Ações de uma professora-pesquisadora: discutindo as potencialidades e os desafios de trajetórias hipotéticas de aprendizagem nos anos iniciais

Juliana Silveira Barreiro Ribeiro

São Paulo
2023

JULIANA SILVEIRA BARREIRO RIBEIRO

AÇÕES DE UMA PROFESSORA PESQUISADORA:

discutindo as potencialidades e os desafios de trajetórias hipotéticas de aprendizagem nos anos iniciais

Dissertação apresentada e aprovada em 4 de dezembro de 2023 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

A banca foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Rogério Marques Ribeiro
IFSP – Câmpus São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Armando Traldi Jr.
IFSP – Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Profa. Dra. Carmen Lúcia Passos
UFSCar
Membro da Banca

São Paulo
2023

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

r484a Ribeiro, Juliana Silveira Barreiro
Ações de uma professora-pesquisadora: discutindo as potencialidades e os desafios de trajetórias hipotéticas de aprendizagem nos anos iniciais / Juliana Silveira Barreiro Ribeiro. São Paulo: [s.n.], 2023.
124 f.

Orientador: Rogério Marques Ribeiro

() - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2023.

1. Ensino de Matemática. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD

AGRADECIMENTOS

Essa dissertação não é apenas um produto final de minha trajetória acadêmica, mas também a documentação de um processo que se estendeu ao longo desses dois anos e meio de mestrado. Esta página de agradecimentos não poderia ser diferente. Ao longo desse percurso, fui recebendo apoio de diversas pessoas, assim como me lembrando de outras, que embora não estivessem presentes naquele momento, contribuíram para que eu chegasse até aqui. Agradeço a todos e todas que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento da pesquisa aqui retratada, e de forma particular destaco alguns nomes:

Ao meu orientador, professor Dr. Rogério Marques Ribeiro, pela paciência, generosidade, reuniões, indicações e conversas. Obrigada por considerar minha trajetória acadêmica e profissional e confiar que eu conseguiria realizar essa jornada.

À Dra. Carmen Lúcia Brancaglion Passos, da Universidade Federal de São Carlos, e ao Dr. Armando Traldi Jr., do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, pela participação nas Bancas de Qualificação e de Defesa, pelas leituras cuidadosas, pela generosidade e relevantes contribuições para o resultado deste trabalho.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, e a todos os docentes e discentes do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática – ENCiMA – IFSP. Aos colegas do ENCiMA, agradeço as conversas, os desabafos e as conquistas coletivas. Aprendi muito com vocês. Um agradecimento especial à Amanda Calazans e Theo Sander, por serem uma rede de apoio fundamental para a conclusão deste trabalho.

Aos membros do GEPEMFOP – Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Formação de Professores – agradeço pelas discussões e contribuições.

À Escola Móbile, agradeço a confiança e suporte, sem os quais a realização desse percurso não teria sido possível. Wilton Ormundo, Cleuza Vila Boas e Lili Fonseca, muito obrigada por tornarem essa pesquisa uma realidade. Nicole Capelli, obrigada pelas conversas, orientações e amizade.

Antonio Cortes, obrigada. Foi um privilégio aprender com você. Agradeço pela forma como me recebeu na Escola Móbile, pelo respeito, generosidade e parceria. Obrigada por ter me contagiado com seu amor pela educação no geral e pelo ensino de Matemática, em particular.

A todos os meus colegas da Móbile, agradeço a parceria, a amizade e aprendizado. À maravilhosa equipe de coordenação, professores e assistentes do quinto ano, agradeço o companheirismo, as conversas, reflexões e risadas. Vocês são incríveis e tenho muito orgulho de trabalhar em uma equipe como essa.

Agradeço especialmente à Mariana Traldi e Ana Carolina Vermulm, com quem tive o prazer de dividir a desafiadora missão de fazer o planejamento de Matemática. Muito obrigada, aprendi muito com vocês. Outro agradecimento especial à Victória Santos e Mayara Muriano, minhas parceiras da pesquisa em sala de aula. Obrigada pelo olhar sensível e por compartilharem todas as percepções de vocês comigo.

Sou muito grata por todas as crianças que tive em minhas salas de aula. Presenciar o crescimento e o desenvolvimento de uma turma é uma das experiências mais incríveis que uma professora pode ter. Agradeço especialmente à minha turma do quinto ano de 2022 e suas famílias, que aceitaram fazer parte desse desafio.

Ao meu companheiro, Daniel Ribeiro, por tudo: amor, parceria, apoio, suporte. Agradeço por confiar no meu sucesso, mesmo nos momentos de cansaço e sobrecarga, quando eu mesma achava que não conseguiria. Ao meu filho, Lucas, pelo amor incondicional, pela paciência e por respeitar as muitas horas trancadas no escritório.

À toda minha família, pelo apoio e por vibrarem comigo em cada conquista. Especialmente aos meus pais, Niceia e Gustavo, por valorizarem a educação e me incentivarem a continuar estudando sempre. À minha mãe, também agradeço o apoio logístico e pedidos de socorro atendidos. À minha querida irmã Carol, por ter me ajudado a desbravar o universo do mestrado e me incentivar a persistir na realização deste sonho antigo, mesmo após ter dado de cara com a porta algumas vezes. Aos meus avós, Carlos e Lygia (*in memoriam*), Carla e Darcy, por serem eternamente meu refúgio. À Tata, por ter sido sempre só amor. Aos meus sogros, Claudia e Hilton, pelo carinho, suporte e torcida entusiasmada.

