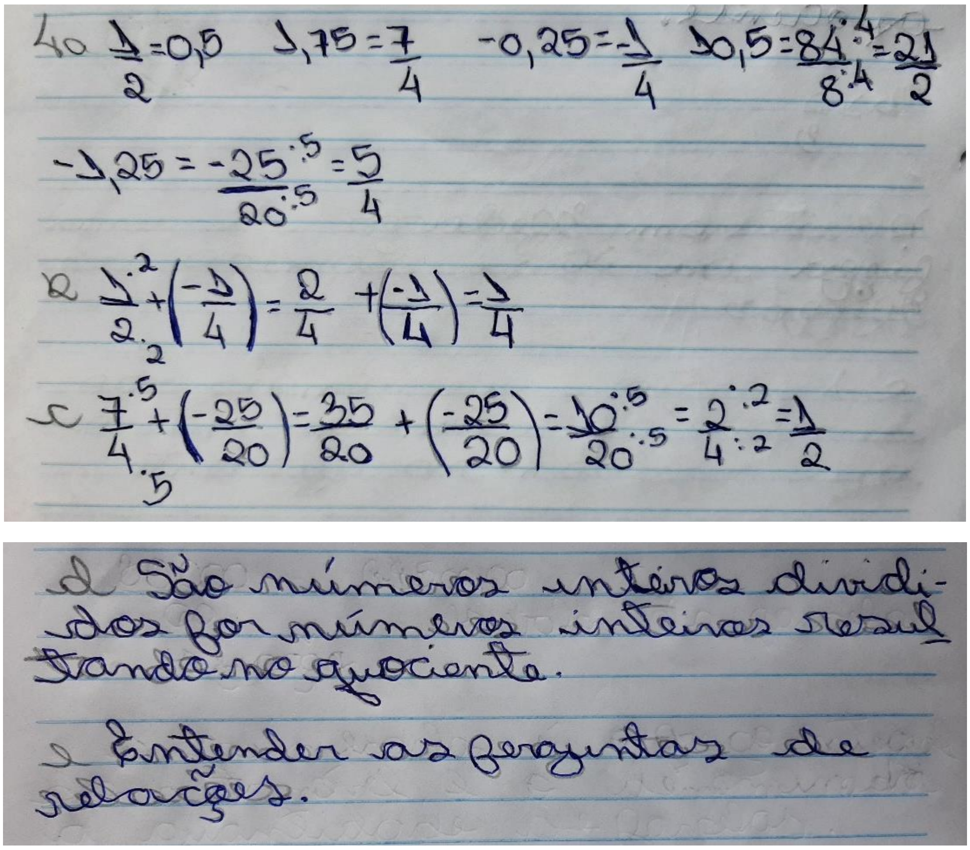
c. $\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4}$

d. Eles são equivalentes

e. Relembrar as operações em forma de fração.

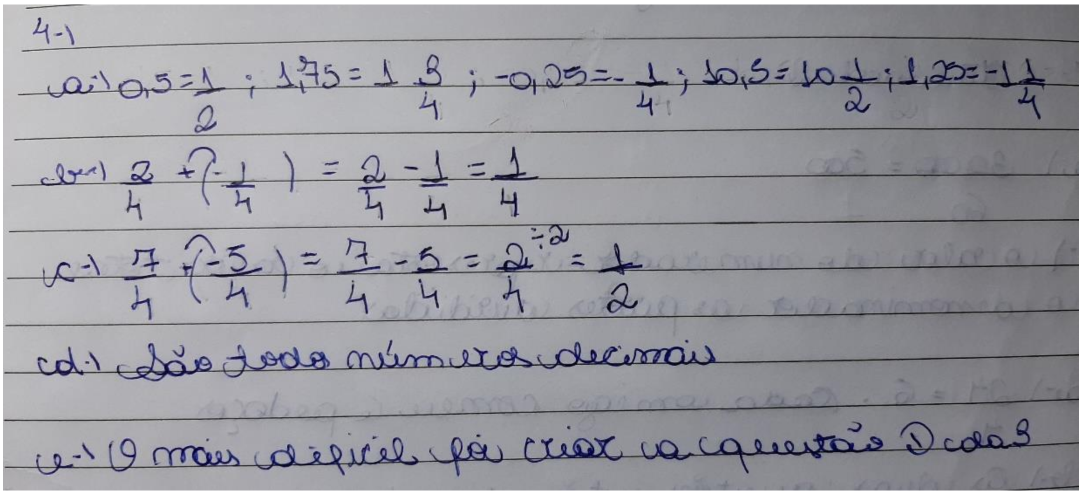
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 51 – Resolução do item 4- a), b), c), d) e e)



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 52 – Resolução do item 4- a), b), c), d) e e)



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Analisando o item 4), segundo as ideias de Dubinsky (1991) foi possível observar que os estudantes realizaram ações de conversões pelo cálculo mental dos números decimais em frações e realizaram as operações de adição e subtração a partir do conceito de fração equivalente. Diante disso, com a coordenação desses processos, eles foram capsulados em um novo objeto matemático que resultou na generalização e reversibilidade de processos envolvendo números racionais.

Os estudantes conseguiram resolver a tarefa II alcançando os objetivos propostos na THA e os resultados esperados foram ao encontro das hipóteses dessa tarefa. Em alguns momentos houve a necessidade da intervenção do professor para os estudantes esclarecerem suas dúvidas sobre alguns conceitos e processos na resolução dos itens da tarefa. Por exemplo, como relembrar o significado de quociente, como operar com adição e subtração de frações e como converter número decimais em frações.

Destacam-se as respostas interessantes de estudantes de grupos diferentes sobre conceitos básicos, significado de quociente e operadores de adição e subtração de frações.

Grupo 1

(P): Conseguiram associar as relações dessa tarefa com a de ontem?

(E): Sim. É tipo um complemento. Ontem a gente começou uma parte mais fácil pra gente relembrar e hoje tipo algo como se a gente já soubesse.

(P): E quais os desafios que vocês encontraram na resolução dessas tarefas?

(E): Lembrar muitas coisas que a gente não tem mais costume no cotidiano, tipo hoje se a gente tivesse uma matéria, seria muito mais fácil aprender algo que a gente viu na quinta série.

Grupo 2

(P): Vocês conseguiram identificar qual significado tem por trás aí? Como que vocês fizeram no item 1 e 2?

(E): Inicialmente a gente não tinha associado ao quociente do numerador dividido pelo denominador, eu tinha associado primeiro em simplificar a fração que querendo ou não chegou no mesmo resultado, só que é um processo mais difícil. Então eu fui mais no automático, mas depois a gente conseguiu associar ao quociente.

(P): Vocês conseguiram ver qual é a relação entre somar e subtrair frações?

(E): A diferença é que a gente já usou uma fração mista, a gente colocou um número inteiro ao invés de colocar $\frac{4}{3}$ a gente colocou $1\frac{1}{3}$, que também entra nessa divisão.

(P): E quais foram os desafios que vocês encontraram na resolução de todas as tarefas?

(E): Criar o enunciado e a situação problema.

(E): Deu para entender e associar bastante. Eu nem cogitei em fazer dessa forma que você falou (transformar decimal em fração equivalente), tipo acho muito interessante porque você falou, pois já esperava que a gente fizesse assim, mas a primeira coisa que eu pensei foi do meu jeito.

Grupo 3

(P): Vocês viram alguma relação entre essas tarefas?

(E): As operações, a gente desenhou para somar pelos desenhos por fração equivalente.

(P): Quais foram os desafios que vocês encontraram para resolver essas tarefas?

(E): Relembrar as operações de fração.

(P): Com a equivalência vocês conseguiram entender melhor?

(E): Sim, fez mais sentido.

(P): Como vocês fizeram para fazer a soma ou subtração? Que raciocínio vocês usaram?

(E): A gente pegou um inteiro que é o sanduíche e pegou um terço que era a outra parte tinha comido, aí a gente somou e deu $\frac{4}{3}$.

(P): Vocês usaram equivalência?

(E): Sim.

(E): Na pizza, a gente pegou $\frac{24}{8}$ *que são as 3 pizzas e a gente pegou* $\frac{5}{8}$ *que é a parte que ele comeu e subtraiu.*

(P): E vocês tiveram algum desafio na resolução dessas tarefas?

(E): O desafio foi a gente conseguir transformar os decimais em números fracionados e associar a relação de um exercício com outro.

Grupo 4

(P): Vocês conseguiram ver relação nessas duas tarefas? Como vocês fizeram?

(E): Aí a gente usou o equivalente para transformar a fração no mesmo denominador e somar.

(P): Vocês conseguiram converter? Como vocês fizeram?

(E): Para relembrar a gente teve dificuldade em como convertia. Esse número decimal tem duas casas então a gente colocou na base de 100, aí ficou 175 divido por 100 e só simplificou.

(P): Quais foram os desafios que vocês encontraram na resolução dessas tarefas?

(E): Relembrar os conceitos porque fica muito esquecido como a gente aprendeu no fundamental. A gente vê, mas esquece. Por isso é muito importante relembrar.

Segundo as ideias de Dubinsky (1991), a tarefa II foi desenvolvida pelos estudantes com ações apoiadas em seus conhecimentos prévios, que em conjunto com a mediação do professor, os estudantes conseguiram compreender as representações decimais e fracionárias, o significado de quociente e operar com a adição e subtração de frações. Ao coordenar processos na resolução da tarefa, os estudantes aplicaram a capsulação, generalização e reversibilidade formando novos objetos matemáticos que constituem um esquema. Portanto, os significados de quociente e operador (adição e subtração com frações) foram interiorizados pelos estudantes. Por se tratar de uma tarefa em forma espiral, as ações, processos e objetos resultaram num esquema bem estruturado.

3.3 TAREFA III – ESTUDANDO PORCENTAGEM, MEDIDA E RAZÃO A PARTIR DA MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

A Tarefa III é uma tarefa inicial, reflexiva e de antecipação sobre os significados de porcentagem, medida e razão a partir da multiplicação e divisão de números racionais. Os estudantes foram divididos em grupo de três a cinco pessoas e interagiram entre si e questionaram o professor sobre algumas dúvidas na resolução da tarefa.

Durante a realização da leitura do item 1), uma estudante de um grupo apresentou uma dúvida sobre a leitura da fração com denominador maior que dez e perguntou se era a palavra "avos" para se referir a uma fração com denominador maior que dez, que então foi explicado pelo professor, como mostra o diálogo abaixo e a figura 53.

(E): Na 1) b), escreva o que representa essas frações?

(P): Olhando para essas frações, que significado para vocês?

(E): Uma divisão por 100.

(P): Que pode ser associado algum conceito ou representação?

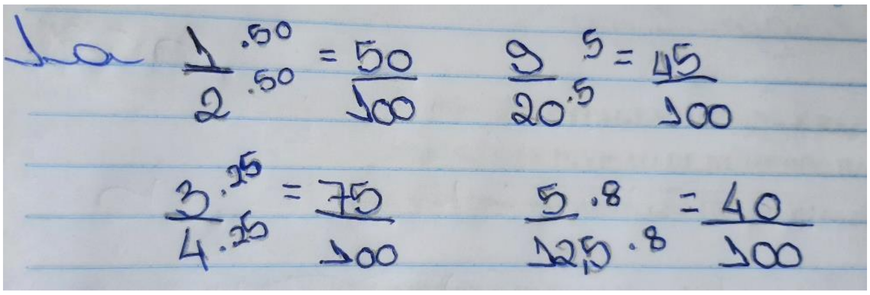
(E): Porcentagem.

(P): Então como você pode ler essa fração $\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}}$***?***

(E): 40%.

(P): Isso.

Figura 53 – Resolução do item 1- a) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

A mesma estudante também apresentou outra dúvida por achar a pergunta do item 2-b) confusa, como mostra o diálogo abaixo e a figura 54.

(E): A multiplicação que eles querem é de 1/4 por 2/3, 2/3 por 3/5 ?

(P): Se você calcular a multiplicação de uma fração por uma fração, você vai descobrir quanto tem do produto?

(E): Não.

(P): A questão é quanto é $\frac{1}{4}$ de 1.000 gramas, dá para fazer pela lógica, mas pela multiplicação de fração como vocês fariam?

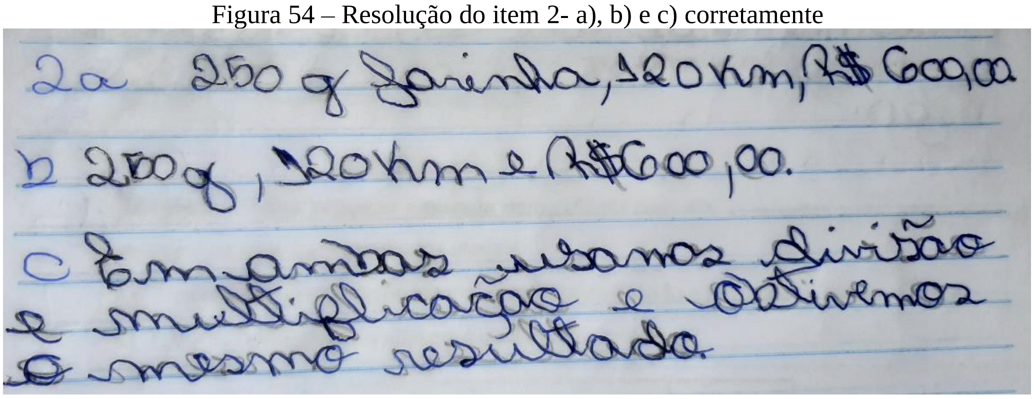
(E): Multiplica e divide.

(P): Como que você fez $\frac{1}{4}$ de 1.000?

(E): Eu dividi 1.000 por 4.

(P): Correto.

Figura 54 – Resolução do item 2- a), b) e c) corretamente


2a 250 g farinha, 120 km, R$ 600,00
b 250 g, 120 km e R$ 600,00.
c Em ambas usamos divisão e multiplicação e obtivemos o mesmo resultado

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Outra estudante de outro grupo apresentou a dúvida abaixo sobre como encontrar a porcentagem envolvendo uma razão.

(E): Como que acha porcentagem da razão?

(P): Como que você fez pra transformar em porcentagem na primeira tarefa?

(E): Transformei em denominador 100.

(P): Faça desse mesmo jeito.

Durante a interação entre estudantes e professor, uma estudante apresentou um exemplo de razão aplicado ao seu cotidiano, como mostra o diálogo abaixo.

(P): Quando vocês vão se inscrever no vestibular, conseguem enxergar alguma razão?

(E): Número de candidatos por vaga.

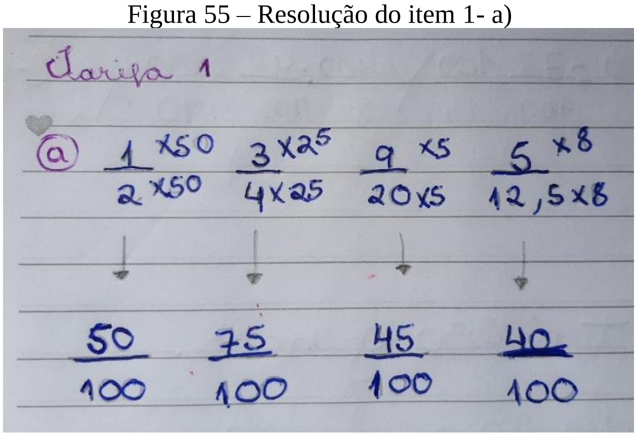
(P): Vocês conseguem enxergar o conceito de razão no dia a dia?

(E): Na sala, 35 mulheres e 4 homens, então eu faria $\frac{4}{35}$.

(P): Muito bem.

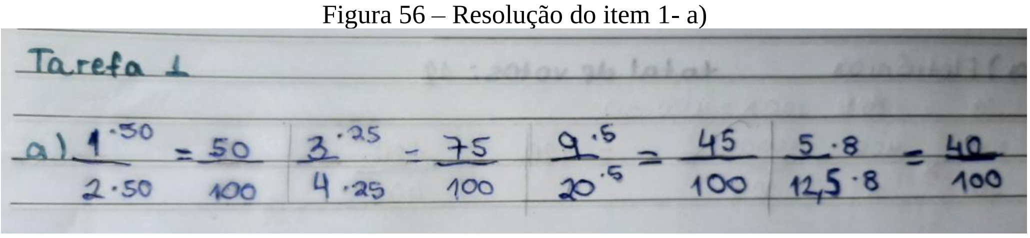
Na resolução do item 1) houve a necessidade de relembrar para alguns estudantes como se lê a fração com denominador maior que dez. Alguns grupos não apresentaram a resolução do item b), o que não deixa claro se o significado de porcentagem foi visualizado, como mostram as figuras 55 e 56.

Figura 55 – Resolução do item 1- a)



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 56 – Resolução do item 1- a)



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Por saberem usar o conceito de equivalência, os estudantes conseguiram transformar as frações em denominador 100 e visualizar o conceito de porcentagem implícito na fração, como mostra o diálogo abaixo e as figuras 57, 58, 59 e 60.

(P): Como vocês fizeram o item 1)?

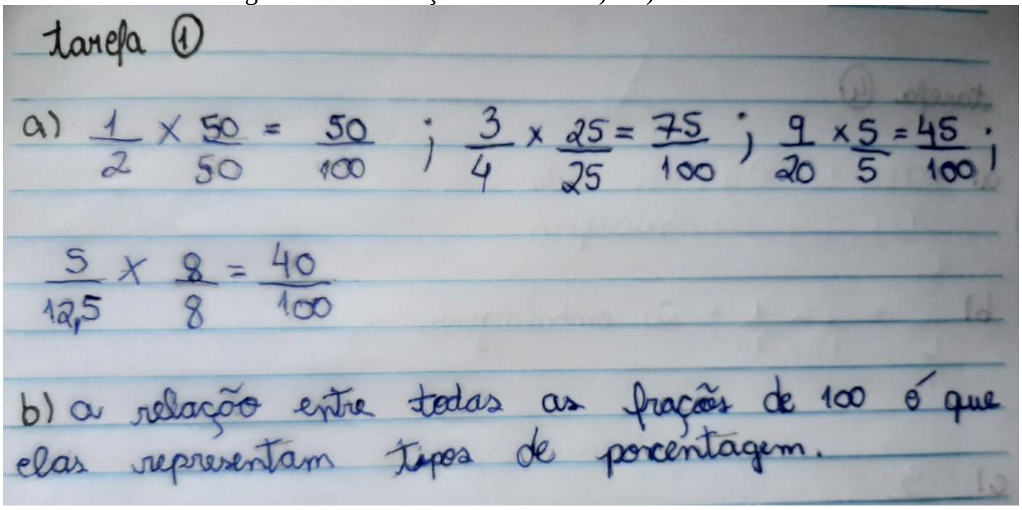
(E): Essa foi bem rápida, depois que a gente relembrou o conceito foi bem fácil de fazer.

(E): A gente achou um número que no denominador ia dar 100, e aí a gente só multiplicou os dois para dar uma fração equivalente.

(P): Como vocês fizeram essa tarefa?