Às queridas Juliana Bicca, Larissa Ferreira e Mônica Françoso. Obrigada por me mostrarem uma matemática investigativa, encantadora e permeada pelo afeto. À Adriana Bulbovas, agradeço a confiança e aprendizados.

Por fim, estendo meu agradecimento e reconhecimento a todas as professoras dos anos iniciais, que enfrentam o desafio de ensinar não apenas matemática, mas tantas coisas que eu jamais ousaria tentar enumerar.

O correr da vida embrulha tudo, a vida é assim: esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem. O que Deus quer é ver a gente aprendendo a ser capaz e ficar alegre a mais, no meio da alegria, e inda mais alegre ainda no meio da tristeza! A vida inventa! A gente principia as coisas, no não saber por que, e desde aí perde o poder de continuação porque a vida é mutirão de todos, por todos remexida e temperada. O mais importante e bonito, do mundo, é isto: que as pessoas não estão sempre iguais, ainda não foram terminadas, mas que elas vão sempre mudando.

(João Guimarães Rosa)

RESUMO

RIBEIRO, Juliana Silveira Barreiro. **Ações de uma professora-pesquisadora: discutindo as potencialidades e os desafios de trajetórias hipotéticas de aprendizagem nos anos iniciais**. 2023. 126 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. São Paulo, 2023.

Esta dissertação insere-se no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia – Campus São Paulo, e se refere a uma investigação que teve como objetivo abordar os desafios e potencialidades enfrentados por uma professora-pesquisadora ao desenvolver uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para explorar os diferentes significados de fração com estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental. A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa do tipo Pesquisa Intervenção, utilizando o caderno de anotações e os protocolos dos estudantes como principais instrumentos para a produção de dados. Durante o processo de pesquisa, a professora-pesquisadora enfrentou desafios relacionados à coleta de dados, sendo destacada a limitação decorrente da impossibilidade de gravar as aulas em tempo real devido à sua responsabilidade em conduzi-las. A elaboração das THA foi reconhecida como um processo trabalhoso e dispendioso, apesar de seu potencial para o ensino de matemática. Destaca-se, assim, a importância da THA no ensino de matemática, mas também um necessário olhar para os desafios práticos e questões relacionadas à implementação efetiva dessa abordagem nas escolas, e a necessidade de pesquisas adicionais para explorar maneiras de tornar as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem mais acessíveis e aplicáveis na prática educacional. A partir do desenvolvimento da investigação, foi possível elaborar um Produto Educacional, caracterizado como um material didático, no qual são apresentadas as trajetórias hipotéticas de aprendizagem que foram construídas, desenvolvidas e nortearam o processo de ensino e aprendizagem de frações com a turma de estudantes. Tem-se a expectativa que o Produto Educacional desenvolvido inspire outros professores na construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem a partir das necessidades e especificidades de suas turmas e dos ambientes de ensino.

Palavras-chave: Ensino de frações. Anos Iniciais. Professora-pesquisadora. Pesquisa Intervenção.

ABSTRACT

RIBEIRO, Juliana Silveira Barreiro. Actions of a teacher-researcher: discussing the potentialities and challenges of hypothetical learning trajectories in the early years. 2023. 126 p. Master's thesis (Master's in Science and Mathematics Teaching) – Federal Institute of Education, Science, and Technology of São Paulo. São Paulo, 2023.

This dissertation is part of the Professional Master's Program in Science and Mathematics Teaching at the Federal Institute of Education, Science, and Technology - Campus São Paulo. It refers to an investigation that aimed to address the challenges and potentialities faced by a teacher-researcher in developing a Hypothetical Learning Trajectory (THA) to explore different meanings of fractions with 5th-grade students in Elementary School. The research adopted a qualitative approach of the Intervention Research type, using notetaking and student protocols as primary instruments for data production. Throughout the research process, the teacher-researcher encountered challenges related to data collection, emphasizing the limitation arising from the inability to record real-time lessons due to her responsibility for conducting them. The development of THA was recognized as a laborious and costly process, despite its potential for mathematics education. Thus, the importance of THA in mathematics teaching is emphasized, along with a necessary focus on practical challenges and issues related to the effective implementation of this approach in schools. Additional research is deemed necessary to explore ways to make THA more accessible and applicable in educational practice. As a result of the research, an Educational Product was developed, characterized as instructional material presenting the constructed THA that guided the teaching and learning process of fractions with the student group. It is expected that the developed Educational Product inspires other teachers to construct hypothetical learning trajectories based on the needs and specificities of their classes and teaching environments.

Keywords: Teaching fractions. Early years. Teacher researcher. Intervention research.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A educação é um campo em constante evolução, e os professores, como agentes fundamentais desse processo, enfrentam desafios contínuos em sua prática pedagógica. Nesse contexto, a busca pelo aprimoramento das estratégias de ensino é essencial para proporcionar uma educação de qualidade aos estudantes.

Inicio[1] esta seção com essa reflexão, já que a motivação para o desenvolvimento da investigação que deu origem a este trabalho surgiu da minha inquietude, motivada a aprofundar minha compreensão sobre um tópico fundamental: o ensino de números racionais em sua representação fracionária.

Como professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental há quase quinze anos, percebo uma grande dificuldade dos estudantes na aprendizagem dos números racionais em sua representação fracionária. Partindo dessa percepção, iniciei estudos a respeito do tema e comecei a entender que o ensino de frações[2] tem sido objeto de pesquisa e discussões há muitas décadas.

Bertoni (2009, p.8), por exemplo, uma pesquisadora que tem investigado essa temática, afirma que “frações tem sido um assunto temido, mal compreendido, mal aprendido”, e reitera a importância das investigações sobre esta temática, complementando a afirmação de Lopes (2008), quando ele destaca que a maneira como o assunto é apresentado não colabora para a aprendizagem e muitas vezes os estudantes entendem as frações apenas como representações gráficas, sem conhecer o seu verdadeiro significado.

[1] Nesta seção, a narrativa assume um tom pessoal ao adotar o foco narrativo na primeira pessoa do singular para descrever minha trajetória. Conforme avançamos, esse foco transita para a primeira pessoa do plural, abraçando uma perspectiva coletiva.

[2] A fim de evitar repetição, passaremos a utilizar o termo fração para nos referirmos ao número racional em sua representação fracionária.

Considerando diferentes leituras acerca desta temática, como as mencionadas anteriormente, passei a perceber que estava diante de um desafio não apenas pontual, mas notavelmente abrangente, ultrapassando as fronteiras das minhas salas de aula, que me levou a corroborar a fala de Bertoni (2009, p. 21), quando ela questiona "se o processo usado para o ensino-aprendizagem das frações leva à formação do conceito de número fracionário, ou se fica reduzido a um manejo de figuras, sua designação e representação". Essa autora, para ilustrar essa situação, destaca a fala de um estudante do 5º ano do Ensino Fundamental, que ao ser perguntado sobre o que achava difícil em matemática, respondeu que achava fração difícil, e justificou dizendo: "Porque a gente tem que fazer umas coisas lá, aí tem que pintar, aí quando pinta, aí os restos lá eu não sei não. Por causa que pinta aí tem que ficar fazendo um bocado de número lá do branco e do pintado." (Bertoni, 2009, p.21)

Considero que essa situação explicitada ilustra uma das razões pela qual o ensino de frações é alvo de críticas. Na maioria das vezes, os exercícios são propostos de forma descontextualizada, promovendo uma aprendizagem mecânica que se baseia em macetes, regras e fórmulas. Em minha própria prática, muitas vezes, tive a impressão de que os estudantes haviam compreendido o conceito que estava sendo discutido, porém, a análise de determinados erros me levava ao questionamento sobre se alguns estudantes não estavam apenas memorizando formas de responder aos exercícios propostos.

A respeito do ensino e aprendizagem de frações, Lopes (2008) chama atenção para o fato de ser um conceito delicado e complexo, e que não pode ser aprendido apenas com pseudoproblemas, definições prontas e nomenclaturas obsoletas. Para esse autor, deve-se contemplar um ensino investigativo, com visualizações, escolha cuidadosa das frações a serem trabalhadas, entre outros aspectos a serem considerados. No entanto, apesar de se observar a presença de pesquisas e investigações a respeito do assunto, percebe-se que essa concepção mecanicista ainda aparece em muitos materiais didáticos, corroborando a tese de Bertoni (2009, p. 16), quando afirma que

> frações têm sido um dos temas mais difíceis no ensino fundamental. Avaliações e pesquisas atestam o baixo rendimento dos alunos no assunto. Nos últimos anos, as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse tema têm detectado inúmeros problemas e levantado hipóteses, que, entretanto, não abrangem a totalidade da problemática, nem são conclusivas. Talvez devido a isso, propostas de ensino incorporando esses resultados são apenas incipientes. O mais comum de se encontrar são as mesmas propostas de sempre, que começam informando as crianças sobre nomes e símbolos de frações, apresentando quadrados, retângulos ou círculos divididos e parcialmente pintados.

De forma particular, tendo em consideração os documentos oficiais, destaco que o ensino de frações está presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e neste documento é orientado que sejam trabalhados os conceitos de metade, terça e quarta parte no segundo e terceiro anos do Ensino Fundamental, enquanto a aprendizagem formal das frações deve ocorrer no quarto e quinto anos[3].

Essas leituras e reflexões me levaram a escrever um projeto de pesquisa para participar do processo seletivo para o mestrado profissional. Assim, embarquei em uma nova jornada acadêmica, ingressando no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática no Instituto Federal de São Paulo (IFSP). Com esse ingresso, tinha a expectativa de participar de discussões que me permitissem explorar outras metodologias que enriquecessem a experiência de aprendizado dos estudantes. A escolha pelo mestrado me proporcionou a oportunidade de mergulhar nos estudos relacionados ao campo da Educação Matemática e às abordagens teórico-metodológicas contemporâneas.

No caminhar por essa jornada tive a oportunidade de me aproximar das discussões realizadas no âmbito do Projeto de Pesquisa intitulado “Planejamento e Desenvolvimento de Aulas de Matemática: formação do professor e do estudante”, que tem como objetivo investigar potencialidades e desafios de elaborar e desenvolver aulas de matemática tanto na perspectiva da formação do professor de matemática quanto da formação do estudante da Educação Básica, sendo que os principais aspectos a serem analisados se referem às escolhas e desenvolvimento das tarefas de matemática pelos professores e aos processos de aprendizagem dos estudantes.

[3] Para evitar repetições passaremos a utilizar apenas as nomenclaturas 1º ano, 2º ano, 3º ano, 4º ano e 5º ano (ou suas respectivas escritas por extenso) para nos referirmos aos anos escolares dos anos iniciais.

Esse projeto tem sido desenvolvido de forma colaborativa no âmbito do Centro de Pesquisa e Inovação em Formação de Professores e Educação Matemática (CEPIN-IFSP/GRU) e do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Profissional (GPEMP- IFSP/SPO). Assim, as discussões propostas no âmbito desse Projeto de Pesquisa me possibilitaram explorar as complexidades do ensino de matemática, especialmente em relação à Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), uma teoria proposta por Martin Simon em 1995, e quem tem sido utilizada tanto quanto metodologia de análise quanto cenário de investigação nas diversas pesquisas que vem sendo desenvolvidas no âmbito do CEPIN-IFSP/GRU e do GPEMP-IFSP/SPO.