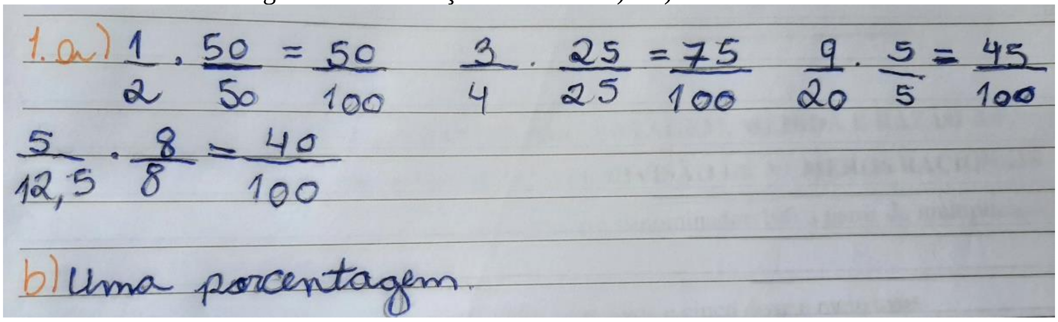
(E): A gente resolveu fácil até essa tarefa, era só colocar a fração e multiplicar até dar 100 no denominador, a gente foi mais na lógica.

Figura 57 – Resolução do item 1- a) e b) corretamente



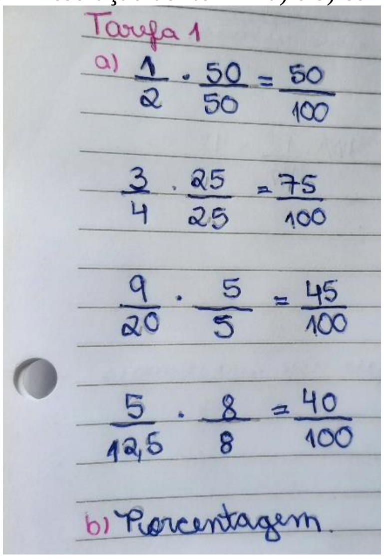
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 58 – Resolução do item 1- a) e b) corretamente



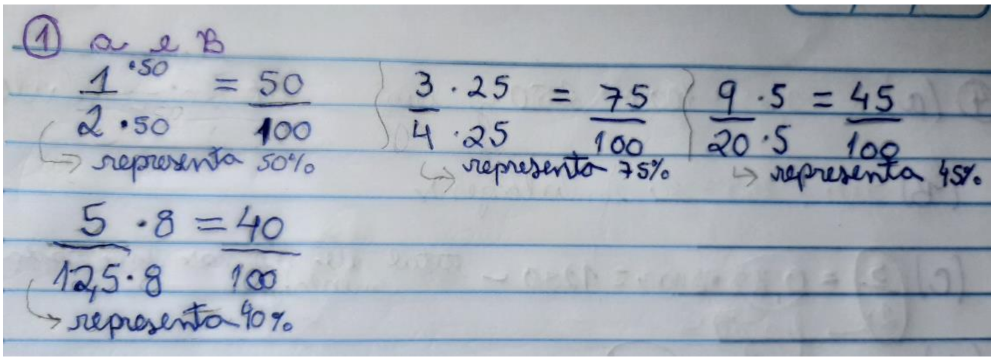
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 59 – Resolução do item 1- a) e b) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 60 – Resolução do item 1- a) e b) corretamente

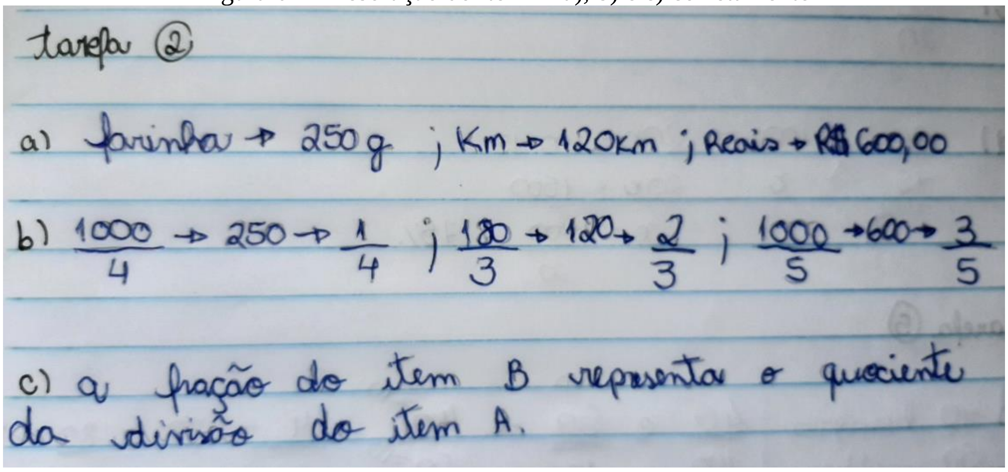


Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Analisando o item 1) a partir das ideias de Dubinsky (1991), os estudantes realizaram ações e coordenaram processos interiorizando o significado de porcentagem ao capsular e generalizar processos criando um novo objeto matemático.

Para resolver o item 2-c), alguns estudantes não entenderam a pergunta, mas resolveram corretamente os itens a) e b), como mostram as figuras 61, 62, 63, 64 e 65.

Figura 61 – Resolução do item 2- a), b) e c) corretamente



tarefa ②

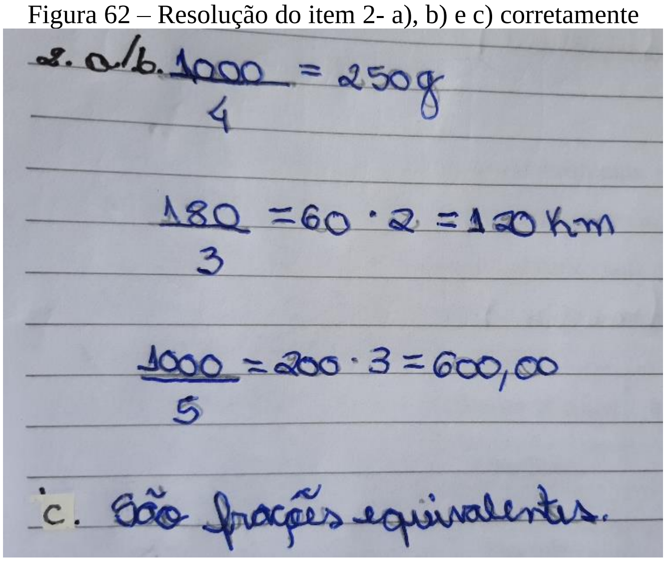
a) farinha → 250g ; Km → 120km ; Reais → R$ 600,00

b) $\frac{1000}{4}$ → 250 → $\frac{1}{4}$; $\frac{180}{3}$ → 120 → $\frac{2}{3}$; $\frac{1000}{5}$ → 600 → $\frac{3}{5}$

c) a fração do item B representa o quociente da divisão do item A.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 62 – Resolução do item 2- a), b) e c) corretamente



2. a/b. $\frac{1000}{4} = 250g$

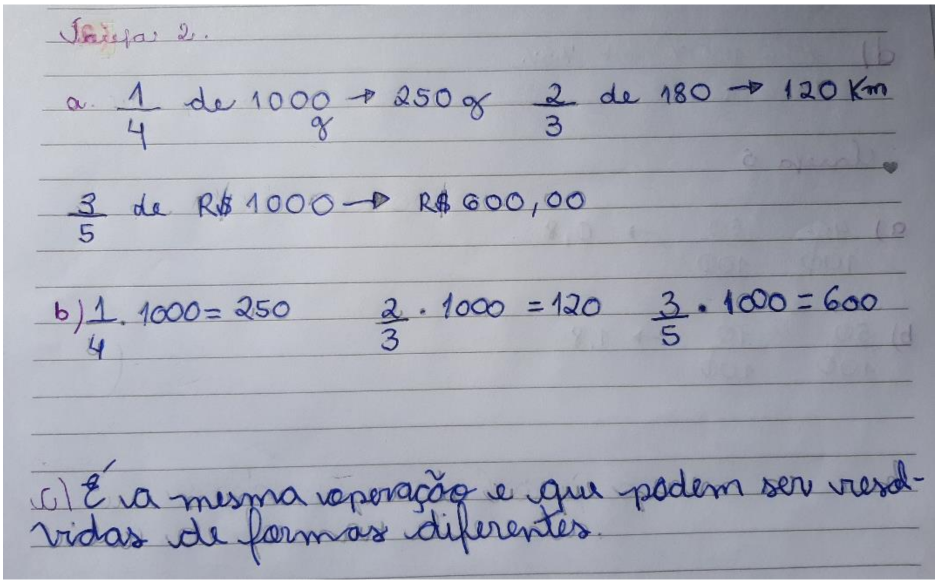
$\frac{180}{3} = 60 \cdot 2 = 120$ km

$\frac{1000}{5} = 200 \cdot 3 = 600,00$

c. São frações equivalentes.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 63 – Resolução do item 2- a), b) e c) corretamente



Tarefa 2.

a. $\frac{1}{4}$ de 1000 g → 250 g $\frac{2}{3}$ de 180 → 120 Km

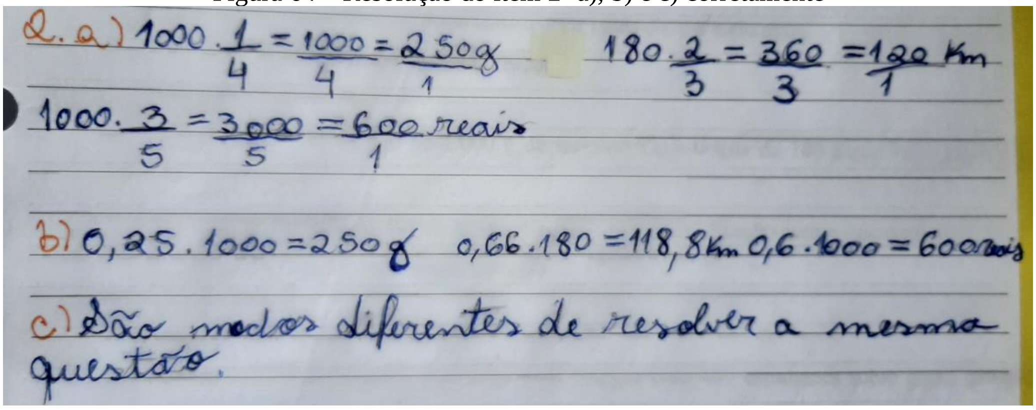
$\frac{3}{5}$ de R$ 1000 → R$ 600,00

b) $\frac{1}{4} \cdot 1000 = 250$ $\frac{2}{3} \cdot 1000 = 120$ $\frac{3}{5} \cdot 1000 = 600$

c) É a mesma operação e que podem ser resolvidas de formas diferentes.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 64 – Resolução do item 2- a), b) e c) corretamente



2. a) $1000 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1000}{4} = \frac{250g}{1}$ $180 \cdot \frac{2}{3} = \frac{360}{3} = \frac{120 \text{ Km}}{1}$

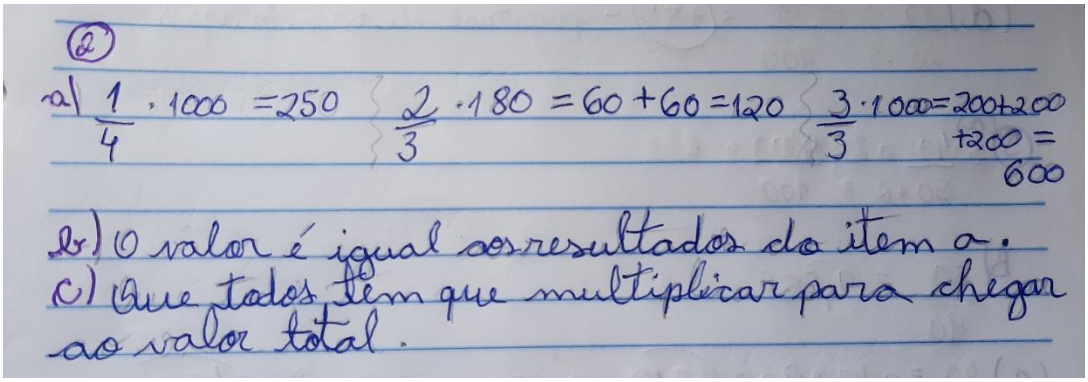
$1000 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3000}{5} = \frac{600}{1}$ reais

b) 0,25 . 1000 = 250 g   0,66 . 180 = 118,8 Km   0,6 . 1000 = 600 reais

c) São modos diferentes de resolver a mesma questão.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 65 – Resolução do item 2- a), b) e c) corretamente



2

a) $\frac{1}{4} \cdot 1000 = 250$ $\frac{2}{3} \cdot 180 = 60 + 60 = 120$ $\frac{3}{3} \cdot 1000 = 200 + 200 + 200 = 600$

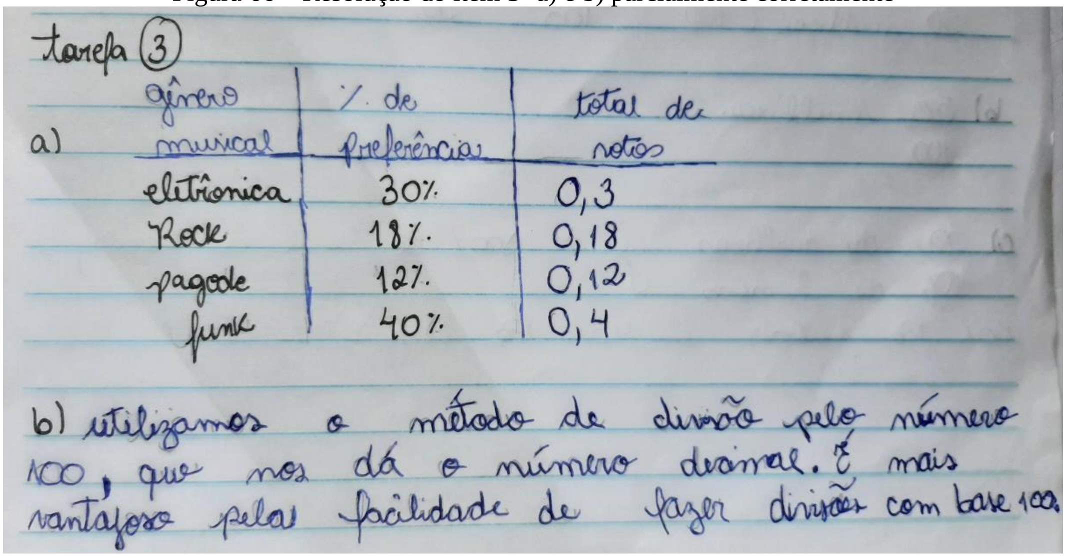
b) O valor é igual aos resultados do item a.

c) Que todos tem que multiplicar para chegar ao valor total.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Ao resolverem o item 3), os estudantes utilizaram o mesmo raciocínio do item anterior, eles dividiram os valores por 100 e multiplicaram o resultado de cada gênero pelo valor correspondente. Um grupo apresentou a resolução parcialmente correta ao esquecerem de multiplicar o resultado pela quantidade de pessoas, como mostra a figura 66.

Figura 66 – Resolução do item 3- a) e b) parcialmente corretamente



tarefa 3

a)

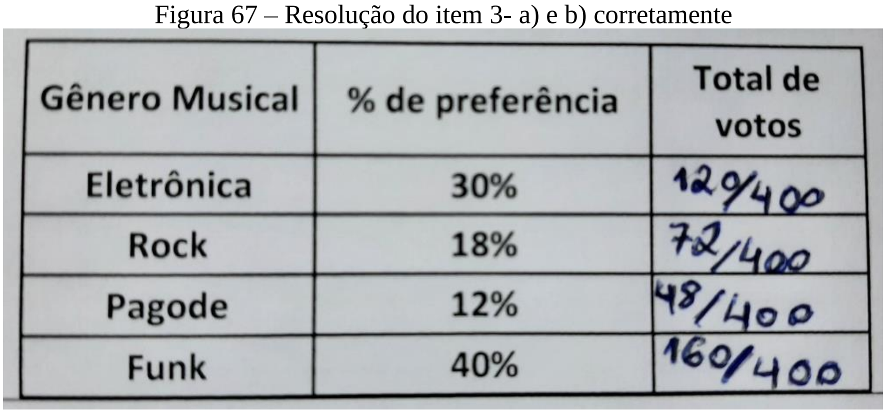
gênero musical	% de preferência	total de votos
elitrônica	30%	0,3
Rock	18%	0,18
pagode	12%	0,12
funk	40%	0,4

b) utilizamos o método de divisão pelo número 100, que nos dá o número decimal. É mais vantajoso pelas facilidade de fazer divisões com base 100.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Um grupo apresentou uma resolução interessante na forma de quociente e razão, como mostra a figura 67.

Figura 67 – Resolução do item 3- a) e b) corretamente



Gênero Musical	% de preferência	Total de votos
Eletrônica	30%	120/400
Rock	18%	72/400
Pagode	12%	48/400
Funk	40%	160/400

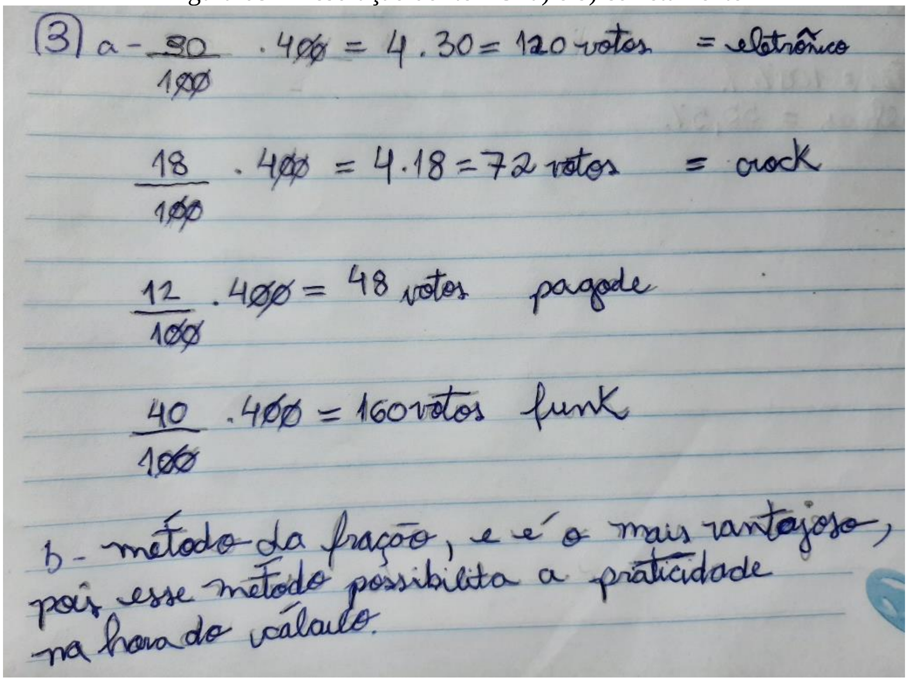
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Outros dois grupos resolveram utilizando a multiplicação de frações conforme seus conhecimentos prévios, como mostra o diálogo abaixo e as figuras 68 e 69.

(P): Como vocês preencheram a tabela?

(E): A gente fez em forma de fração, multiplicou e dividiu.

Figura 68 – Resolução do item 3- a) e b) corretamente



(3) a- $\frac{30}{1\cancel{00}} \cdot 4\cancel{00} = 4 . 30 = 120$ votos = eletrônico

$\frac{18}{1\cancel{00}} \cdot 4\cancel{00} = 4 \cdot 18 = 72$ votos = rock

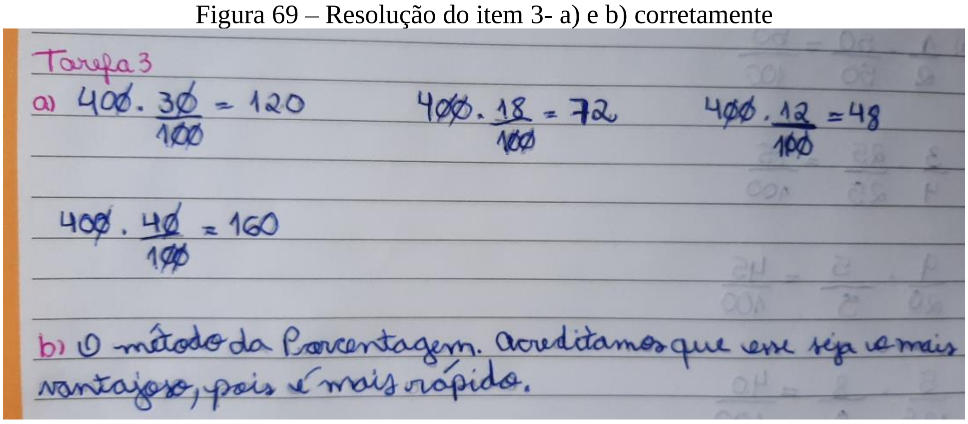
$\frac{12}{1\cancel{00}} \cdot 4\cancel{00} = 48$ votos pagode

$\frac{40}{1\cancel{00}} \cdot 4\cancel{00} = 160$ votos funk

b- método da fração, e é o mais vantajoso, pois esse método possibilita a praticidade na hora do cálculo.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 69 – Resolução do item 3- a) e b) corretamente



Tarefa 3

a) $40\cancel{0} . \frac{3\cancel{0}}{1\cancel{00}} = 120$ $4\cancel{00} . \frac{18}{1\cancel{00}} = 72$ $4\cancel{00} . \frac{12}{1\cancel{00}} = 48$

$40\cancel{0} . \frac{4\cancel{0}}{1\cancel{00}} = 160$

b) O método da Porcentagem. acreditamos que esse seja o mais vantajoso, pois é mais rápido.

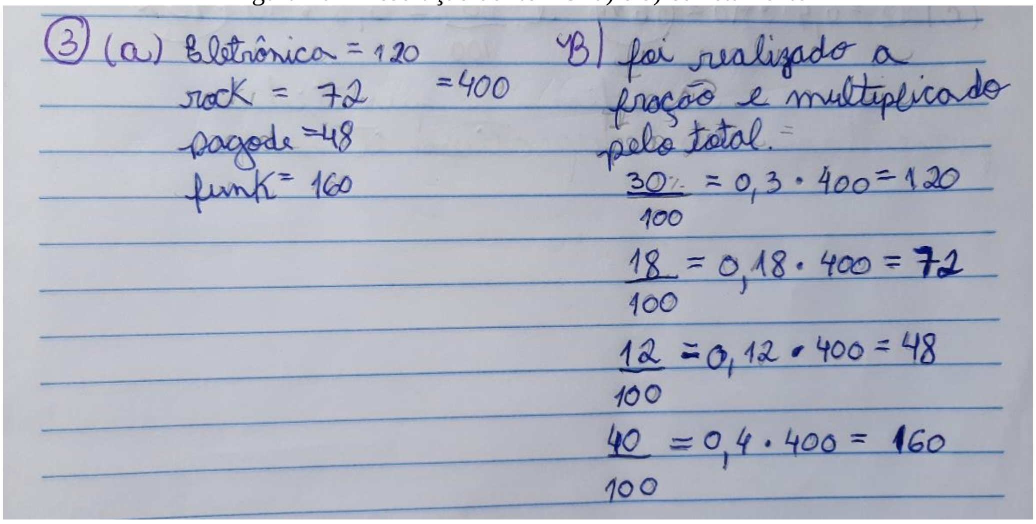
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Um grupo apresentou a resolução a partir do item anterior onde utilizou a calculadora para resolver a tarefa, como mostra o diálogo abaixo e as figuras 70 e 71.

(P): Qual método vocês utilizaram para preencher a tabela?

(E): 30% de 400, dividindo e multiplicando com a calculadora.

Figura 70 – Resolução do item 3- a) e b) corretamente



3 (a) Eletrônica = 120
rock = 72 =400
pagode =48
funk= 160

B) foi realizado a fração e multiplicado pelo total.

$\frac{30\%}{100} = 0,3 \cdot 400 = 120$

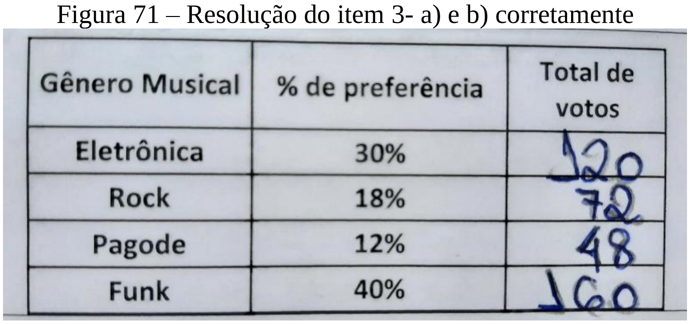
$\frac{18}{100} = 0,18 \cdot 400 = 72$

$\frac{12}{100} = 0,12 \cdot 400 = 48$

$\frac{40}{100} = 0,4 \cdot 400 = 160$

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 71 – Resolução do item 3- a) e b) corretamente



Gênero Musical	% de preferência	Total de votos
Eletrônica	30%	120
Rock	18%	72
Pagode	12%	48
Funk	40%	160

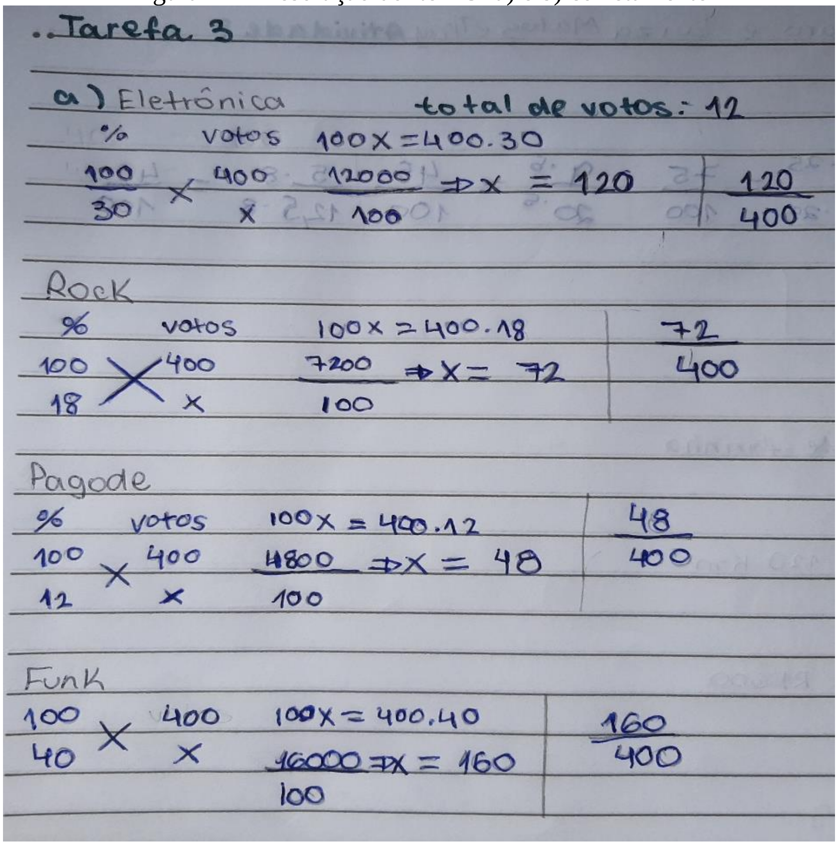
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

E dois grupos resolveram pela regra de três, como mostra o diálogo abaixo e as figuras 72 e 73.

(P): Na 3), como vocês preencheram a tabela?

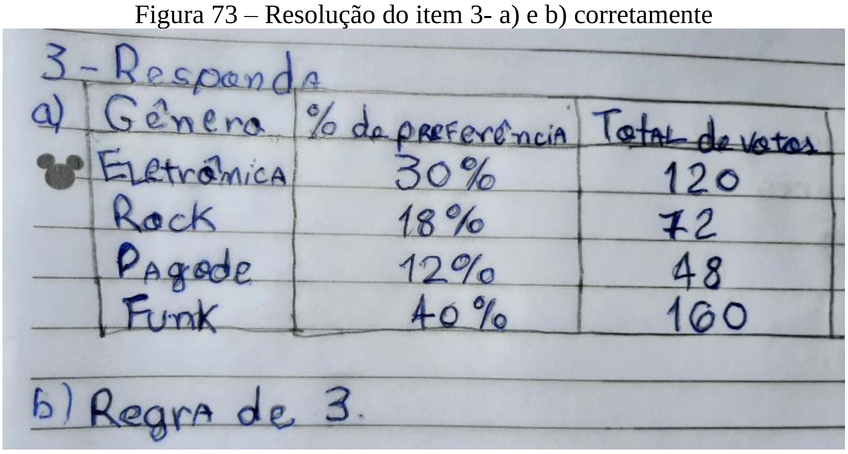
(E): A gente foi fazendo 30% de 400, com a regra de três.

Figura 72 – Resolução do item 3- a) e b) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 73 – Resolução do item 3- a) e b) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Analisando os itens 2) e 3) segundo as ideias de Dubinsky (1991), os estudantes usaram ações coordenando processos para resolver corretamente ambos os itens. Eles generalizaram os processos que resultaram em novos objetos matemáticos, por isso foi possível identificar que eles compreenderam o significado de quociente e razão e o conceito de porcentagem, além de resolverem a tarefa de diferentes maneiras conforme suas preferências.

Ao resolverem o item 4), alguns estudantes apresentaram algumas dúvidas sobre operações de multiplicação e divisão com frações. O professor interveio e com seus conhecimentos prévios, os estudantes conseguiram resolver o item corretamente, como mostra o diálogo abaixo e a figura 74.

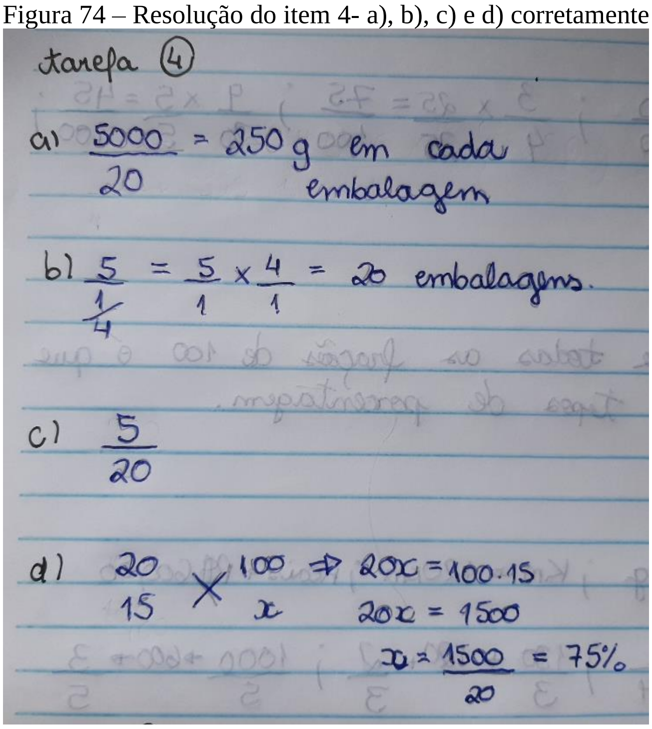
(P): Como vocês fizeram?

(E): No início a gente ficou confuso, mas aí a gente só dividiu o 5.000 g por um valor que ia dar 250, e aí a gente foi dividindo com base feito na primeira tarefa.

(P): Conseguiram entender o que é a razão?

(E): Comparação dos dois grupos.

Figura 74 – Resolução do item 4- a), b), c) e d) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Alguns estudantes de outros grupos resolveram a tarefa por lógica ou seguindo suas preferências em dividir, ou multiplicar usando a regra de três, como mostra o diálogo abaixo e as figuras 75, 76 e 77.

(P): Vocês conseguiram entender o significado? Como que vocês fizeram?

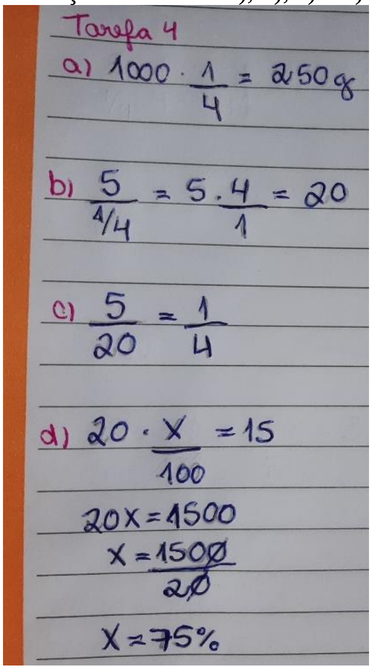
(E): A gente passou todos os quilogramas de $\frac{1}{4}$ para gramas e depois a gente fez 5.000 gramas dividido por 250 gramas que deu o total de embalagens.

(P): O significado da razão, o que significa esse 5/20?

(E): São 5 embalagens de 20 ou $\frac{1}{4}$.

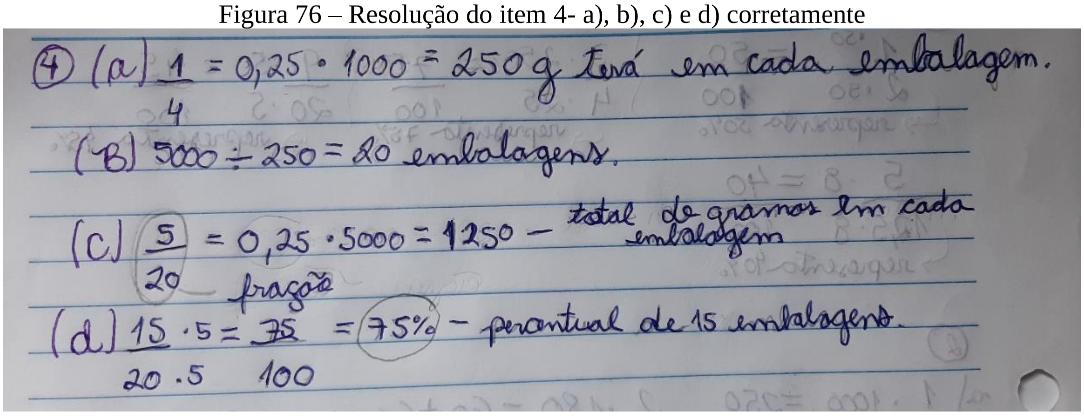
(P): Muito bem.

Figura 75 – Resolução do item 4- a), b), c) e d) corretamente



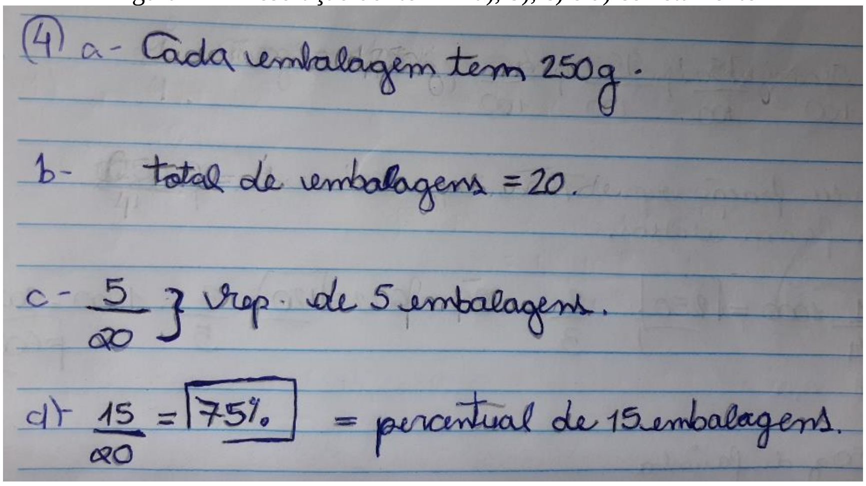
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 76 – Resolução do item 4- a), b), c) e d) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 77 – Resolução do item 4- a), b), c) e d) corretamente



(4) a- Cada embalagem tem 250g.

b- total de embalagens = 20.

c- $\frac{5}{20}$ } rep. de 5 embalagens.

d) $\frac{15}{20} = \boxed{75\%}$ = percentual de 15 embalagens.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

O item 5) não gerou muitos desafios para os estudantes, apenas o item b) teve que ser ajustado, pois a conversão de fração em porcentagem não dava 100% no denominador. Os estudantes conseguiram associar o significado de razão aos itens da tarefa realizados anteriormente e resolveram corretamente a tarefa, como mostram os diálogos abaixo e as figuras 78, 79, 80 e 81.

(P): Como vocês fizeram?

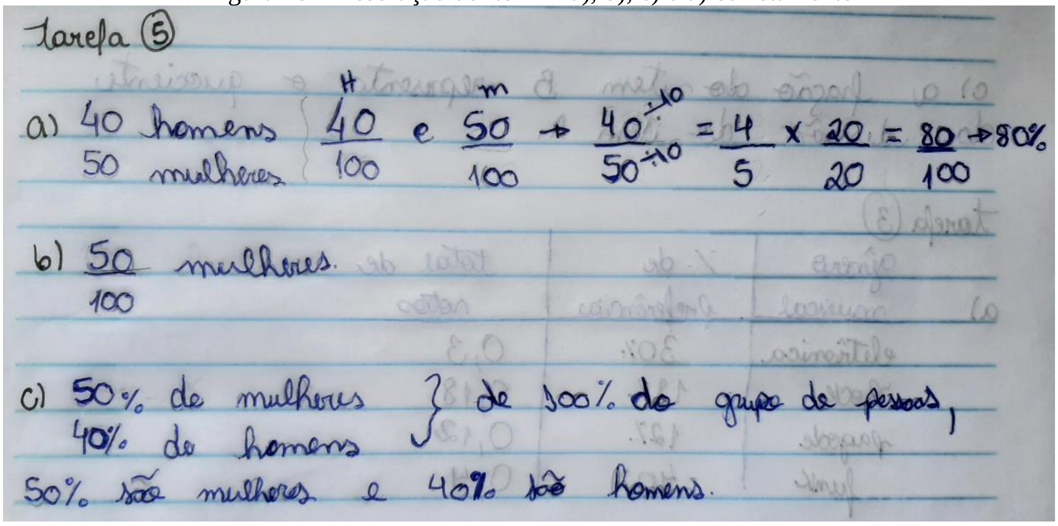
(E): A gente separou o grupo dos homens e das mulheres, colocou 100 que é o total de pessoas, que ficou $\frac{40}{50}$ que é a razão, dividiu por 10, ficou $\frac{4}{5}$, fez vezes 20 no numerador e denominador para dar 100, aí chegamos a 80%.