Neste contexto, as discussões promovidas me estimularam e despertaram maior interesse nos estudos sobre como a THA poderia ser elaborada e desenvolvida para o ensino de frações, considerando o Ciclo de Ensino da Matemática proposto por Simon (1995), haja vista o meu interesse em me apropriar de novos conhecimentos, estratégias e teorias que contribuíssem com a minha prática pedagógica, particularmente para tratar desse conteúdo matemático.

De forma particular, entendo que a compreensão do conceito de fração é essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes, no entanto, muitos deles enfrentam dificuldades em assimilar e aplicar esse conceito, e certamente essas dificuldades podem afetar o desempenho e a confiança deles na resolução de problemas que envolvem frações.

Diante desse cenário, entendo ser fundamental reconhecer a necessidade de abordar esse tema de forma a promover uma compreensão abrangente, explorando os diferentes significados do conceito de fração e, diante do interesse em se trabalhar com a THA, simultaneamente buscar identificar as potencialidades e os desafios que podem surgir durante a elaboração e desenvolvimento de uma THA construída para se abordar os diferentes significados de fração com os estudantes.

Dessa forma, destaco a seguinte questão que norteou a pesquisa realizada: *Quais desafios e potencialidades podem ser vivenciados por uma professora-pesquisadora ao elaborar e desenvolver uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem para discutir os diferentes significados de fração com estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental?*

Compreendo que a indicação dessa questão norteadora me permitiu a realização de um estudo sistemático e intencionado sobre meu próprio trabalho na sala de aula[4], possibilitando reflexões constantes sobre minha prática e meus conhecimentos, incluindo a gestão da aula de matemática, contribuindo, assim, para que me tornasse investigadora de minha própria prática.

Ressalto, ainda, que ao investigar essa questão, tomei como objetivo buscar compreender as minhas perspectivas, reflexões e aprendizados no processo de elaboração e desenvolvimento da THA. Além disso, também me preocupei em analisar o impacto dessa abordagem para os estudantes, considerando a compreensão e o envolvimento deles com o conceito de fração e seus diferentes significados.

Diante da questão norteadora apresentada, alguns objetivos específicos para a pesquisa podem ser delineados da seguinte maneira:

- Investigar e analisar os desafios específicos que uma professora-pesquisadora pode enfrentar ao construir e implementar uma THA voltada para discutir os diversos significados de fração com estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental
- Investigar as oportunidades e potencialidades que podem surgir durante o planejamento e desenvolvimento da THA, destacando aspectos que contribuam para uma compreensão mais rica e eficaz dos diferentes significados de fração.
- Avaliar como a THA influencia a compreensão dos estudantes do 5° ano em relação aos diferentes significados de fração, considerando seu engajamento, participação e eficácia na aprendizagem do conceito.
- Identificar e analisar estratégias didáticas que se mostram efetivas durante a implementação da THA, considerando as peculiaridades do tema e o contexto do 5° ano do Ensino Fundamental.

[4] Para Cochran-Smith e Lytle (1999), “sistemático” refere-se às formas de registro e de documentação das experiências que ocorrem dentro e fora da sala de aula, e “intencionado” indica uma atividade que, ao ser planejada pelos professores, tem intencionalidade.

- Com base nos resultados da pesquisa, fornecer recomendações práticas para professores e pesquisadores que buscam desenvolver trajetórias de aprendizagem eficazes para discutir frações com alunos do 5° ano do Ensino Fundamental.

Diante da abordagem delineada para a pesquisa e dos objetivos específicos propostos, ressalta-se que a investigação se propôs a lançar luz sobre os desafios, oportunidades e impactos relacionados à construção e implementação da THA voltadas para a compreensão dos diversos significados de fração no contexto do 5º ano do Ensino Fundamental.

Considera-se que ao investigar os desafios enfrentados pela professora-pesquisadora, as potencialidades surgidas durante o planejamento, e a influência da THA na compreensão dos estudantes, a pesquisa buscou contribuir de forma significativa para a sua prática pedagógica.

CAPÍTULO 1
REVISÃO DA LITERATURA

Alves (1992) enfatiza que uma pesquisa científica, para ser relevante para a comunidade acadêmica, deve revisitar achados relacionados ao objeto de estudo que ainda não foram ditos, ou analisá-lo sob uma perspectiva diferenciada daquilo que já foi explorado.

Concordando com esse ponto de vista, ressaltamos que, ao nos propormos a realizar este estudo, nossa principal preocupação foi investigar uma temática que enriquecesse o campo da Educação Matemática, especificamente no que se refere à prática pedagógica do professor. Os esforços concentraram-se em revelar o que de novo poderia emergir deste estudo, tanto em termos de sua abordagem quanto em relação à natureza do conhecimento gerado, em relação ao objeto de pesquisa já explorado por outros pesquisadores.

Com o intuito de considerar essas preocupações, realizamos uma revisão da literatura da área. Buscamos, a partir da análise de pesquisas realizadas no mesmo campo, realizar comparações, confrontar diferentes perspectivas, interesses e objetivos para esclarecer de que forma nosso estudo poderia contribuir com as pesquisas na área de Educação Matemática.

Sendo assim, ressalta-se que a revisão da literatura compreende um levantamento bibliográfico tanto sobre trajetórias hipotéticas de aprendizagem nos anos iniciais quanto sobre o ensino de frações, o qual foi realizado entre os dias 13 e 20 de junho de 2022 no Portal de Teses e Dissertações da Capes. Para a delimitação e escolha dos autores e obras que são apresentadas a seguir, buscou-se eleger aqueles que mais se identificaram ou enriqueceram nossa investigação, e os critérios de inclusão e exclusão são apresentados no âmbito de cada temática.

1.1 Trajetória Hipotética de Aprendizagem nos Anos Iniciais

A revisão inicial da literatura teve como ponto de partida os termos "trajetória hipotética de aprendizagem" e "matemática", utilizando o operador booleano AND, o que resultou na identificação de 40 resultados, abrangendo 7 teses de doutorado e 33 dissertações de mestrado. Após uma análise dos títulos, duas pesquisas foram excluídas, pois se tratava de estudos de mapeamento que não abordavam especificamente a Trajetória Hipotética de

Aprendizagem (THA). Posteriormente, procedemos à leitura dos resumos, resultando na exclusão de mais sete trabalhos pelo mesmo critério. Desta forma, permaneceram 31 trabalhos, nos quais realizamos uma análise focando inicialmente a identificação do nível de ensino abordado por cada pesquisa.

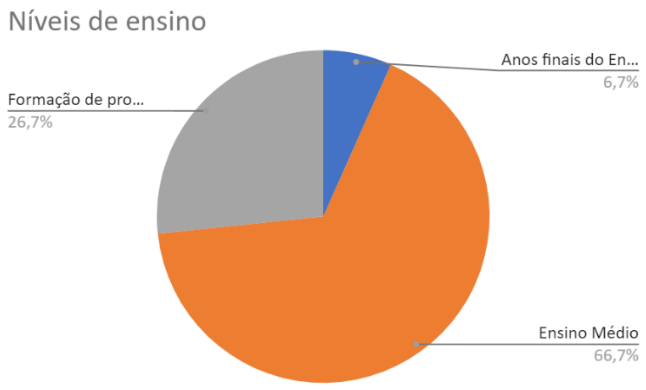
É relevante notar que apenas uma pesquisa não estava vinculada a nenhum nível de ensino, caracterizando-se como um estudo predominantemente teórico. Chama a atenção, ainda, o fato de que não foram encontrados estudos específicos relacionados aos anos iniciais do Ensino Fundamental, conforme evidenciado no quadro e no gráfico apresentados abaixo.

Quadro 1 – Níveis de ensino

Níveis de ensino	Quantidade
Anos finais do Ensino Fundamental	2
Ensino Médio	20
Formação de professores	8

Fonte: dados da pesquisa

Figura 1 – Gráfico dos níveis de ensino



Fonte: dados da pesquisa

Em seguida, identificamos as temáticas dos trabalhos, e havia apenas um trabalho a respeito de frações, como mostra o quadro abaixo.

Quadro 2 – Temáticas dos trabalhos

Tema	**Quantidade**
Funções	10
Geometria	5
Estatística	3
Análise combinatória	2
Frações	1
Outros	10

Fonte: dados da pesquisa

Considerando essa revisão, temos que não foram encontradas pesquisas que envolvem a THA e seu desenvolvimento em turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental, e quando consideramos a revisão a partir das temáticas, tem-se que apenas uma tratava do ensino de frações e, por essa razão, esse foi o trabalho selecionado para uma leitura mais aprofundada.

Destaca-se, assim, que o trabalho intitulado “Frações e suas operações: resolução de problemas em uma trajetória hipotética de aprendizagem”, de Rogéria Malacrida Menotti, é uma dissertação de mestrado que foi defendida em 2014, no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Londrina.

Trata-se de uma pesquisa de cunho bibliográfico, que teve como objetivo principal apresentar uma proposta de THA, baseada na resolução de problemas, para o ensino de números fracionários. A partir dessa pesquisa, a autora elaborou seis tarefas destinadas a estudantes do sétimo ano. Na descrição das tarefas são apresentados os objetivos específicos, os materiais necessários, os procedimentos, a tarefa em si, e questionamentos que o professor pode fazer aos estudantes, além de descrever possíveis dúvidas e falas dos estudantes.

Na pesquisa desenvolvida, as tarefas são descritas detalhadamente, e consideramos que podem ser úteis como material de apoio para outros professores que estejam em busca de tarefas matemáticas para ensino de frações. No entanto, as tarefas não foram desenvolvidas em sala de aula.

Menotti (2014) destaca que a THA foi elaborada a partir do pressuposto de determinados conhecimentos prévios, tais como equivalência de frações. Ou seja, a elaboração da THA não partiu de um contexto real, tampouco foi modificada a partir do fazer matemático dos estudantes, pontos que, em nosso entendimento, são fundamentais para a elaboração da THA.

A dissertação evidencia as hipóteses da autora a respeito da construção dos conhecimentos matemáticos dos estudantes, antecipando possíveis dúvidas e discussões que poderiam acontecer na aula. Além disso, traz problematizações que o professor pode realizar em cada tarefa.

Destaca-se que este é um importante aspecto para reflexão, por ressaltar a ideia de que não basta apenas propor uma tarefa: é necessário pensar em perguntas potentes que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio matemático do estudante. Ressalta-se que esta leitura reforçou a importância da atenção para esse aspecto.