(P): Vocês tiveram algum desafio na resolução das tarefas?

(E): Acho que a maior dificuldade foi relembrar os conceitos e como fazia as coisas certinho, porque fazia um pouco de tempo que a gente não treinava.

(E): E foi muito legal entender o conceito e aplicar, porque as vezes a gente só aprende o conceito e não aplica, ou só aplica o conceito e não aprende, tipo a razão eu não lembrava, mas fez sentido e a gente usa muito a razão.

Figura 78 – Resolução do item 4- a), b), c) e d) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

(P): Vocês conseguiram usar a razão e associar a porcentagem ao processo?

(E): A gente usou mais a lógica, porque aqui foi a razão de 40 homens e 60 mulheres. Nessa daqui a gente transformou o 60 em porcentagem, e aqui a gente fez a mesma coisa, só que em vez de colocar sobre 100 a gente colocou 99.

(P): E os conceitos sobre fração estudados fez mais sentido agora para vocês?

(E): Sim.

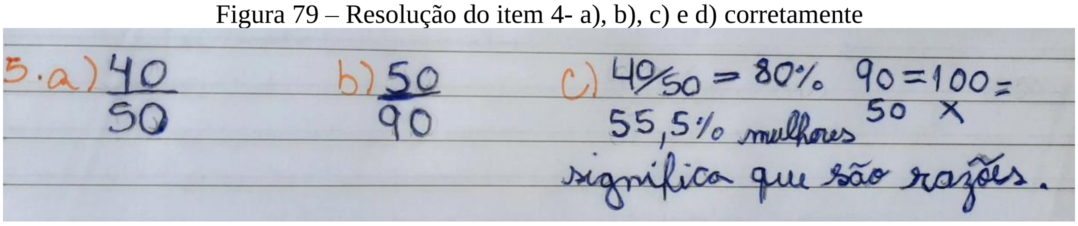
(P): E deu para vocês compreenderem o conceito de razão, o que significa esse $\frac{40}{50}$***?***

(E): É uma razão entre o número de pessoas. Tipo assim, pra mim foi o mais complicado que é onde eu tenho mais dificuldade na razão, mas depois que você explicou pra gente, a gente conseguiu entender.

(P): E quais os desafios que vocês tiveram?

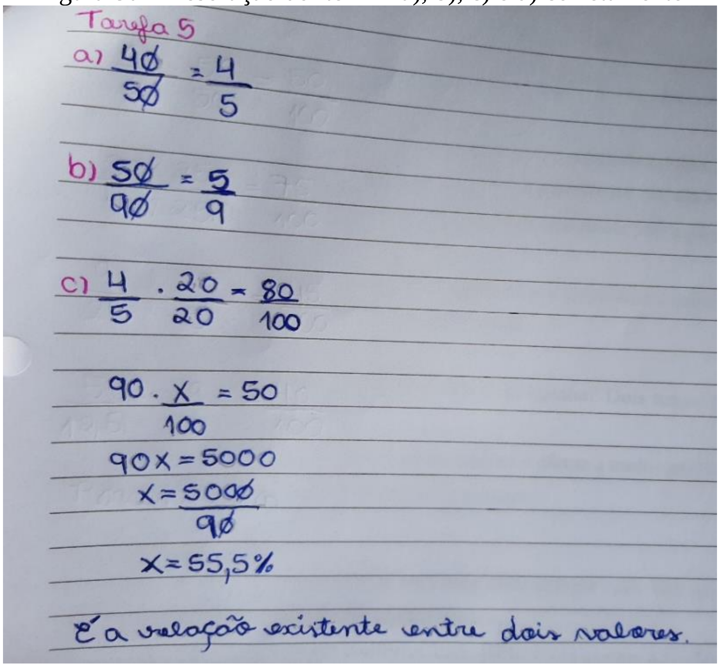
(E): Foi só a razão mesmo que achei mais complicado de fazer e entender, mas depois da explicação foi tranquilo.

Figura 79 – Resolução do item 4- a), b), c) e d) corretamente



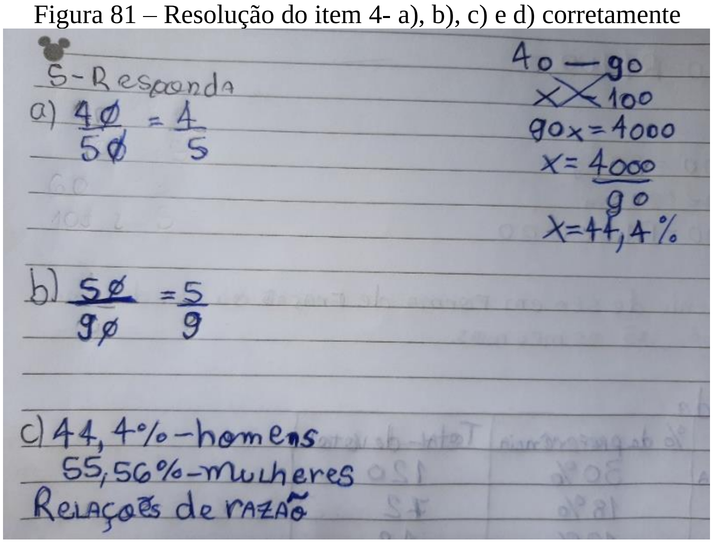
Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 80 – Resolução do item 4- a), b), c) e d) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 81 – Resolução do item 4- a), b), c) e d) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Analisando os itens 4) e 5) de acordo com ideias de Dubinsky (1991), os estudantes realizaram ações coordenando processos e capsularam as frações em novos objetos matemáticos. Assim, aplicaram corretamente os significados de razão e operador com multiplicação e divisão de números racionais a partir de um esquema.

Os estudantes conseguiram resolver corretamente a tarefa III cumprindo os objetivos propostos na THA e os resultados esperados foram ao encontro das hipóteses. Em alguns momentos houve a necessidade da intervenção do professor para os estudantes esclarecerem suas dúvidas sobre alguns conceitos, representações e significados dos números racionais nos processos da resolução da tarefa. Por exemplos, diferenciar a operação de multiplicação para a divisão de frações.

A seguir, destacam-se as respostas interessantes de estudantes de grupos diferentes sobre os significados estudados e os desafios encontrados.

Grupo 1

(P): Conseguiram identificar os significados e conceitos?

(E): A divisão e a multiplicação é muito usado com frações.

(E): Além de ter aprendido a fração equivalente e relembrado muitas coisas que nós já não lembrávamos mais.

(E): A gente associou os conceitos as outras atividades realizadas nos outros dias.

Grupos 2

(P): Vocês tiveram algum desafio na resolução das tarefas?

(E): Acho que a maior dificuldade foi relembrar os conceitos e como fazia as coisas certinho, porque fazia um pouco de tempo que a gente não treinava.

(E): E foi muito legal entender o conceito e aplicar, porque as vezes a gente só aprende o conceito e não aplica, ou só aplica o conceito e não aprende, tipo a razão eu não lembrava, mas fez sentido e a gente usa muito a razão.

Grupo 3

(P): Como vocês fizeram? Quais os desafios que vocês tiveram ao resolver essas tarefas?

(E): A gente conseguiu resolver e associar as outras tarefas, só demoramos um pouco para fazer essa associação.

A tarefa III também foi desenvolvida pelos estudantes a partir de seus conhecimentos prévios, com ações que transformaram o conceito de porcentagem e os significados de medida, razão e operador (multiplicação e divisão de frações) em uma experiência real dos números racionais no cotidiano do estudante. A resolução da tarefa envolveu ações que coordenaram processos em que esses foram capsulados e generalizados em um esquema, assim a partir da abstração reflexiva, os estudantes interiorizaram o conceito, as representações e significados estudados dos números racionais.

3.4 SÍNTESE DA ANÁLISE

As tarefas I, II e III que compõe a THA foram elaboradas a partir do conhecimento prévio dos estudantes; das tarefas apresentadas nas pesquisas de Severo (2009), Krug (2015), Matos (2017) e Oliveira (2017); dos tipos de tarefas apresentadas por Simon (2004) e Ponte (2014); das representações e significados dos números racionais apresentados por Kieren (1976); e por fim, analisadas após o desenvolvimento pelos estudantes a partir da teoria APOS de Dubinsky (1991).

O professor-pesquisador constatou ao longo dos anos que seus estudantes possuíam bons conhecimentos sobre operações básicas, por isso conseguiu elaborar as tarefas de modo que os estudantes utilizassem seu próprio conhecimento atual para construírem novos conhecimentos matemáticos. Essas tarefas foram elaboradas de modo que cada ação realizada fosse atrelada a tarefa anterior, de maneira que os estudantes refletissem e construíssem conhecimentos matemáticos em grupo e com mediação do professor.

Nesse sentido, as tarefas apresentadas nas pesquisas de Severo (2009), Krug (2015), Matos (2017) e Oliveira (2017) contribuíram para que o professor-pesquisador elaborasse tarefas que: mostram a importância das representações dos números racionais no cotidiano, esclarecem as representações e os significados dos números racionais, contribuem para que o professor-pesquisador consulte trabalhos acadêmicos, documentos curriculares e livros didáticos, e também, apresentam a melhor estratégia de abordar significados que são desafios para o estudante como o operador de frações dando sentido para ele.

Os tipos de tarefas apresentadas por Simon e Ponte também foram muito importantes para a elaboração das tarefas. A partir das ideias de Simon (2004) o professor-pesquisador utilizou o mecanismo de relação atividade-efeito que compõe a THA para compreender o desenvolvimento das estruturas cognitivas dos estudantes ao resolverem as tarefas do tipo: iniciais (mais acessíveis), reflexivas (desafiante) e de antecipação (abstrações e análise de regularidades). E das ideias de Ponte (2014) o professor-pesquisador utilizou as tarefas como sendo: de natureza acessível, de cunho aberto e desafiante que contribuíram para os estudantes terem um grau elevado de sucesso e confiança na resolução das tarefas; também, além de serem essenciais para desenvolverem competências e habilidades ao lidar com situações complexas.

Ainda, para elaborar as tarefas de maneira significativa para os estudantes foi imprescindível que o professor-pesquisador conhecesse mais afundo as representações e os significados dos números racionais abordados por Kieren (1976): representações numérica e geométrica, parte-todo, quociente, medida, razão e operadores (adição, subtração, multiplicação e divisão de frações).

Por último, a teoria APOS de Dubinsky (1991) contribuiu para que professor-pesquisador analisasse as tarefas conforme os processos apresentados pelos estudantes e possibilitou destacar situações relevantes para eles sobre a aprendizagem de matemática, que foi possível observar como as ações, processos, objetos e esquemas são utilizados nas tarefas de números racionais.

Diante disso, com base nas análises realizadas foi possível destacar que, durante a resolução das tarefas os estudantes apresentaram dúvidas sobre termos matemáticos que não se lembravam por não os usarem há muito tempo e em alguns casos houve desafios na escrita e nas representações dos símbolos matemáticos.

O fato de as tarefas serem mais abertas proporcionaram aos estudantes que representassem os números racionais de diferentes maneiras, como mostra a figura 11. Ainda, pelo fato de algumas questões serem “simples” ou óbvias, os estudantes ficaram com medo de errar por conseguirem resolver facilmente, o que é mais uma consequência da tarefa aberta e diferente do que é comum aos livros didáticos.

A partir dos dados foi possível observar que, em algumas tarefas os estudantes compreenderam os significados dos números racionais, porém apresentaram confusão na forma escrita de se expressar, como mostram as figuras 13, 14, 15 e 16. Também, apresentaram desafios na leitura, compreensão e resolução de algumas questões, pois não se lembravam dos conhecimentos matemáticos e dos processos solicitados no desenvolvimento da tarefa, como mostram as figuras 20 e 21. As questões envolvendo a relações entre mais significados e tarefas geraram desafios em sua compreensão; e também, embora não sejam perguntas necessárias para o entendimento do estudante, essas perguntas incentivaram os estudantes a refletirem e discutirem entre si sobre seus conhecimentos matemáticos, como mostra a figura 25.

Com base nos dados foi possível observar que algumas questões das tarefas não foram respondidas, como mostram as figuras 55 e 56. Isso demonstra que o significado pode não ter ficado claro para os estudantes sendo aconselhado que o professor revise ou esclareça possíveis dúvidas posteriormente.

Essas considerações só foram possíveis de se observar devido aos tipos de questões reflexivas elaboradas de maneiras diferentes dos exercícios dos livros didáticos. Também devido à teoria APOS que possibilitou identificar as ações físicas ou mentais, a coordenação de processos capsulados e generalizados, com ou sem a reversibilidade, criando um esquema. Assim, a THA e a teoria APOS foram ferramentas essenciais no desenvolvimento e na análise da aprendizagem de matemática dos estudantes sobre as tarefas de números racionais. Também, a mediação do professor foi imprescindível para os estudantes alcançarem os objetivos propostos na THA e nas tarefas.

Outra vantagem da THA foi a possibilidade de observar como os estudantes utilizaram seus conhecimentos matemáticos de maneira individual e como interagiram em grupo realizando a troca desses conhecimentos. Uma das tarefas solicitava que os estudantes criassem um problema ao refletir e praticar um conhecimento matemático adquirido, o que mostrou resultados relevantes para a fixação de sua aprendizagem.

Em síntese, a THA deu mais liberdade para os estudantes refletirem e se expressarem sobre seus conhecimentos matemáticos, o que foi possível identificar acertos e erros no processo de desenvolvimento das tarefas. As diferentes tarefas possibilitaram identificar como os estudantes utilizaram a simbologia matemática no processo de resolução das tarefas, a escrita das representações e dos processos desenvolvidos de diferentes maneiras sobre os números racionais, os conhecimentos prévios e a participação ativa dos estudantes na construção de seus conhecimentos matemáticos em grupo.

CONSIDERAÇÕES

A investigação possibilitou entender o desenvolvimento das tarefas de matemática da THA, por isso retornaremos a questão que norteou esta pesquisa a fim de respondê-la: ***quais potencialidades e desafios são revelados no processo de elaboração e desenvolvimento de uma THA sobre números racionais, desenvolvida com um grupo de estudantes do Ensino Médio?*** A partir dessa questão, da descrição e análise do desenvolvimento das tarefas da THA e da teoria APOS, apresentou-se os resultados encontrados e as considerações.

O objetivo desta pesquisa foi compreender e evidenciar as potencialidades e desafios no processo de aprendizagem de um grupo de estudantes do Ensino Médio ao estudarem as representações e diferentes significados dos números racionais por meio de tarefas da THA.

Diante disso, esse objetivo se desdobrou em objetivos como:

➢ Analisar as potencialidades e desafios na elaboração e no desenvolvimento de uma THA de números racionais, com um grupo de estudantes do Ensino Médio.

Como professor-pesquisador, meus desafios ao elaborar a THA foram em pensar sobre os tipos de tarefas matemáticas, que sejam contextualizadas e façam sentido para o estudante, que mostrassem a importância em compreender e operar com números racionais no cotidiano. Também, em pensar na criação de tarefas que possam ser interligadas em ações, processos, objetos e esquemas possibilitando a análise de suas resoluções com a teoria APOS. (DUBINSKY, 1991).

E as potencialidades foram que a THA possibilitou ao professor planejar aulas de matemática com tarefas que sejam mais atrativas e engajadoras para o estudante, que o tornassem ativo no processo de aprendizagem. Ainda, possibilitou que o professor pesquisasse sobre os tipos de tarefas relevantes para a construção do conhecimento matemático do estudante.

➢ Verificar resultados de pesquisas na área da Educação Matemática a respeito do ensino dos diferentes significados dos números racionais, e incorporar os resultados nas tarefas elaboradas nesta pesquisa.

Os desafios foram identificar os aspectos dos tipos de tarefas no Ensino Médio em pesquisas acadêmicas e se basear nesses aspectos para elaborar as tarefas da THA, que foram adaptadas a partir de contextos e articuladas com a teoria proposta sobre números racionais.

E uma potencialidade muito importante foi ter uma área organizada de pesquisas acadêmicas de fácil acesso para o professor pesquisar sobre sua própria prática como o portal de teses e dissertações da CAPES.

➢ Compreender os diferentes significados das tarefas matemáticas sobre números racionais.

O desafio como professor-pesquisador foi superar meus limites de conhecimentos sobre os tipos de tarefas, as representações e os significados dos números racionais.

E a potencialidade é que com a pesquisa e a leitura de autores sobre esses temas possibilitou-me ampliar meus conhecimentos matemáticos, que beneficiaram professor e estudantes na forma de refletirem e estudarem um conhecimento matemático.

➢ Investigar a compreensão de um grupo de estudantes sobre as representações e os significados dos números racionais

O desafio está relacionado sobre como o professor-pesquisador descobre o nível de compreensão dos estudantes sobre os números racionais. Por se tratar de uma pesquisa-ação e o professor-pesquisador conhecer os estudantes há muitos anos, não houve problemas para descobri-los. É recomendado que o professor aplique uma tarefa diagnóstica caso queira saber por onde começar.

A potencialidade está na reflexão do professor sobre processo hipotético de aprendizagem – conhecimentos matemáticos de seus estudantes – em relação aos tipos de tarefas. Assim, o professor poderá planejar e elaborar tarefas que sejam alinhadas aos seus objetivos e ao conhecimento prévio dos estudantes.

➢ Avaliar o processo de desenvolvimento da compreensão de um grupo de estudantes sobre as representações e os significados dos números racionais.

Como desafio teve o acompanhamento dos grupos durante o desenvolvimento das tarefas. As tarefas não podem ser muito longas ou o professor não dará conta de acompanhar todos os estudantes.

E a potencialidade é que com as tarefas da THA construídas em formato espiral possibilitam interligar as questões. Assim, os estudantes relacionaram conhecimentos matemáticos atuais e aprendidos anteriormente ao resolverem novas tarefas.

➢ Propor um produto educacional que aborde as representações e os significados dos números racionais.

O desafio esteve em criar um produto educacional que seja atrativo e eficaz no objetivo de aprendizagem, além de mostrar resultados significativos no processo de ensino-aprendizagem.

E a potencialidade como produto educacional foi criar e desenvolver um material didático inovador, que seja de fácil acesso ao professor, que possibilite implementar novas teorias e metodologias de ensino em sua prática profissional.

Considerando que a THA é um instrumento de ensino rico em possibilidades e desafios, é possível pesquisar sobre ela a partir da perspectiva do professor, das tarefas e de como estudantes reagem às tarefas.

Diante disso, como possibilidade do ponto de vista do professor, ele pode pesquisar sobre sua própria prática e aprender a buscar conhecimentos sobre teorias de ensino que estão além de sua formação inicial, e que combinadas com a THA podem mostrar resultados significativos na aprendizagem de seus estudantes em sala de aula. Como desafio, ele pode encontrar obstáculos se não tiver preparo e conhecimento adequado sobre as teorias para extrair o melhor delas em prol dos estudantes.

Do ponto de vista das tarefas, o professor pode ampliar seus conhecimentos a respeito dos tipos de tarefas e combiná-las com as teorias de ensino e a THA para obter resultados que não são possíveis com lista de exercícios comuns em livros didáticos. Como desafio, muitas vezes ele terá que adaptar ou criar tarefas de matemática conforme seus objetivos e a necessidade de seus estudantes.