Como resultado da revisão da literatura sobre a temática THA nos anos iniciais, pode-se destacar que não se encontrou nenhum trabalho disponível no Banco de Teses e Dissertações da Capes, e encontramos apenas uma dissertação a respeito do ensino de fração articulada com a elaboração de THA. Por essa razão, entendemos que a pesquisa delineada poderá contribuir com a produção acadêmica a respeito das Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

1.2 Frações

Na segunda fase da revisão da literatura utilizamos os termos "fração" e "frações" como descritores, empregando o operador booleano OR. O resultado inicial foi de 15.689 registros, e diante desse volume expressivo, optamos por realizar um recorte temporal, limitando a busca ao período de 2018 a 2022, o que resultou em um total de 2.428 trabalhos.

Posteriormente, implementamos um novo critério, direcionando a pesquisa para áreas específicas, tais como educação, ensino, ensino de ciências e matemática, ensino-aprendizagem, matemática, matemática aplicada, psicologia cognitiva, sociais e humanidades. Áreas como biologia e agronomia foram excluídas nesse refinamento, resultando em uma seleção final de 117 trabalhos.

A partir desse resultado, realizou-se a leitura de todos os títulos, mas desta vez sem se limitar aos anos iniciais, já que alguns trabalhos de sextos e sétimos anos tratavam da aprendizagem de frações. Foram excluídos trabalhos que explicitamente abordavam ideias mais complexas em relação às frações, ou que não apresentassem articulação com a THA, e com base nesses novos critérios foram excluídos 21 trabalhos.

Tendo em vista os 96 trabalhos selecionados, foi realizada a leitura dos resumos destes, e nesta etapa foram excluídos mais 36 trabalhos, uma vez que parte deles não tinham relação com os conceitos iniciais de fração ou com a THA, e outros não possuíam a divulgação autorizada.

Em uma nova etapa dessa revisão, foi efetuada a leitura de partes do texto de oito dissertações, pois havia dúvidas em relação a alguns desses trabalhos, o que acarretou com a exclusão de outros cinco trabalhos, por tratarem de operações com frações, ou por terem foco em outras questões, como contrato didático.

Assim, restaram 55 trabalhos. Devido ao grande volume, optou-se por concentrar a análise nos resumos, lendo partes específicas dos textos somente quando necessário, com foco especial na introdução, metodologia e resultados.

Em relação à natureza das pesquisas, a maioria apresenta os resultados de experiências de ensino, como mostra o quadro a seguir:

Quadro 3 – Natureza das pesquisas

Natureza da pesquisa	
Tipo de pesquisa	**Quantidade**
Experiência de ensino	35
Pesquisa de campo diagnóstica	3
Análise de materiais didáticos	6
Outras pesquisas bibliográficas	4
Estudos de mapeamento	1
Outros	5

Fonte: dados da pesquisa

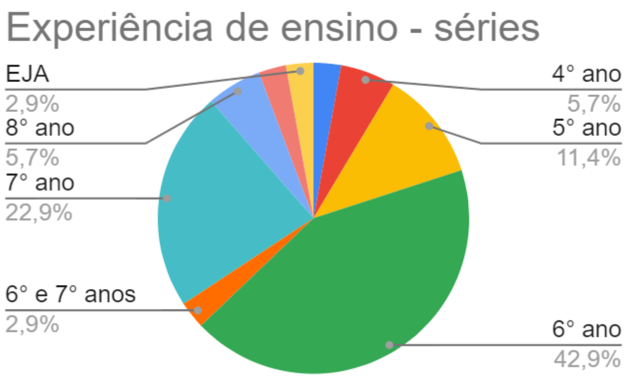
Considerando as pesquisas que apresentaram experiências de ensino, foi feita uma categorização a respeito dos anos escolares no qual ocorreram as ações. É possível observar que pouco mais de 10% das experiências de ensino foram desenvolvidas no quinto ano, como demonstra o quadro e o gráfico a seguir.

Quadro 4 – Experiências de ensino por ano escolar

Ano Escolar	Quantidade
3° ano	1
4° ano	2
5° ano	4
6° ano	15
6° e 7° anos	1
7° ano	8
8° ano	2
9° ano	1
EJA	1

Fonte: dados da pesquisa

Figura 2 - Gráfico – Experiências de ensino divididas por ano escolar



Fonte: dados da pesquisa

Por fim, destacamos a diversidade de estratégias e metodologias de ensino utilizadas nas pesquisas, o que está representado no Quadro 5 a seguir. Ressalta-se, no entanto, que alguns trabalhos apresentaram mais de uma estratégia.

Quadro 5 – Estratégias e metodologias de ensino

Estratégias	**Quantidade**
Materiais manipulativos	12
Ferramentas digitais	10
Resolução de problemas	10
Jogos	8
Fichas de exercícios	7
Narrativas	3

Fonte: dados da pesquisa

CAPÍTULO 2
PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, são introduzidos os pressupostos teóricos que serviram de base para a análise, concepção e elaboração das tarefas matemáticas abordadas neste estudo, bem como para a análise dos desafios específicos que a professora-pesquisadora enfrentou ao desenvolver uma THA visando discutir conceitos de frações com estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental.

Julgamos ser necessário, ainda, destinar uma seção para diferenciar Tarefa e Atividade e outra para aprofundar o estudo teórico sobre o conceito de fração e seus diferentes construtos. Assim, a seguir, tecemos algumas considerações em relação ao pressupostos teóricos que serviram como suporte à realização desta pesquisa, de cunho qualitativo.

2.1 Tarefa e Atividade

Os termos "tarefa" e "atividade" por vezes são confundidos. Nesta seção, nosso objetivo é esclarecer as distinções entre esses significados, uma vez que, para o desenvolvimento da pesquisa, foi necessário que os estudantes estivessem em atividade, e nesse contexto foram apresentadas tarefas a eles. Segundo Cunha (2000, p. 5), o termo "tarefa" significa "a proposta de trabalho que o professor apresenta aos estudantes, os quais, por sua vez, se envolvem em atividade matemática para resolver".