E do ponto de vista dos estudantes, o professor pode se aproximar de seus estudantes para compreender melhor como eles discutem e se expressam sobre um conhecimento matemático; e também, como eles reagem às situações e desafios propostos em tarefas de matemática em sala de aula. Como desafio, ele terá que saber lidar com os estudantes que possuem desafios na aprendizagem de um conhecimento matemático.

Assim como a THA é relevante para a área de ensino da Matemática, a teoria APOS alinhada a outras teorias de ensino pode possibilitar ao professor avaliar e compreender como estudantes constroem conhecimentos matemáticos em diversas situações de aprendizagem por meio de ações, processos, objetos e esquemas.

Nesse sentido, é interessante incentivar que professores e pesquisadores se aprofundem em algum tema da área da Educação Matemática a partir da THA e da teoria APOS, que podem trazer resultados relevantes para a área de ensino.

REFERÊNCIAS

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação.** Porto: Porto editora, 1994.

BOYER, C., B. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgarg Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

______. Matriz de referência ENEM 2022. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf>. Acesso em: 30 ago. 2022.

DUBINSKY, E. **Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.** In D. O. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking, Dorfrecht: Kluwer, p. 95-123, 1991. Disponível em: < https://people.math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/ReflectiveAbstraction.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2021.

GARCIA, V. C. G. **Fundamentação teórica para as perguntas primárias:** O que é Matemática? Por que ensinar? Como se ensina e como se aprende? In: Revista Educação, Porto Alegre, Vol. 32, nº 2, 2009. Disponível em: <https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/download/5516/4014/>. Acesso em: 20 jun. 2021.

GUIDORIZZI, H. **Um curso de cálculo.** 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

KIEREN, T. **Number adn Measurement:** Papers from a Research Workshop. On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. Lesh (ed.) ERIC/SMEARC: Columbus, Ohio, p. 101-144, 1976. Disponível em: <https://eric.ed.gov/?id=ED120027>. Acesso em: 20 abr. 2022.

KRUG, C. **Ensino dos números racionais comparando medidas de unidade.** 2015. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2015.

MATOS, R. **Uma contribuição para o ensino aprendizagem dos números racionais:** a relação entre dízimas periódicas e progressões geométricas. 2017. 76 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni, 2017.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATEMATICS. **Normas profissionais para o ensino da Matemática.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional. 1994.

OLIVEIRA, L. **Análise de erros cometidos pelos discentes do sétimo ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio no estudo dos números racionais na sua forma fracionaria.** 2017. 97 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, 2017.

PIRES, C. **Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon.** Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145 – 166, 2009. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2136>. Acesso em: 15 mar. 2020.

PONTE, J.P. **Práticas profissionais dos professores de matemática.** In: PONTE, J.P. (ed.). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p.343-360, 2014.

PRADO, E. **Alunos que completaram um curso de extensão em álgebra linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial.** 2010. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

ROGRIGUES, W. **Números Racionais:** um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. 2005. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Matrizes de referência para a avaliação documento básico Saresp:** Ensino Fundamental e Médio. Coordenação geral, Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2009. Disponível em: <https://saresp.fde.sp.gov.br/Arquivos/MatrizReferencia_2019.pdf>. Acesso em: 05 jun. 2021.

SEVERO, D. **Números racionais e ensino médio:** uma busca de significados. 2009. 67 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

SIMON, M. **Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective.** Journal for Reaserch in Mathematics Education, vol. 26, n. 2, pp 114-145, 1995. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/749205>. Acesso em: 15 mar. 2020.

_____. **What is a Mathematical Concept?** New York University, p. 1-11, janeiro, 2020. Disponível em: < https://www.researchgate.net/publication/338490514_What_is_a_Mathematical_Concept#:~:text=A%20mathematical%20concept%20is%20knowledge,a%20particular%20relationship%20must%20exist.> Acesso em: 22 jun. 2020.

_____; TZUR, R. **Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning:** an elaboration of the hypothetical learning trajectory. Mathematical Thinking and Learning, Abingdon, v. 6, n. 2, p. 91-104, 2004. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2>. Acesso em: 6 jun. 2020.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação.** São Paulo: Cortez, 1986 2ª edição.

APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL:

Tarefas de Números Racionais para o Ensino Médio

LUCAS ROSA SÁ OLIVEIRA
ARMANDO TRALDI JR

São Paulo (SP)
2023

Produto Educacional apresentado como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituo Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus São Paulo. Aprovado em banca de defesa de mestrado no dia 29/05/2023.

AUTORES

Lucas Rosa Sá Oliveira: Licenciado em Matemática pelo UNASP (2014). Especialista em Educação Matemática pela FMU (2020) e Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo IFSP (2023).

Armando Traldi Jr: Licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2002). Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2002) e Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2006). Atualmente é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP). Tem experiência na área de Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Currículo e a Formação de Professores de Matemática, Matemática a ser Ensinada em Curso de Licenciatura em Matemática e Educação Inclusiva: formação de conceitos de Matemática por estudantes surdos.

SUMÁRIO

Apresentação

Caro (a) Professor (a),

Este material, apresentado como Produto Educacional, é parte integrante de nossa pesquisa intitulada “TAREFAS DE APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA: THA de números racionais”, desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), sob orientação do Professor Doutor Armando Traldi Jr.

Nosso Produto Educacional consiste em apresentar quatro tarefas de matemática sobre as representações e os significados dos números racionais para serem desenvolvidas com estudantes do Ensino Médio.

Este produto foi elaborado a partir do estudo da Trajetória Hipotética de Aprendizagem e dos Diferentes Significados dos Números Racionais, com o intuito de dar suporte ao professor de maneira que os estudantes construam novos conhecimentos a partir de seu conhecimento prévio e da prática de tarefas matemáticas sobre esse conjunto no Ensino Médio.

Que todos tenham uma ótima leitura e que esse produto possa contribuir para suas futuras práticas pedagógicas.

Lucas Rosa Sá Oliveira

Armando Traldi Jr

1. TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM (THA)

O pesquisador Martin Simon desenvolveu um modelo de ensino em 1995, que possibilita identificar os principais aspectos importantes para o planejamento e desenvolvimento de aulas de matemática. Esse modelo tem como base a perspectiva construtivista de Jean Piaget (1896 - 1980), que apresenta o estudante como sujeito ativo no papel de sua aprendizagem, e o professor como mediador na construção do conhecimento.

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) “é composta por três componentes: o objetivo de aprendizagem que define a direção, as tarefas de aprendizagem, e o processo hipotético de aprendizagem – uma previsão de como o pensamento e a compreensão do aluno evoluirão no contexto das tarefas de aprendizagem”. (SIMON, 1995, p. 136, tradução nossa). Por isso, a THA proporciona ao professor um modelo de ensino, que pode contribuir para o planejamento e desenvolvimento de tarefas matemáticas relevantes para o estudante, além de possibilitar inovadoramente a investigação do processo de ensino-aprendizagem de matemática.

Diante disso, o autor descreve que para elaborar a THA deve-se considerar alguns aspectos importantes: (a) a identificação clara do objetivo de aprendizagem do professor; (b) o levantamento do conhecimento matemático atual dos estudantes; (c) o planejamento de tarefas matemáticas para alcançar o objetivo; e (d) as tarefas matemáticas como ferramentas para aprendizagem de conceitos matemáticos. Após definir o objetivo de aprendizagem, é necessário pensar sobre o processo hipotético de aprendizagem – considerando o conhecimento matemático atual dos estudantes e os desafios que surgirão no percurso do desenvolvimento da THA – que contemplem um conjunto de tarefas matemáticas adequadas ao objetivo. Desse modo, essas etapas podem viabilizar a elaboração de tarefas matemáticas com tarefas eficazes para o ensino-aprendizagem de matemática.

Pires ao utilizar a THA em seus estudos, afirmou que outros conhecimentos do professor de Matemática devem ser considerados na elaboração da THA, destacando:

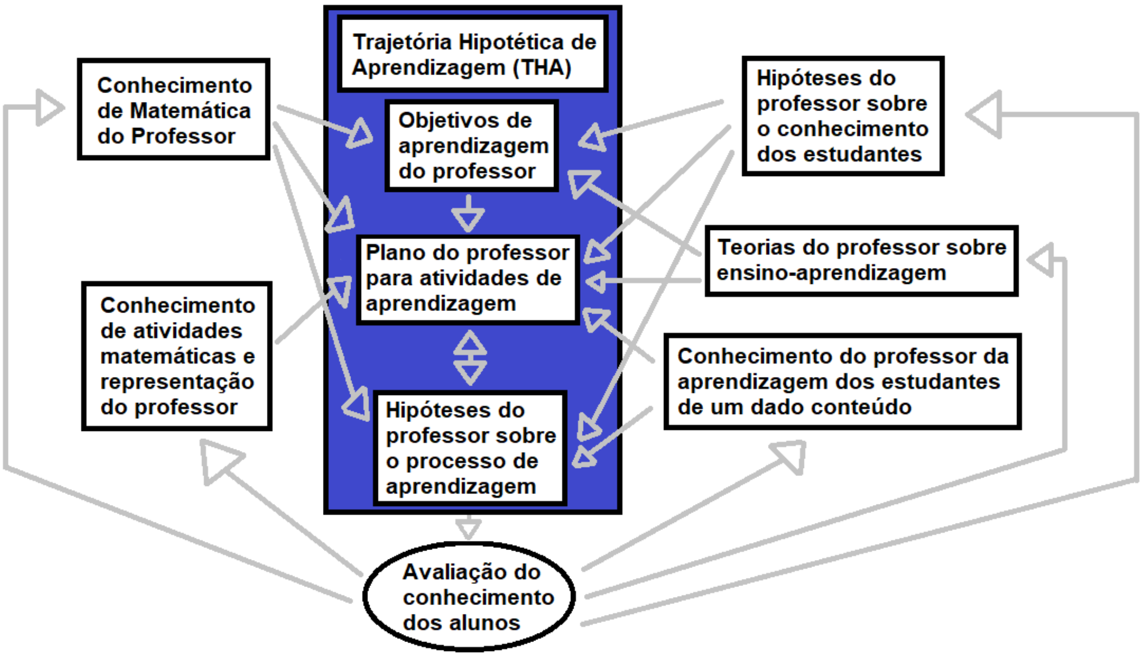
> Teorias de ensino sobre Matemática; representações matemáticas; materiais didáticos e atividades; e teorias sobre como alunos constroem conhecimentos sobre um dado assunto – saberes estes derivados da pesquisa em literatura e/ou da própria experiência docente. (PIRES, 2009, p. 154).

Simon (2004) também discute um conhecimento importante para compreender o desenvolvimento das estruturas mentais dos estudantes, ao realizar as tarefas matemáticas que compõe a THA, denominado mecanismo de relação "atividade-efeito". Esse mecanismo é uma criação da abstração reflexiva de Piaget, e permite descrever como uma tarefa com objetivos traçados pelos estudantes pode criar novas concepções sofisticadas. O estudante realiza uma tarefa (conjunto de ações) que possibilita ao professor observar os efeitos da tarefa realizada, assim o estudante cria registros mentais (relação da atividade-efeitos), que podem ser analisados e avaliados pelo professor na busca da compreensão do pensamento matemático do estudante.

Nesse sentido, as tarefas possuem potencial para auxiliar estudantes na construção de novos conceitos a partir da perspectiva de relação atividade-efeito. Destacam-se três tipos de tarefas: tarefas iniciais, realizadas com os conhecimentos prévios dos estudantes; tarefas reflexivas, levam os estudantes a refletirem e geram abstração de regularidades na relação atividade-efeito; e tarefas de antecipação, que exigem abstração e análise de regularidades nessa relação. (SIMON; TZUR, 2004).

De acordo com Simon (1995), os elementos de construção da THA denominado *"Ciclo de Ensino de Matemática"*, representam as inter-relações cíclicas que ocorrem entre o conhecimento do professor, a avaliação do conhecimento dos estudantes, a realização das tarefas e a THA, como mostra a figura 1.

Figura 1 – Domínios do conhecimento do professor, THA e interações com os alunos



Fonte: Simon (1995, p. 137, tradução nossa).

As tarefas matemáticas elaboradas são baseadas: (i) nos objetivos de aprendizagem do professor; (ii) nas hipóteses do professor sobre o conhecimento dos estudantes; (iii) nas hipóteses do professor sobre o processo de aprendizagem; (iv) no conhecimento de Matemática do professor; (v) no conhecimento de tarefas matemáticas do professor; (vi) nas Teorias de Ensino-Aprendizagem do professor; (vii) no conhecimento do professor sobre a aprendizagem dos estudantes sobre um conteúdo; e (viii) na avaliação do conhecimento dos estudantes.

Essas hipóteses são baseadas nas tarefas envolvidas e são interdependentes. Também, o conhecimento do professor sobre os estudantes possibilita a criação do objetivo de ensino e das hipóteses, que contribuem para o desenvolvimento dos processos hipotéticos de aprendizagem e das tarefas matemáticas.

Por ser construída nesse processo, a THA está sujeita a modificações do início ao fim de seu desenvolvimento. Dessa maneira, a palavra "*trajetória*" apresentada por Simon (1995) representa, por exemplo, uma viagem planejada que no caminho há pequenos ajustes devido às condições e situações encontradas sem alterar a condição de adquirir novos conhecimentos, o caminho é a trajetória e o caminho antecipado é a trajetória hipotética.

Portanto, o professor deve ajustá-la no sentido de refletir sobre o objetivo alcançado, mediando o processo de aprendizagem, e avaliando constantemente os desafios encontrados pelos estudantes nas tarefas a fim de melhorá-las. Os estudantes podem reagir de diferentes maneiras diante do desenvolvimento das tarefas por dependerem de suas experiências matemáticas, então é necessário reformular as tarefas se algum conceito não for alcançado.

Dessa forma, a THA pode possibilitar caminhos para a reflexão sobre a construção de conhecimentos matemáticos e afins; e também, pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, sob uma perspectiva inovadora, na implementação dessa teoria no currículo da Matemática nas escolas da Educação Básica.

O estudante ao resolver uma tarefa por meio de uma sequência de ações já conhecida por ele, pode chegar num momento em que não precise mais realizar essas ações, ao poder antecipar o resultado dessas ações. Diante disso, o conceito matemático pode ser promovido a partir de uma tarefa já conhecida pelo estudante, antecipando o resultado das ações sem ter que realizá-las. (SIMON, 2020).

Ainda, para Simon (2020, p. 10, nossa tradução) “[...] A articulação de um conceito matemático envolve a especificação da compreensão da necessidade lógica e inclui a identificação do conhecimento prévio sobre o qual se baseia essa compreensão”. Então os conceitos matemáticos se desenvolvem por meio das ações dos estudantes, seja física ou mental, e que ao utilizarem ações conhecidas são apoiados na construção de novos conhecimentos sobre seus conhecimentos prévios. Ao antecipar o resultado de ações, de maneira que não precise mais realizar essas ações para determinar o resultado, significa que o conceito matemático foi assimilado pelo estudante.

Ponte (2014, p. 21 - 22) apresenta quatro tipos de tarefas que possuem importância no ensino: (i) tarefa de natureza mais fechada (exercícios, problemas) – relacionada ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes baseados na relação entre dados e resultados; (ii) tarefa de natureza mais acessível (explorações, exercícios) – contribui para o estudante ter um elevado grau de sucesso e confiança em sua resolução; (iii) tarefa de natureza mais desafiante (investigações, problemas) – indispensável para a evolução do estudante na experiência matemática; e (iv) tarefa de cunho mais aberto – essenciais para desenvolver no estudante competências e habilidades ao lidar com situações complexas.

Sendo assim, o professor deve organizar uma sequência de tarefas diversificadas de modo que os estudantes atinjam os objetivos de aprendizagem, conforme Ponte (2014, p. 22):

> além da diversificação das tarefas, é importante que estas proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos, a compreensão dos procedimentos, o conhecimento das formas de representação relevantes e das conexões de cada conceito dentro da Matemática e com outros domínios.

2. Números Racionais: representações e significados

Segundo Guidorizzi (2013, p. 19), os números racionais são representados por “$\mathbb{Q} = \left\{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \middle| \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}\right\}$, no qual $\mathbb{Z}$ indica o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -\mathbf{3}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$.” Nesse sentido, o ensino dos números racionais tem se tornado objeto de estudo e pesquisa no campo da Educação Matemática, pelos desafios de compreensão das suas representações e seus significados por parte dos estudantes e pela abordagem metódica dos professores. Assim sendo, as principais ideias desenvolvidas sobre os números racionais no currículo escolar tendem a ser abordadas por uma forma específica de interpretação e mecanizada pelos professores, que deixam de lado outras representações e significados que poderiam ser bem mais explorados, mostrando reflexos na compreensão desse conjunto numérico entre estudantes e professores. (KIEREN, 1976).

Os números racionais podem ser representados nas seguintes formas: *numérica* (fracionária $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$, decimal $\mathbf{0,4}$ e percentual $\mathbf{40}\%$) e *geométrica* (figuras divididas em partes iguais). Na forma fracionária, se dividir o numerador 2 pelo denominador 5, obtém-se a forma decimal *0,4*. Esse tipo de divisão pode resultar em um decimal finito ($\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0,5}$) ou decimal infinito conhecido como dízima periódica ($\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \mathbf{0,333}\dots$). Na forma percentual, a noção de *Porcentagem* está na fração cujo denominador é 100, representada por $\boldsymbol{n}\%$ ou $\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{100}}$, assim $\mathbf{0,4}$ pode ser escrita como $\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}}$ ou $\mathbf{40}\%$.

Ainda, pode-se destacar mais uma propriedade importante na representação fracionária, a *Equivalência*. A fração equivalente é a fração que representa o mesmo número ou quantidade e para encontrá-la basta multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número. Por exemplo, a fração $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$ multiplicada por 20, $\frac{\mathbf{2 \cdot 20}}{\mathbf{5 \cdot 20}}$ resulta na fração equivalente $\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}}$, representando o mesmo valor de 0,4.

O pesquisador Kieren (1976) apresentou quatro significados (subconstrutos) básicos e fundamentais no processo de compreensão e construção de número racional: *quociente, medida, razão e operador*. O autor não considera o significado parte-todo como outros pesquisadores, pois para ele essa ideia já está presente no quociente, medida e operador. Porém, é importante para o estudante conhecer esse significado antes de usar os outros.

A relação *parte-todo* significa a divisão do número fracionário $\frac{a}{b}$, em que o todo foi dividido em "b" partes sendo consideradas "a" partes. Nesse sentido, temos como exemplo a fração $\frac{1}{4}$ que indica que o todo está divido em quatro partes e que uma delas foram tomadas. Pode-se utilizar a representação geométrica para mostrar essa fração de uma forma mais clara, como mostra a figura 2.

Figura 2 – Representação da Parte-todo

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

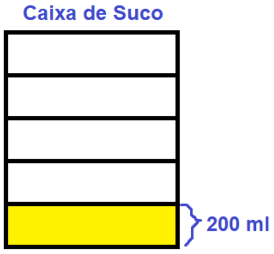
O *quociente* representa o resultado da divisão de dois números inteiros, podendo ser associado a definição formal de números racionais, no qual $\frac{a}{b}$, com a e b sendo inteiros e b diferente de zero. Assim, pode-se afirmar que a fração $\frac{2}{5}$ significa duas unidades de chocolate divididas em cinco parte iguais, por exemplo.

Figura 3 – Representação do Quociente

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A *medida* significa o próprio quociente da ideia de "quanto cabe" e duas grandezas da mesma natureza. Por exemplo, escolhendo a unidade de medida de capacidade, pode-se identificar quantos copos de suco de $\mathbf{200}\ \boldsymbol{ml}$ cabem em $\mathbf{1}\ \boldsymbol{litro}$ de suco, ou seja, $\frac{200}{1.000}$ ou $\frac{1}{5}$.

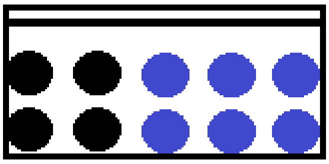
Figura 4 – Representação de medida



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A ideia de *razão* está na comparação de partes com partes e não partes com o todo. Logo, sua representação fracionária pode ser utilizada com índice de comparação entre duas grandezas. Por exemplo, numa caixa com dez bolas, pode-se representar a razão entre bolas pretas e azuis por $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$, assim a cada dez bolas, quatro são pretas e seis são azuis.

Figura 5 – Representação da razão

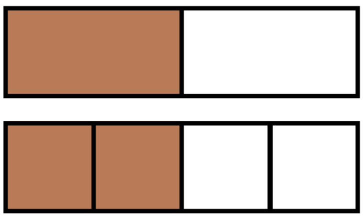


Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Além disso, pode-se associar a ideia de *Proporção* à razão, que significa representar uma igualdade entre duas razões, como mostrado no exemplo anterior, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, tendo que $\frac{4+6}{6} = \frac{2+3}{3}$, isto é, a forma do numerador com o denominador divide pelo numerador do primeiro, a razão é igual.

O *operador* representa as transformações em que um número racional pode sofrer por meio das operações matemáticas básicas. Nesse sentido, pode-se transformar a fração $\frac{1}{2}$ na fração equivalente $\frac{2}{4}$ multiplicando o numerador e denominador por dois, por exemplo.

Figura 6 – Representação de Operador e Fração Equivalente



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Também, considerando o conjunto $\mathbb{Q}$, pode-se propor como operador as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais, em especial nas frações.

Assim, a partir de $\mathbb{Q}$, na adição e subtração tem-se:

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times d}+\frac{b\times c}{b\times d}$ e $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times d}-\frac{b\times c}{b\times d}$, utilizando a noção de equivalência efetuar essas operações, transformando os denominadores em valores comuns.

Na multiplicação tem-se:

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$, onde numerador é multiplicado por numerador e o mesmo ocorre com denominador.

E na divisão tem-se:

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}}$, ao multiplicar as duas frações pelo inverso da segunda fração, o que significa dividir a fração por 1.

Em suas considerações sobre a construção do conceito de número racional, Kieren (1993, p. 64 – 65 citado por Rodrigues, 2005, p. 34), propôs um modelo teórico que enfatiza às estruturas cognitivas e apresenta possíveis interconexões entre as ideias que formam o conceito, considerando o conhecimento atual do sujeito até a sua formalização. Esse modelo apresenta um mapa em que se identificam quatro níveis pelos quais deve passar a construção do conceito de número racional:

> [...] o nível dos conhecimentos intuitivos; os subconstrutos; um terceiro nível, obtido a partir dos subconstrutos em direção a um pensamento multiplicativo mais formal; o conhecimento estruturado nos números racionais dentro de um conjunto quociente. (KIEREN, 1993, p.64-65 apud RODRIGUES, 2005, p. 34).

Assim, Kieren verificou por meio de experiências que os estudantes mobilizam diferentes representações e significados dos números racionais para resolver situações-problema. (RODRIGUES, 2005, p. 38). Por exemplo, para resolverem um problema com jarra de suco e copo, utilizam a ideia de razão; para resolverem um problema de repartição de lanche, usam a ideia de quociente, entre outros.

Rodrigues (2005) ressalta que um currículo montado segundo as ideias e orientações de Kieren possibilita uma interligação mais eficaz em vários campos da Matemática. O que se pode notar o quanto as representações e significados dos números racionais são importantes para estudar outros objetos e conceitos matemáticos no Ensino Médio, pois para aprendê-los o estudante tem que usar pelo menos uma representação e significado.

Dessa maneira, se os números racionais fossem considerados apenas uma extensão dos números inteiros ou algoritmo, permaneceriam apenas no campo dos números. Porém, quando se usa a visão dos significados e representações, os números racionais se tornam significativos para aprendizagem do estudante, possibilitando contato com outros domínios da matemática desde os anos iniciais da Educação Básica. (KIEREN, 1976).

TAREFA I – O dominó das conversões

Duração: 2 aulas de 50 min.

Objetivos:

- Identificar o significado de parte-todo.
- Estabelecer relações entre parte-todo e equivalência.
- Converter representações numéricas e geométricas de números racionais.

Hipóteses:

- O significado de parte-todo é parcialmente conhecido pelos estudantes.
- A relação entre parte-todo e equivalência não é compreendida.
- As conversões entre as representações numéricas e geométricas são facilitadas com a compreensão do significado parte-todo e equivalência.

Material:

Folha impressa, régua, lápis, lápis de cor, borracha, caneta, régua e tesoura.

Procedimentos:

- ➢ Organizar os estudantes em grupos de 4 ou 5.
- ➢ Propor que resolvam as tarefas 1, 2 e 3 mediando as interações entre estudantes e professor.
- ➢ Após a resolução, discutir o significado de parte-todo e equivalência a partir das ideias encontradas na resolução das tarefas.
- ➢ A partir da compreensão desses significados, orientar os estudantes quanto ao jogo de dominó.
- ➢ Explicar as regras do jogo: 30 peças divididas em 6 por pessoa considerando 5 pessoas, se o grupo for menor, o que sobrar fica para serem compradas. Quando não houver combinação, deve-se comprar uma peça e passar a vez. Os jogadores decidem quem começa.
- ➢ Propor que cada grupo jogue pelo menos 3x.

- Ao final dos jogos, discutir os resultados esperados e desafios encontrados na resolução das tarefas e do jogo.

1) Desenhe um retângulo, divida-o em três partes congruentes e pinte uma.

Responda:

a) Qual é o numerador? Qual é o denominador? Qual é a fração representada?

b) Que significado está representado?

c) Divida as partes ao meio, qual é a fração obtida?

d) Observe os dois desenhos, que relação possuem? O valor mudou?

e) Comentem os principais desafios encontrados pelo grupo na resolução da tarefa.

2) Em uma eleição do grêmio de um colégio obteve-se os seguintes resultados: $\frac{1}{2}$ dos votos para a chapa A; $\frac{2}{6}$ dos votos para a chapa B; $\frac{1}{6}$ dos votos para a chapa C. Represente a partir de uma figura geométrica o resultado dessa votação. Houve algum desafio nas etapas dessa solução?

3) A partir do significado de parte-todo e equivalência, escreva:

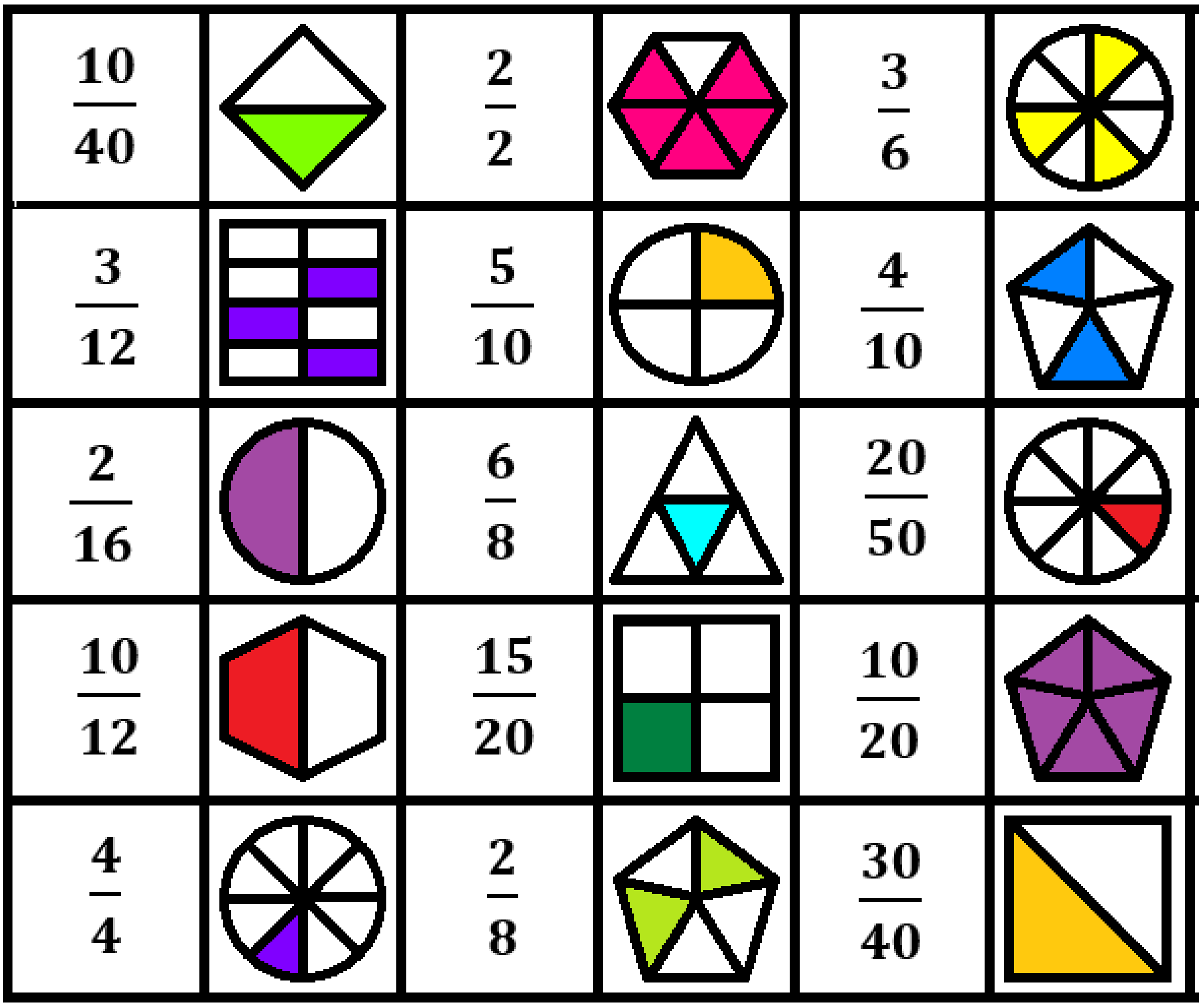
a) Uma fração equivalente a $\frac{1}{4}$ cujo numerador seja 20.

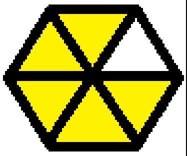
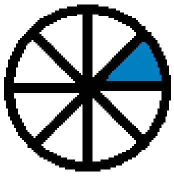
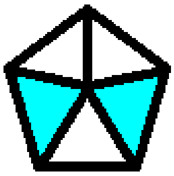
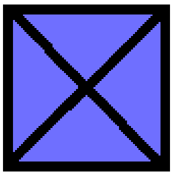
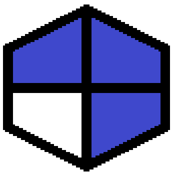
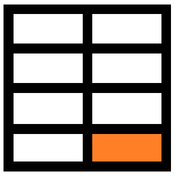
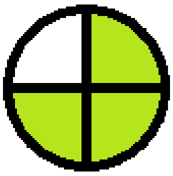
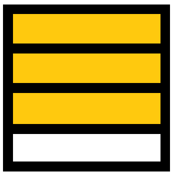
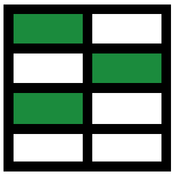
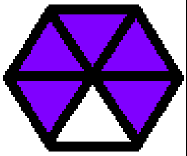
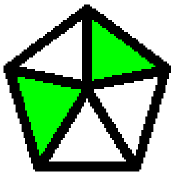
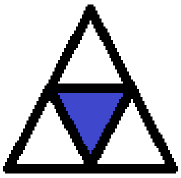
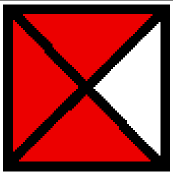
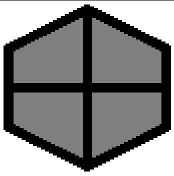
b) Uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$ cujo denominador 30.

c) Que relação entre parte-todo e equivalência você visualizou?

d) Comentem os principais desafios encontrados pelo grupo na resolução da tarefa.

Figura 7 - Peças do Dominó



$\frac{6}{16}$		$\frac{9}{12}$		$\frac{1}{8}$	
$\frac{2}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{4}{4}$	
$\frac{3}{24}$		$\frac{4}{16}$		$\frac{2}{5}$	
$\frac{50}{60}$		$\frac{5}{5}$		$\frac{20}{24}$	
$\frac{30}{80}$		$\frac{20}{24}$		$\frac{8}{20}$	

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

TAREFA II – Compreendendo o quociente de números racionais e operando com adição e subtração de frações

Duração: 2 aulas de 50 min.

Objetivos:

- Compreender o significado de quociente.
- Identificar e transformar números racionais em frações equivalentes para operar com adição e subtração de frações.
- Converter números racionais na forma decimal para fracionária.

Hipóteses:

- Os estudantes compreendem o significado de quociente e número racional.
- Conseguem utilizar equivalência para somar e subtrair frações.
- Identificam as conversões de números racionais no cotidiano.

Material:

Folha impressa, papel, lápis, borracha e caneta.

Procedimentos:

- ➢ Organizar os estudantes em grupos de 4 ou 5.
- ➢ Propor que resolvam as tarefas 1, 2, 3 e 4 mediando as interações entre estudantes e professor.
- ➢ Após a resolução, discutir o significado de quociente, adição e subtração de números racionais a partir das ideias encontradas na resolução das tarefas e os resultados esperados e desafios encontrados na resolução das tarefas.

1) Ana comprou um automóvel que custava $R\$ \, 30.000{,}00$ em 60 prestações iguais. Responda:

a) Qual é a fração que representa essa situação? Qual é o valor de cada prestação?

b) O que significa o valor do numerador? E do denominador?

2) Um grupo de quatro amigos se reuniu no fim de semana para comer pizza. Sabendo que eles compraram 3 pizzas grandes e comeram a mesma quantia, responda:

a) Qual é a fração que representa essa situação? Quantos pedaços cada um comeu?

b) Qual é a relação entre o item 1 e 2?

3) Considerando seus conhecimentos, responda:

a) Considere que você ganhou um sanduíche e mais um terço de outro sanduíche do subway. Qual é a fração que representa o total de sanduíche?

b) A partir da tarefa 2, suponha que um dos amigos comeu $\frac{5}{8}$ pedaços de pizza. Quantos pedaços restaram?

c) Que relação consegue ver nas duas situações?

d) Crie uma situação que envolva a adição ou subtração de frações e explique passo a passo seu raciocínio.

4) Considere os números decimais unidades de medida, converta para frações e simplifique se possível:

a) $0{,}5; 1{,}75; -0{,}25; 10{,}5; \ -1{,}25.$

b) Qual é o resultado, em fração, de $0{,}5$ mais $-0{,}25$?

c) Qual é a soma, em fração, de $1{,}75$ mais $-1{,}25$?

d) Qual é a relação entre esses números?

e) Comentem os principais desafios encontrados pelo grupo na resolução da tarefa.

TAREFA III – Estudando porcentagem, medida e razão a partir da multiplicação e divisão de números racionais

Duração: 2 aulas de 50 min.

Objetivos:

- Compreender o significado de porcentagem, medida e razão.
- Calcular uma multiplicação e divisão de fração de qualquer medida.
- Interpretar o significado de razão entre grandezas.

Hipóteses:

- Os estudantes compreendem parcialmente o significado de porcentagem, medida e razão.
- Possuem desafios no processo de multiplicação e divisão de frações.
- Traçam estratégias para resolver problemas de razão.

Material:

Folha impressa, papel, lápis, borracha, caneta e recursos tecnológicos (calculadora ou planilha eletrônica).

Procedimentos:

➢ Organizar a turma em grupos de 4 ou 5 estudantes.

➢ Propor que resolvam as tarefas 1, 2, 3, 4 e 5 mediando as interações e orientando a respeito dos processos.

➢ Comparar e discutir as resoluções, os resultados e os desafios encontrados na resolução das tarefas.

1) Transforme as frações em denominador 100 a partir da multiplicação de frações equivalentes:

a) um meio, três quartos, nove vinte avos e cinco doze e meio avos.

b) Escreva o que representa cada fração.

2) Responda:

a) Quanto é um quarto de 1.000 g de farinha? Dois terços de 180 km? Três quintos de $R\$1.000,00$?

b) A partir do item a), divida as frações e efetue a multiplicação com a calculadora.

c) Qual é a relação entre essas operações?

3) Uma pesquisa realizada num colégio com 400 estudantes sobre gosto musical mostrou os seguintes resultados abaixo.

a) Preencha a tabela conforme cada preferência usando a forma de fração ou decimal.

b) Qual método preferiu utilizar e qual é mais vantajoso?

Gênero Musical	% de preferência	Total de votos
Eletrônica	30%	
Rock	18%	
Pagode	12%	
Funk	40%	

4) Karina comprou 5 kg de chocolate para serem vendidos em embalagens de $\frac{1}{4}$ de kg. Responda:

a) Quantos gramas terá cada embalagem?

b) Qual é o total de embalagens que ela terá para vender?

c) Qual é a fração que representa a razão entre 5 embalagens e o total?

d) Qual é o percentual de 15 embalagens e o total?

5) Numa festa há 20 homens e 60 mulheres. Responda:

a) Qual é a razão entre homens e mulheres?

b) Qual é a razão entre mulheres e o total de pessoas?

c) Represente o percentual de cada item. O que essas relações significam?

TAREFA IV – RESOLVENDO QUESTÕES DO ENEM ENVOLVENDO NÚMEROS RACIONAIS

Duração: 2 aulas de 50 min.

Objetivos:

- Desenvolver a habilidade interpretar problemas envolvendo as representações e os significados de números racionais.
- Estabelecer relações entre as representações e os significados de números racionais associados à resolução de problemas.
- Resolver questões do ENEM a partir dos conhecimentos prévios sobre números racionais.

Hipóteses:

- Os estudantes conseguem separar as informações no problema.
- Possuem desafios na interpretação do problema sobre qual procedimento utilizar na resolução da questão.
- Usam estratégias diversificadas nos processos de resolução das questões.

Material:

Folha impressa, papel, lápis, borracha e caneta.

Procedimentos:

- Organizar os estudantes em grupos de 4 ou 5.
- Propor aos estudantes que resolvam cada questão individualmente e depois discutam entre si os processos e significados utilizados na resolução de cada problema.
- Auxiliar os estudantes quanto às dúvidas no processo de resolução, sem dar a resposta, indicando possíveis caminhos envolvendo as representações e os significados dos números racionais.
- Após a resolução, discutir as ideias sobre os significados dos números racionais encontradas nos problemas, os processos utilizados e os desafios encontrados na resolução de cada questão.