Sendo assim, considera-se que a proposta feita pelo professor deve ser entendida como tarefa, podendo ser apresentada oralmente ou por escrito. Por outro lado, entende-se por atividade a ação dos estudantes ao se envolverem na tarefa para resolvê-la. Dessa forma, para Lamonato (2007, p. 74), "podemos afirmar que a tarefa é a proposta de trabalho e a atividade é a ação de quem se propõe a desenvolvê-la".

De acordo com Ponte (2005), a tarefa estabelece o que deve ser feito em determinado tempo e pode se manifestar de diversas formas: formulada pelo professor e proposta aos estudantes, ser exclusivamente da iniciativa dos estudantes, podendo também ser enunciada no início do trabalho ou ainda ser constituída de modo implícito, à medida que o trabalho vai se desenvolvendo. Por outro lado, a atividade pode ser física ou mental, referindo-se aos estudantes, por englobar tudo o que ele faz, ou seja, a maneira como se envolve nas situações em sala de aula. Isso inclui representar, relacionar e operar, resolver problemas, comunicar, explorar e investigar.

Pode-se concluir, então, que a tarefa é utilizada como um instrumento para a atividade dos estudantes, enquanto a atividade dos estudantes serve como um objeto para as funções do professor, ou seja, a tarefa e a atividade representam um ponto de convergência entre o professor e o estudante, configurando-se como um meio pelo qual o professor se conecta com os estudantes com o intuito de promover a aprendizagem. Contudo, para que isso ocorra, é necessário que os estudantes se engajem em atividade, e para viabilizar esse engajamento é importante que o professor realize uma análise das tarefas que pretende desenvolver, assegurando-se de que sejam pertinentes para envolver os estudantes em atividade.

2.2 Números Racionais: construindo conceitos fundamentais

A compreensão e o ensino dos números racionais ocupam um lugar central no currículo educacional em todo o mundo, e por uma razão fundamental: esses números desempenham um papel essencial em nossa vida cotidiana, com aplicações abrangentes em diversas disciplinas, além de serem utilizados em situações práticas do dia a dia.

Considera-se que esses aspectos tornam o ensino dos números racionais nos anos iniciais do Ensino Fundamental ainda mais relevante, haja vista sua importância para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, do raciocínio lógico e do pensamento crítico, desde cedo, a partir de situações que promovam o aprendizado dos números racionais em sua forma fracionária, ou seja, as frações, em situações práticas e contextualizadas, como o uso de situações para o compartilhamento de brinquedos com os amigos ou situações que envolvam a medição de ingredientes ao cozinhar com seus familiares.

O conjunto dos números racionais abrange uma ampla variedade de números, incluindo os inteiros, as frações e os números decimais que podem ser expressos como frações. Segundo Flores e Bisognin (2020), os números racionais são representados por "$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}\right\}$, no qual $\mathbb{Z}$ indica o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, \boldsymbol{-3}, \boldsymbol{-2}, \boldsymbol{-1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \dots\}$".

Ressalta-se que o ensino dos números racionais tem sido objeto de investigação e estudo no campo da Educação Matemática. Particularmente devido aos desafios associados à compreensão de suas representações e significados pelos estudantes, bem como à abordagem sistemática adotada pelos professores.

As principais concepções relacionadas aos números racionais no currículo escolar tendem a ser apresentadas de forma específica e rigidamente ensinadas pelos professores, muitas vezes negligenciando outras formas de representação e significado que poderiam ser mais profundamente exploradas. Esse enfoque restrito tem consequências perceptíveis na compreensão dos números racionais tanto por parte dos estudantes quanto dos próprios professores (Kieren, 1993).

No âmbito dos anos iniciais, entretanto, o ensino dos números racionais não se deve limitar apenas a apresentar frações como um conceito abstrato, mas sim buscar promover a compreensão do seu conceito e seus significados para o desenvolvimento de habilidades matemáticas futuras.

Ressalta-se, que esta ideia inclui a importância de que o professor também não limite esse aprendizado à promoção de uma compreensão das frações apenas como representação de partes de um todo, permitindo-lhes expressar precisamente outras ideias associadas às frações, como a ideia de divisão, de proporção e de relações entre quantidades, contribuindo, ainda, para conceitos matemáticos mais avançados, como as operações matemáticas envolvendo frações, porcentagens e números decimais.

A seguir, é apresentada uma discussão sobre os diferentes significados da fração, abordando como essa representação numérica versátil pode ser compreendida e utilizada de maneiras diferentes e em contextos diversos. Essa análise permitirá uma visão mais abrangente e aprofundada do conceito de fração, indo além da mera representação matemática, e explorando suas aplicações práticas e contextos reais de uso.