1) CONVERSÕES E REPRESENTAÇÕES DE FRAÇÕES E DECIMAL

Figura 8 – Questão 159 da prova azul do segundo dia do Enem 2020 digital

Um jogo pedagógico é formado por cartas nas quais está impressa uma fração em uma de suas faces. Cada jogador recebe quatro cartas e vence aquele que primeiro consegue ordenar crescentemente suas cartas pelas respectivas frações impressas. O vencedor foi o aluno que recebeu as cartas com as frações: $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{9}$.

A ordem que esse aluno apresentou foi

A) $\frac{1}{4}, \frac{5}{9}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{9}$

C) $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{9}$

D) $\frac{5}{9}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$

E) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{9}$

Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.

2) ESCALA, QUOCIENTE, MEDIDA E EQUIVALÊNCIA

Figura 9 – Questão 153 da prova azul do segundo dia do Enem 2021

Um parque temático brasileiro construiu uma réplica em miniatura do castelo de Liechtenstein. O castelo original, representado na imagem, está situado na Alemanha e foi reconstruído entre os anos de 1840 e 1842, após duas destruições causadas por guerras.

O castelo possui uma ponte de 38,4 m de comprimento e 1,68 m de largura. O artesão que trabalhou para o parque produziu a réplica do castelo, em escala. Nessa obra, as medidas do comprimento e da largura da ponte eram, respectivamente, 160 cm e 7 cm.

A escala utilizada para fazer a réplica é

- **A** 1 : 576
- **B** 1 : 240
- **C** 1 : 24
- **D** 1 : 4,2
- **E** 1 : 2,4

Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.

3) SISTEMA LINEAR E RAZÃO

Figura 10 – Questão 163 da prova azul do segundo dia do Enem 2020 digital

Em um país, as infrações de trânsito são classificadas de acordo com sua gravidade. Infrações dos tipos *leves* e *médias* acrescentam, respectivamente, 3 e 4 pontos na carteira de habilitação do infrator, além de multas a serem pagas. Um motorista cometeu 5 infrações de trânsito. Em consequência teve 17 pontos acrescentados em sua carteira de habilitação.

Qual é a razão entre o número de infrações do tipo *leve* e o número de infrações do tipo *média* cometidas por esse motorista?

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{5}{17}$

(E) $\frac{7}{17}$

Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.

4) MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÃO E PORCENTAGEM

Figura 11 – Questão 158 da prova azul do segundo dia do Enem 2021

Para realizar um voo entre duas cidades que distam 2 000 km uma da outra, uma companhia aérea utilizava um modelo de aeronave A, capaz de transportar até 200 passageiros. Quando uma dessas aeronaves está lotada de passageiros, o consumo de combustível é de 0,02 litro por quilômetro e por passageiro. Essa companhia resolveu trocar o modelo de aeronave A pelo modelo de aeronave B, que é capaz de transportar 10% de passageiros a mais do que o modelo A, mas consumindo 10% menos combustível por quilômetro e por passageiro.

A quantidade de combustível consumida pelo modelo de aeronave B, em relação à do modelo de aeronave A, em um voo lotado entre as duas cidades, é

A) 10% menor.
B) 1% menor.
C) igual.
D) 1% maior.
E) 11% maior.

Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.

5) MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÃO COM MEDIDAS

Figura 12 – Questão 152 da prova azul do Enem 2020 Reaplicação/ PPL

Questão 179

A fim de reforçar o orçamento familiar, uma dona de casa começou a produzir doces para revender. Cada receita é composta de $\frac{4}{5}$ de quilograma de amendoim e $\frac{1}{5}$ de quilograma de açúcar.

O quilograma de amendoim custa R$ 10,00 e o do açúcar, R$ 2,00. Porém, o açúcar teve um aumento e o quilograma passou a custar R$ 2,20. Para manter o mesmo custo com a produção de uma receita, essa dona de casa terá que negociar um desconto com o fornecedor de amendoim.

Nas condições estabelecidas, o novo valor do quilograma de amendoim deverá ser igual a

A) R$ 9,20.
B) R$ 9,75.
C) R$ 9,80.
D) R$ 9,84.
E) R$ 9,95.

Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.

6) RAZÃO, PORCENTAGEM E MULTIPLICAÇÃO

Figura 13 – Questão 150 da prova azul do Enem 2019 Reaplicação/ PPL

Um país decide investir recursos na educação em suas cidades que tenham um alto nível de analfabetismo. Os recursos serão divididos de acordo com a idade média da população que é analfabeta, conforme apresentado no quadro.

Recurso	Idade média da população analfabeta (*M*)
I	$M \leq 22$
II	$22 < M \leq 27$
III	$27 < M \leq 32$
IV	$32 < M \leq 37$
V	$M > 37$

Uma cidade desse país possui $\frac{60}{100}$ do total de analfabetos de sua população composto por mulheres. A média de idade das mulheres analfabetas é de 30 anos, e a média de idade dos homens analfabetos é de 35 anos.

Considerando a média de idade da população analfabeta dessa cidade, ela receberá o recurso

A I.
B II.
C III.
D IV.
E V.

Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.

7) ADIÇÃO, MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE FRAÇÕES

Figura 14 – Questão 170 da prova azul do segundo dia do Enem 2020

Antônio, Joaquim e José são sócios de uma empresa cujo capital é dividido, entre os três, em partes proporcionais a: 4, 6 e 6, respectivamente. Com a intenção de igualar a participação dos três sócios no capital da empresa, Antônio pretende adquirir uma fração do capital de cada um dos outros dois sócios.

A fração do capital de cada sócio que Antônio deverá adquirir é

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{9}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{4}{3}$

Fonte: INEP. Disponível em: <HTTPS://WWW.GOV.BR/INEP/PT-BR/AREAS-DE-ATUACAO/AVALIACAO-E-EXAMES-EDUCACIONAIS/ENEM/PROVAS-E-GABARITOS>. Acesso em: 10 mai. 2022.

REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, H. **Um curso de cálculo.** 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

KIEREN, T. **Number adn Measurement:** Papers from a Research Workshop. On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. Lesh (ed.) ERIC/SMEARC: Columbus, Ohio, p. 101-144, 1976. Disponível em: < https://eric.ed.gov/?id=ED120027>. Acesso em: 20 abr. 2022.

PIRES, C. **Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon.** Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145 – 166, 2009. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2136>. Acesso em: 15 mar. 2020.

PONTE, J.P. **Práticas profissionais dos professores de matemática.** In: PONTE, J.P. (ed.). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p.343-360, 2014.

ROGRIGUES, W. **Números Racionais:** um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. 2005. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SIMON, M. **Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective.** Journal for Reaserch in Mathematics Education, vol. 26, n. 2, pp 114-145, 1995. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/749205>. Acesso em: 15 mar. 2020.

_____. **What is a Mathematical Concept?** New York University, p. 1-11, janeiro, 2020. Disponível em: < https://www.researchgate.net/publication/338490514_What_is_a_Mathematical_Concept#:~:text=A%20mathematical%20concept%20is%20knowledge,a%20particular%20relationship%20must%20exist.> Acesso em: 22 jun. 2020.

_____; TZUR, R. **Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning:** an elaboration of the hypothetical learning trajectory. Mathematical Thinking and Learning, Abingdon, v. 6, n. 2, p. 91-104, 2004. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2>. Acesso em: 6 jun. 2020.

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO TCLE (TCLE - PARTICIPANTE MAIOR DE 18 ANOS)

TERMO DE CONSENTIMENTO

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Comitê de Ética em Pesquisa

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar do projeto de pesquisa “Tarefas de aprendizagem de matemática: THA de números racionais”, a ser realizado na ETEC São Mateus, pelo professor Lucas Rosa Sá Oliveira, como parte dos estudos em desenvolvimento no curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, sob a orientação do professor Dr. Armando Traldi Jr. O projeto de pesquisa foi aprovado pelo CEP – IFSP pelo CAAE número 60885922.8.0000.5473. Os objetivos do projeto são estudar os conceitos de números racionais envolvendo suas representações e significados como fração, porcentagem, medida e razão no Ensino Médio. Serão quatro tarefas abordando questões dissertativa e de alternativa, além de um jogo, envolvendo esses conceitos para serem respondidas em grupo e individualmente com a mediação do professor. A vantagem principal desta pesquisa é o fato de o professor estar há mais de dois anos trabalhando com este estudante e conhecer suas dificuldades. Por esse motivo, o benefício principal é a possibilidade de investigar profundamente os desafios enfrentados por este estudante ao lidar com situações que envolvam números racionais, e ajudá-lo a evoluir na interpretação e resolução de questões e problemas envolvendo números racionais, principalmente com frações. Os riscos para o estudante são de desconforto ou possível constrangimento ao não saber resolver as questões das tarefas (escrita ou oral), mas que com auxílio do professor será como resolver as tarefas do dia a dia em sala de aula. Ainda, é garantido ao estudante o ressarcimento para eventuais despesas que tenham em decorrência de sua participação na pesquisa e o direito a pedir indenização e a cobertura material para reparação a dano causado pela pesquisa. Você tem plena liberdade de recusar-se a participar ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma para o tratamento durante as aulas futuras do professor. A participação não é obrigatória, nem remunerada e consiste em resolver questões e desafios envolvendo as representações e os significados dos números racionais na forma escrita/oral discutida em grupo com auxílio do professor. É importante destacar que, as tarefas serão realizadas no horário regular das aulas já previstas no calendário escolar, não havendo nenhuma tarefa extraclasse. Garantimos a você a manutenção do sigilo e da privacidade da participação do estudante e de seus dados durante todas as fases da pesquisa e, posteriormente, na divulgação científica. Todas as tas coletadas não serão identificadas com o nome do estudante na pesquisa. As imagens e os áudios não serão divulgados sem autorização do responsável/estudante. Os materiais coletados serão mantidos sob nossa guarda por um período mínimo de cinco anos após o término da pesquisa, sendo posteriormente descartado por meio de incineração. Você pode entrar em contato, a qualquer momento, com o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, do Instituto Federal de São Paulo (CEP/IFSP), e com a Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), quando pertinente. Você receberá uma via deste termo, com o telefone e endereço institucional do pesquisador principal e do CEP (Comitê de Ética e Pesquisa), podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e participação, agora ou em qualquer momento.

Dr. Armando Traldi Jr.
Orientador
E-mail: traldijr@gmail.com
Rua: Pedro Vicente, 625, Canindé – São Paulo/SP - Telefone: (11) 2763-7576

Prof. Lucas Rosa Sá Oliveira
Estudante de Pós-Graduação
E-mail: proflrsoliveira@gmail.com
Rua: Pedro Vicente, 625, Canindé – São Paulo/SP - Telefone: (11) 99898-8218

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP
Telefone: (11) 3775-4665
E-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios de minha participação na pesquisa e concordo em participar.

Participante da Pesquisa
Assinatura e nome

APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE - RESPONSÁVEL PELO MENOR DE 18 ANOS)

TERMO DE CONSENTIMENTO

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Comitê de Ética em Pesquisa

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

O menor sob a sua responsabilidade está sendo convidado(a) a participar do projeto de pesquisa “Tarefas de aprendizagem de matemática: THA de números racionais”, a ser realizado na ETEC São Mateus, pelo professor Lucas Rosa Sá Oliveira, como parte dos estudos em desenvolvimento no curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, sob a orientação do professor Dr. Armando Traldi Jr. O projeto de pesquisa foi aprovado pelo CEP – IFSP pelo CAAE número 60885922.8.0000.5473. Os objetivos do projeto são estudar os conceitos de números racionais envolvendo suas representações e significados como fração, porcentagem, medida e razão no Ensino Médio. Serão quatro tarefas abordando questões dissertativa e de alternativa, além de um jogo, envolvendo esses conceitos para serem respondidas em grupo e individualmente com a mediação do professor. A vantagem principal desta pesquisa é o fato de o professor estar há mais de dois anos trabalhando com este estudante e conhecer suas dificuldades. Por esse motivo, o benefício principal é a possibilidade de investigar profundamente os desafios enfrentados por este estudante ao lidar com situações que envolvam números racionais, e ajudá-lo a evoluir na interpretação e resolução de questões e problemas envolvendo números racionais, principalmente com frações. Os riscos para o estudante são de desconforto ou possível constrangimento ao não saber resolver as questões das tarefas (escrita ou oral), mas que com auxílio do professor será como resolver as tarefas do dia a dia em sala de aula. Ainda, é garantido ao estudante o ressarcimento para eventuais despesas que tenham em decorrência de sua participação na pesquisa e o direito a pedir indenização e a cobertura material para reparação a dano causado pela pesquisa. Você tem plena liberdade de recusar-se a participar ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma para o tratamento durante as aulas futuras do professor. A participação não é obrigatória, nem remunerada e consiste em resolver questões e desafios envolvendo as representações e os significados dos números racionais na forma escrita/oral discutida em grupo com auxílio do professor. É importante destacar que, as tarefas serão realizadas no horário regular das aulas já previstas no calendário escolar, não havendo nenhuma tarefa extraclasse. Garantimos a você a manutenção do sigilo e da privacidade da participação do estudante e de seus dados durante todas as fases da pesquisa e, posteriormente, na divulgação científica. Todas as tarefas coletadas não serão identificadas com o nome do estudante na pesquisa. As imagens e os áudios não serão divulgados sem autorização do responsável/estudante. Os materiais coletados serão mantidos sob nossa guarda por um período mínimo de cinco anos após o término da pesquisa, sendo posteriormente descartado por meio de incineração. Você pode entrar em contato, a qualquer momento, com o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, do Instituto Federal de São Paulo (CEP/IFSP), e com a Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), quando pertinente. Você receberá uma via deste termo, com o telefone e endereço institucional do pesquisador principal e do CEP (Comitê de Ética e Pesquisa), podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e participação, agora ou em qualquer momento.

Dr. Armando Traldi Jr.
Orientador
E-mail: traldijr@gmail.com
Rua: Pedro Vicente, 625, Canindé – São Paulo/SP - Telefone: (11) 2763-7576

Prof. Lucas Rosa Sá Oliveira
Estudante de Pós-Graduação
E-mail: proflrsoliveira@gmail.com
Rua: Pedro Vicente, 625, Canindé – São Paulo/SP - Telefone: (11) 99898-8218

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP - Telefone: (11) 3775-4665
E-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios de minha participação na pesquisa e concordo em participar.

Responsável pelo Participante da Pesquisa
Assinatura e nome

APÊNDICE D – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE - PARTICIPANTE MENOR DE 18 ANOS)

TERMO DE ASSENTIMENTO

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Comitê de Ética em Pesquisa

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar do projeto de pesquisa “Tarefas de aprendizagem de matemática: THA de números racionais”, a ser realizado na ETEC São Mateus, pelo professor Lucas Rosa Sá Oliveira, como parte dos estudos em desenvolvimento no curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, sob a orientação do professor Dr. Armando Traldi Jr. O projeto de pesquisa foi aprovado pelo CEP – IFSP pelo CAAE número 60885922.8.0000.5473. Os objetivos do projeto são estudar os conceitos de números racionais envolvendo suas representações e significados como fração, porcentagem, medida e razão no Ensino Médio. Serão quatro tarefas abordando questões dissertativa e de alternativa, além de um jogo, envolvendo esses conceitos para serem respondidas em grupo e individualmente com a mediação do professor. A vantagem principal desta pesquisa é o fato de o professor estar há mais de dois anos trabalhando com este estudante e conhecer suas dificuldades. Por esse motivo, o benefício principal é a possibilidade de investigar profundamente os desafios enfrentados por este estudante ao lidar com situações que envolvam números racionais, e ajudá-lo a evoluir na interpretação e resolução de questões e problemas envolvendo números racionais, principalmente com frações. Os riscos para o estudante são de desconforto ou possível constrangimento ao não saber resolver as questões das tarefas (escrita ou oral), mas que com auxílio do professor será como resolver as tarefas do dia a dia em sala de aula. Ainda, é garantido ao participante o ressarcimento para eventuais despesas que tenham em decorrência de sua participação na pesquisa e o direito a pedir indenização e a cobertura material para reparação a dano causado pela pesquisa. Você tem plena liberdade de recusar-se a participar ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma para o tratamento durante as aulas futuras do professor. Sua participação não é obrigatória, nem remunerada e consiste em resolver questões e desafios envolvendo as representações e os significados dos números racionais na forma escrita/oral discutida em grupo com auxílio do professor. É importante destacar que, as tarefas serão realizadas no horário regular das aulas já previstas no calendário escolar, não havendo nenhuma tarefa extraclasse. Garantimos a você a manutenção do sigilo e da privacidade da participação do estudante e de seus dados durante todas as fases da pesquisa e, posteriormente, na divulgação científica. Todas as tarefas coletadas não serão identificadas com o nome do estudante na pesquisa. As imagens e os áudios não serão divulgados sem autorização do responsável/estudante. Os materiais coletados serão mantidos sob nossa guarda por um período mínimo de cinco anos após o término da pesquisa, sendo posteriormente descartado por meio de incineração. Você pode entrar em contato, a qualquer momento, com o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, do Instituto Federal de São Paulo (CEP/IFSP), e com a Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), quando pertinente. Você receberá uma via deste termo, com o telefone e endereço institucional do pesquisador principal e do CEP (Comitê de Ética e Pesquisa), podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e participação, agora ou em qualquer momento.

Dr. Armando Traldi Jr.
Orientador
E-mail: traldijr@gmail.com
Rua: Pedro Vicente, 625, Canindé – São Paulo/SP - Telefone: (11) 2763-7576

Prof. Lucas Rosa Sá Oliveira
Estudante de Pós-Graduação
E-mail: proflrsoliveira@gmail.com
Rua: Pedro Vicente, 625, Canindé – São Paulo/SP - Telefone: (11) 99898-8218

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP Telefone: (11) 3775-4665
E-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios de minha participação na pesquisa e concordo em participar.

Participante da Pesquisa
Assinatura e nome do menor

APÊNDICE E – TAREFAS DE NÚMEROS RACIONAIS

TAREFA I – O dominó das conversões

Duração: 2 aulas de 50 min.

Objetivos:

- Identificar o significado de parte-todo.
- Estabelecer relações entre parte-todo e equivalência.
- Converter representações numéricas e geométricas de números racionais.

Hipóteses:

- O significado de parte-todo é parcialmente conhecido pelos estudantes.
- A relação entre parte-todo e equivalência não é compreendida.
- As conversões entre as representações numéricas e geométricas são facilitadas com a compreensão do significado parte-todo e equivalência.

Material:

Folha impressa, régua, lápis, lápis de cor, borracha, caneta, régua e tesoura.

Procedimentos:

➢ Organizar os estudantes em grupos de 4 ou 5.

➢ Propor que resolvam as tarefas 1, 2 e 3 mediando as interações entre estudantes e professor.

➢ Após a resolução, discutir o significado de parte-todo e equivalência a partir das ideias encontradas na resolução das tarefas.

➢ A partir da compreensão desses significados, orientar os estudantes quanto ao jogo de dominó.

➢ Explicar as regras do jogo: 30 peças divididas em 6 por pessoa considerando 5 pessoas, se o grupo for menor, o que sobrar fica para serem compradas. Quando não houver combinação, deve-se comprar uma peça e passar a vez. Os jogadores decidem quem começa.

➢ Propor que cada grupo jogue pelo menos 3x.

- Ao final dos jogos, discutir os resultados esperados e desafios encontrados na resolução das tarefas e do jogo.

1) Desenhe um retângulo, divida-o em três partes congruentes e pinte uma.

Responda:

a) Qual é o numerador? Qual é o denominador? Qual é a fração representada?

b) Que significado está representado?

c) Divida as partes ao meio, qual é a fração obtida?

d) Observe os dois desenhos, que relação possuem? O valor mudou?

e) Comentem os principais desafios encontrados pelo grupo na resolução da tarefa.

2) Em uma eleição do grêmio de um colégio obteve-se os seguintes resultados: $\frac{1}{2}$ dos votos para a chapa A; $\frac{2}{6}$ dos votos para a chapa B; $\frac{1}{6}$ dos votos para a chapa C. Represente a partir de uma figura geométrica o resultado dessa votação. Houve algum desafio nas etapas dessa solução?

3) A partir do significado de parte-todo e equivalência, escreva:

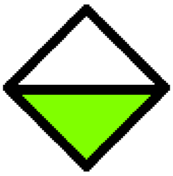
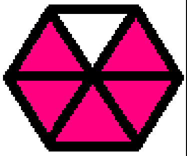
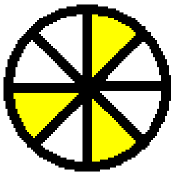
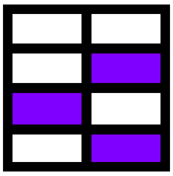
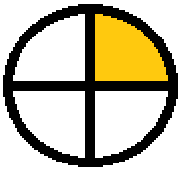
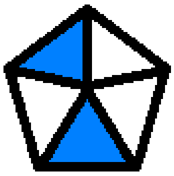
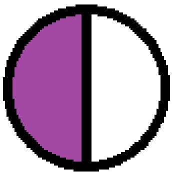
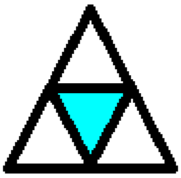
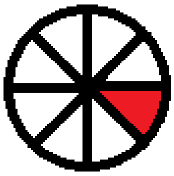
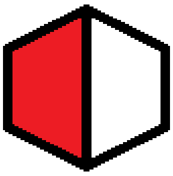
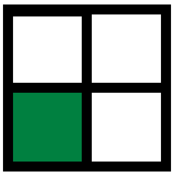
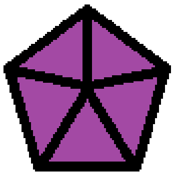
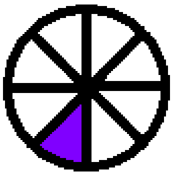
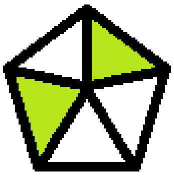
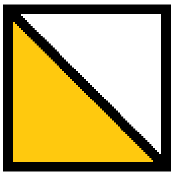
a) Uma fração equivalente a $\frac{1}{4}$ cujo numerador seja 20.

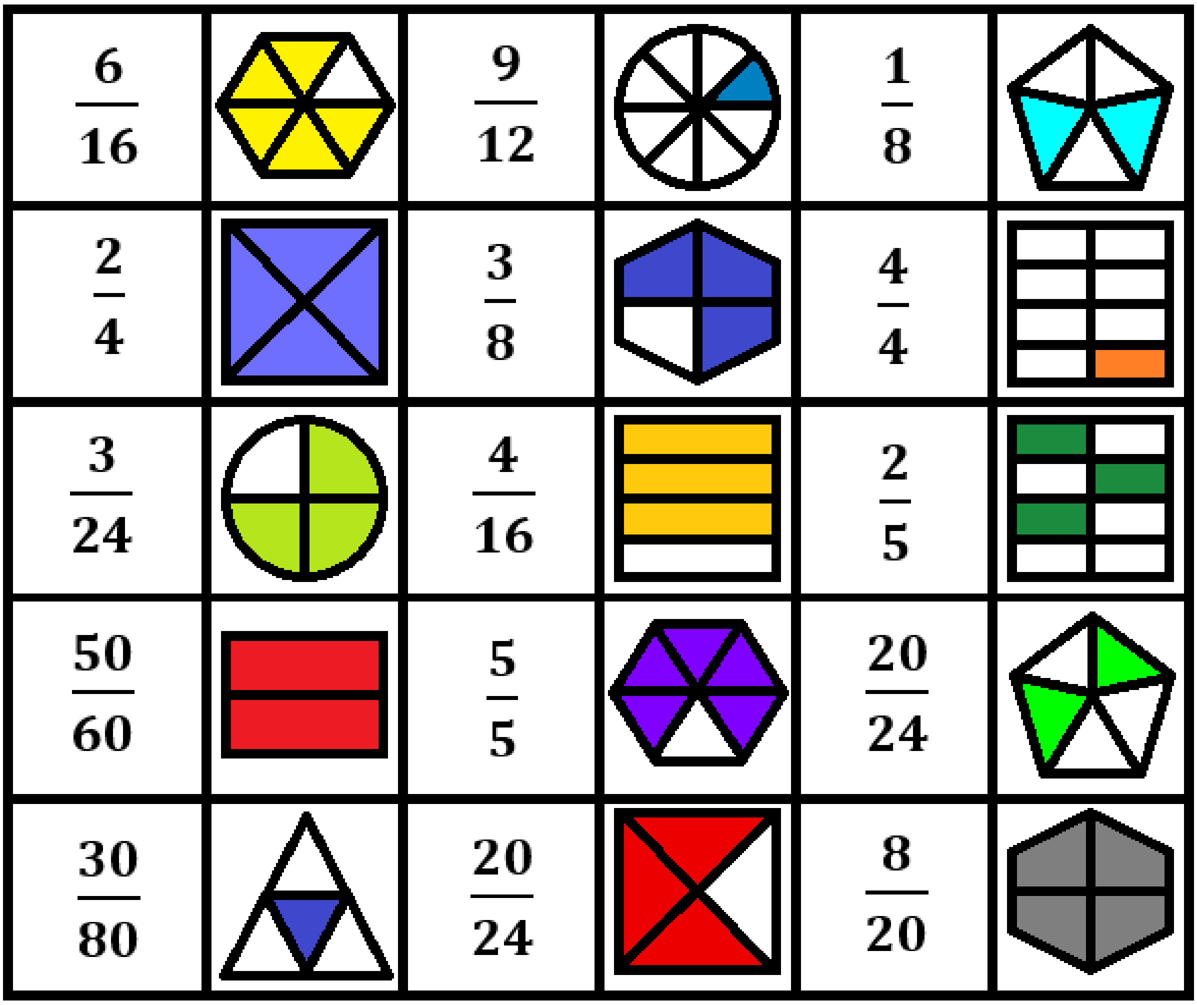
b) Uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$ cujo denominador 30.

c) Que relação entre parte-todo e equivalência você visualizou?

d) Comentem os principais desafios encontrados pelo grupo na resolução da tarefa.

Peças do Dominó

$\frac{10}{40}$		$\frac{2}{2}$		$\frac{3}{6}$	
$\frac{3}{12}$		$\frac{5}{10}$		$\frac{4}{10}$	
$\frac{2}{16}$		$\frac{6}{8}$		$\frac{20}{50}$	
$\frac{10}{12}$		$\frac{15}{20}$		$\frac{10}{20}$	
$\frac{4}{4}$		$\frac{2}{8}$		$\frac{30}{40}$	



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

TAREFA II – Compreendendo o quociente de números racionais e operando com adição e subtração de frações

Duração: 2 aulas de 50 min.

Objetivos:

- Compreender o significado de quociente.
- Identificar e transformar números racionais em frações equivalentes para operar com adição e subtração de frações.
- Converter números racionais na forma decimal para fracionária.

Hipóteses:

- Os estudantes compreendem o significado de quociente e número racional.
- Conseguem utilizar equivalência para somar e subtrair frações.
- Identificam as conversões de números racionais no cotidiano.

Material:

Folha impressa, papel, lápis, borracha e caneta.

Procedimentos:

- ➢ Organizar os estudantes em grupos de 4 ou 5.
- ➢ Propor que resolvam as tarefas 1, 2, 3 e 4 mediando as interações entre estudantes e professor.
- ➢ Após a resolução, discutir o significado de quociente, adição e subtração de números racionais a partir das ideias encontradas na resolução das tarefas e os resultados esperados e desafios encontrados na resolução das tarefas.

1) Ana comprou um automóvel que custava $R\$\,30.000{,}00$ em 60 prestações iguais. Responda:

a) Qual é a fração que representa essa situação? Qual é o valor de cada prestação?

b) O que significa o valor do numerador? E do denominador?

2) Um grupo de quatro amigos se reuniu no fim de semana para comer pizza. Sabendo que eles compraram 3 pizzas grandes e comeram a mesma quantia, responda:

a) Qual é a fração que representa essa situação? Quantos pedaços cada um comeu?

b) Qual é a relação entre o item 1 e 2?

3) Considerando seus conhecimentos, responda:

a) Considere que você ganhou um sanduíche e mais um terço de outro sanduíche do subway. Qual é a fração que representa o total de sanduíche?

b) A partir da tarefa 2, suponha que um dos amigos comeu $\frac{5}{8}$ pedaços de pizza. Quantos pedaços restaram?

c) Que relação consegue ver nas duas situações?

d) Crie uma situação que envolva a adição ou subtração de frações e explique passo a passo seu raciocínio.

4) Considere os números decimais unidades de medida, converta para frações e simplifique se possível:

a) $0{,}5; 1{,}75; -0{,}25; 10{,}5;\ -1{,}25.$

b) Qual é o resultado, em fração, de $0{,}5$ mais $-0{,}25$?

c) Qual é a soma, em fração, de $1{,}75$ mais $-1{,}25$?

d) Qual é a relação entre esses números?

e) Comentem os principais desafios encontrados pelo grupo na resolução da tarefa.

TAREFA III – Estudando porcentagem, medida e razão a partir da multiplicação e divisão de números racionais

Duração: 2 aulas de 50 min.

Objetivos:

- Compreender o significado de porcentagem, medida e razão.
- Calcular uma multiplicação e divisão de fração de qualquer medida.
- Interpretar o significado de razão entre grandezas.

Hipóteses:

- Os estudantes compreendem parcialmente o significado de porcentagem, medida e razão.
- Possuem desafios no processo de multiplicação e divisão de frações.
- Traçam estratégias para resolver problemas de razão.

Material:

Folha impressa, papel, lápis, borracha, caneta e recursos tecnológicos (calculadora ou planilha eletrônica).

Procedimentos:

➢ Organizar a turma em grupos de 4 ou 5 estudantes.

➢ Propor que resolvam as tarefas 1, 2, 3, 4 e 5 mediando as interações e orientando a respeito dos processos.

➢ Comparar e discutir as resoluções, os resultados e os desafios encontrados na resolução das tarefas.

1) Transforme as frações em denominador 100 a partir da multiplicação de frações equivalentes:

a) um meio, três quartos, nove vinte avos e cinco doze e meio avos.

b) Escreva o que representa cada fração.

2) Responda:

a) Quanto é um quarto de 1.000 g de farinha? Dois terços de 180 km? Três quintos de $R\$1.000,00$?

b) A partir do item a), divida as frações e efetue a multiplicação com a calculadora.

c) Qual é a relação entre essas operações?

3) Uma pesquisa realizada num colégio com 400 estudantes sobre gosto musical mostrou os seguintes resultados abaixo.

a) Preencha a tabela conforme cada preferência usando a forma de fração ou decimal.

b) Qual método preferiu utilizar e qual é mais vantajoso?

Gênero Musical	% de preferência	Total de votos
Eletrônica	30%	
Rock	18%	
Pagode	12%	
Funk	40%	

4) Karina comprou 5 kg de chocolate para serem vendidos em embalagens de $\frac{1}{4}$ de kg. Responda:

a) Quantos gramas terá cada embalagem?

b) Qual é o total de embalagens que ela terá para vender?

c) Qual é a fração que representa a razão entre 5 embalagens e o total?

d) Qual é o percentual de 15 embalagens e o total?

5) Numa festa há 20 homens e 60 mulheres. Responda:

a) Qual é a razão entre homens e mulheres?

b) Qual é a razão entre mulheres e o total de pessoas?

c) Represente o percentual de cada item. O que essas relações significam?

TAREFA IV – RESOLVENDO QUESTÕES DO ENEM ENVOLVENDO NÚMEROS RACIONAIS

Duração: 2 aulas de 50 min.

Objetivos:

- Desenvolver a habilidade interpretar problemas envolvendo as representações e os significados de números racionais.
- Estabelecer relações entre as representações e os significados de números racionais associados à resolução de problemas.
- Resolver questões do ENEM a partir dos conhecimentos prévios sobre números racionais.

Hipóteses:

- Os estudantes conseguem separar as informações no problema.
- Possuem desafios na interpretação do problema sobre qual procedimento utilizar na resolução da questão.
- Usam estratégias diversificadas nos processos de resolução das questões.

Material:

Folha impressa, papel, lápis, borracha e caneta.

Procedimentos:

- ➢ Organizar os estudantes em grupos de 4 ou 5.
- ➢ Propor aos estudantes que resolvam cada questão individualmente e depois discutam entre si os processos e significados utilizados na resolução de cada problema.
- ➢ Auxiliar os estudantes quanto às dúvidas no processo de resolução, sem dar a resposta, indicando possíveis caminhos envolvendo as representações e os significados dos números racionais.
- ➢ Após a resolução, discutir as ideias sobre os significados dos números racionais encontradas nos problemas, os processos utilizados e os desafios encontrados na resolução de cada questão.

1) CONVERSÕES E REPRESENTAÇÕES DE FRAÇÕES E DECIMAL

Figura 8 – Questão 159 da prova azul do segundo dia do Enem 2020 digital

Um jogo pedagógico é formado por cartas nas quais está impressa uma fração em uma de suas faces. Cada jogador recebe quatro cartas e vence aquele que primeiro consegue ordenar crescentemente suas cartas pelas respectivas frações impressas. O vencedor foi o aluno que recebeu as cartas com as frações: $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{9}$.

A ordem que esse aluno apresentou foi

Ⓐ $\frac{1}{4}, \frac{5}{9}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$

Ⓑ $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{9}$

Ⓒ $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{9}$

Ⓓ $\frac{5}{9}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$

Ⓔ $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{9}$

Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.

2) ESCALA, QUOCIENTE, MEDIDA E EQUIVALÊNCIA

Figura 9 – Questão 153 da prova azul do segundo dia do Enem 2021

Um parque temático brasileiro construiu uma réplica em miniatura do castelo de Liechtenstein. O castelo original, representado na imagem, está situado na Alemanha e foi reconstruído entre os anos de 1840 e 1842, após duas destruições causadas por guerras.

O castelo possui uma ponte de 38,4 m de comprimento e 1,68 m de largura. O artesão que trabalhou para o parque produziu a réplica do castelo, em escala. Nessa obra, as medidas do comprimento e da largura da ponte eram, respectivamente, 160 cm e 7 cm.

A escala utilizada para fazer a réplica é

- A 1 : 576
- B 1 : 240
- C 1 : 24
- D 1 : 4,2
- E 1 : 2,4

Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.

3) SISTEMA LINEAR E RAZÃO

Figura 10 – Questão 163 da prova azul do segundo dia do Enem 2020 digital

Em um país, as infrações de trânsito são classificadas de acordo com sua gravidade. Infrações dos tipos *leves* e *médias* acrescentam, respectivamente, 3 e 4 pontos na carteira de habilitação do infrator, além de multas a serem pagas. Um motorista cometeu 5 infrações de trânsito. Em consequência teve 17 pontos acrescentados em sua carteira de habilitação.

Qual é a razão entre o número de infrações do tipo *leve* e o número de infrações do tipo *média* cometidas por esse motorista?

Ⓐ $\frac{1}{4}$

Ⓑ $\frac{3}{2}$

Ⓒ $\frac{3}{4}$

Ⓓ $\frac{5}{17}$

Ⓔ $\frac{7}{17}$

Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.

4) MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÃO E PORCENTAGEM

Figura 11 – Questão 158 da prova azul do segundo dia do Enem 2021

Para realizar um voo entre duas cidades que distam 2 000 km uma da outra, uma companhia aérea utilizava um modelo de aeronave A, capaz de transportar até 200 passageiros. Quando uma dessas aeronaves está lotada de passageiros, o consumo de combustível é de 0,02 litro por quilômetro e por passageiro. Essa companhia resolveu trocar o modelo de aeronave A pelo modelo de aeronave B, que é capaz de transportar 10% de passageiros a mais do que o modelo A, mas consumindo 10% menos combustível por quilômetro e por passageiro.

A quantidade de combustível consumida pelo modelo de aeronave B, em relação à do modelo de aeronave A, em um voo lotado entre as duas cidades, é

- A 10% menor.
- B 1% menor.
- C igual.
- D 1% maior.
- E 11% maior.

Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.

5) MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÃO COM MEDIDAS

Figura 12 – Questão 152 da prova azul do Enem 2020 Reaplicação/ PPL

Questão 179 2020enem2020enem2020enem2020enem2020enem2020enem2020enem2020enem

A fim de reforçar o orçamento familiar, uma dona de casa começou a produzir doces para revender. Cada receita é composta de $\frac{4}{5}$ de quilograma de amendoim e $\frac{1}{5}$ de quilograma de açúcar.

O quilograma de amendoim custa R$ 10,00 e o do açúcar, R$ 2,00. Porém, o açúcar teve um aumento e o quilograma passou a custar R$ 2,20. Para manter o mesmo custo com a produção de uma receita, essa dona de casa terá que negociar um desconto com o fornecedor de amendoim.

Nas condições estabelecidas, o novo valor do quilograma de amendoim deverá ser igual a

- A R$ 9,20.
- B R$ 9,75.
- C R$ 9,80.
- D R$ 9,84.
- E R$ 9,95.

Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.

6) RAZÃO, PORCENTAGEM E MULTIPLICAÇÃO

Figura 13 – Questão 150 da prova azul do Enem 2019 Reaplicação/ PPL

Um país decide investir recursos na educação em suas cidades que tenham um alto nível de analfabetismo. Os recursos serão divididos de acordo com a idade média da população que é analfabeta, conforme apresentado no quadro.

Recurso	Idade média da população analfabeta (M)
I	$M \leq 22$
II	$22 < M \leq 27$
III	$27 < M \leq 32$
IV	$32 < M \leq 37$
V	$M > 37$

Uma cidade desse país possui $\frac{60}{100}$ do total de analfabetos de sua população composto por mulheres. A média de idade das mulheres analfabetas é de 30 anos, e a média de idade dos homens analfabetos é de 35 anos.

Considerando a média de idade da população analfabeta dessa cidade, ela receberá o recurso

- A I.
- B II.
- C III.
- D IV.
- E V.

Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.

7) ADIÇÃO, MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE FRAÇÕES

Figura 14 – Questão 170 da prova azul do segundo dia do Enem 2020

Antônio, Joaquim e José são sócios de uma empresa cujo capital é dividido, entre os três, em partes proporcionais a: 4, 6 e 6, respectivamente. Com a intenção de igualar a participação dos três sócios no capital da empresa, Antônio pretende adquirir uma fração do capital de cada um dos outros dois sócios.

A fração do capital de cada sócio que Antônio deverá adquirir é

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{9}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{4}{3}$

Fonte: INEP. Disponível em: <HTTPS://WWW.GOV.BR/INEP/PT-BR/AREAS-DE-ATUACAO/AVALIACAO-E-EXAMES-EDUCACIONAIS/ENEM/PROVAS-E-GABARITOS>. Acesso em: 10 mai. 2022.