2.2.1 Significados de frações

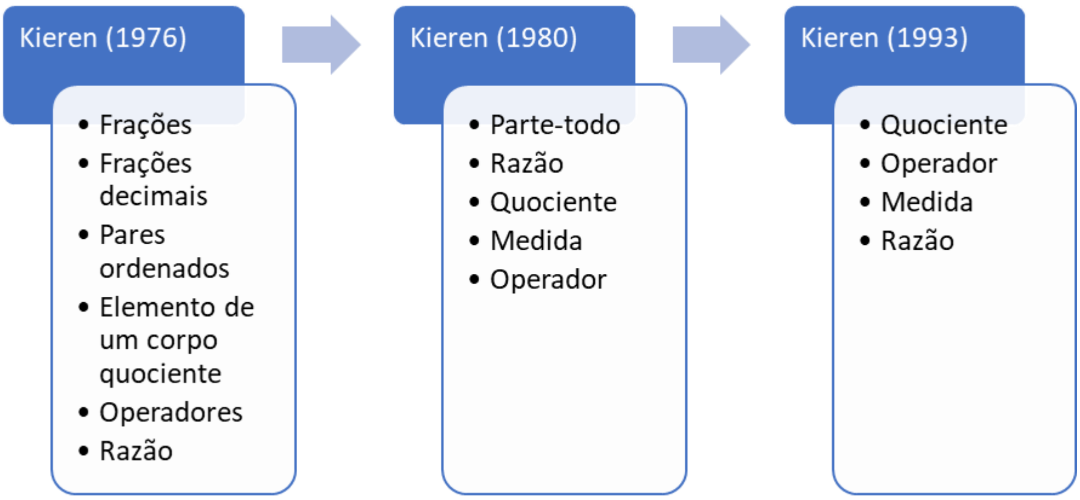
Diversas pesquisas, como as produzidas por Graça, Ponte e Guerreiro (2021), por Nogueira (2020) e por Cardoso (2019), convergem ao destacar que a ênfase excessiva na abordagem da fração como uma relação parte-todo no ensino pode resultar em desafios significativos no processo de aprendizagem dos estudantes. Diante disso, torna-se evidente a importância de os professores reconhecerem a necessidade de abordar múltiplos significados da fração em suas aulas. Graça, Ponte e Guerreiro consideram que:

> os estudantes devem ser confrontados com todos os significados. Cada significado proporciona determinados conhecimentos que são importantes para os estudantes pelo que restringir o aluno a apenas a alguns significados dificulta a sua capacidade de construir um conhecimento mais abrangente. Este estudo mostra que os diferentes significados das frações podem ser abordados de modo produtivo numa experiência de ensino no 5.º ano, onde se trabalham também outros conceitos de número racional, nomeadamente as suas diferentes representações e as quatro operações (Graça; Ponte; Guerreiro, 2021, p.711).

O estudo realizado por esses autores também encontra respaldo na pesquisa desenvolvida por Nogueira (2020), que em sua tese de doutoramento apresenta uma evolução das diversas interpretações a respeito dos significados da fração.

De acordo com Nogueira (2020), Thomas Kieren, em 1975, foi o primeiro pesquisador a chamar a atenção para a complexidade envolvida na compreensão dos números racionais e, em 1976, destacou sete construtos dos números racionais. Em 1980, o mesmo autor propôs uma nova categorização desses construtos, destacando cinco significados. Já em 1993, o autor reduz sua categorização para quatro construtos. A figura a seguir apresenta os diferentes constructos considerados pelo autor nesse período.

Figura 3 – Os construtos dos números racionais de acordo com Kieren



Fonte: elaborado pela autora, com base em Nogueira, 2020.

Nogueira (2020) apresenta, ainda, as contribuições de outros pesquisadores que tomaram como base os estudos de Kieren, como Behr *et al.* (1983, 1992), Romanatto (1997), Cavalcanti e Guimarães (2007), Onuchic e Avelato (2008), Moreira e Ferreira (2008), além dos Parâmetros Curriculares Nacionais, de 2000, no qual também é proposta uma categorização quanto aos construtos das frações. A figura a seguir apresenta os diferentes construtos propostos.

Figura 4 – Construtos de frações

Fonte: elaborado pela autora, com base em Nogueira, 2020.

A pesquisa e a análise dos construtos relacionados à matemática desempenham um papel essencial no desenvolvimento da compreensão do conceito de fração. Conforme destacado por Moreira e Ferreira (2008, *apud* Nogueira, 2020), ao longo das décadas de 1990 e 2000, a literatura acadêmica parecia convergir em torno de cinco subconstrutos distintos: relação parte-todo, medida, razão, quociente e operador. Esses subconstrutos forneceram uma estrutura para a análise e classificação do conceito de fração.

Ressalta-se, com base nessa fundamentação, que se optou por considerar a classificação entre esses diferentes subconstrutos como um elemento central de investigação, explorando a relevância e as implicações dessa abordagem na compreensão do conceito de fração.

Destaca-se a intencionalidade de examinar, como a classificação desses subconstrutos pode contribuir para uma compreensão mais clara dos princípios matemáticos subjacentes ao conceito de fração. A nuvem de palavras a seguir demonstra como estes subconstrutos destacados por Nogueira (2020) são os que aparecem com maior frequência nas classificações propostas pelos diferentes pesquisadores.

Figura 5 – Nuvem de palavras dos subconstrutos de frações

Fonte: elaborado pela autora, com base em Nogueira (2020).

Kieren (1980, *apud* Nogueira, 2020) enfatiza a natureza coletiva e interconectada dos subconstrutos relacionados às frações. A coletividade indica que nenhum subconstruto isolado pode proporcionar uma compreensão abrangente dos números racionais, destacando a necessidade de abordá-los de maneira conjunta. Além disso, a conectividade refere-se às relações que esses subconstrutos estabelecem com outros conceitos matemáticos, como a relação entre razão e probabilidade, por exemplo.

A seguir, são apresentados os cinco subconstrutos de frações destacados até aqui, e os quais foram considerados na construção das tarefas para a investigação realizada: relação parte-todo; quociente; medida; operador; razão.

2.2.1.1 Relação parte-todo

Conforme explicitado anteriormente, este significado normalmente é o mais trabalhado em sala de aula. Ele envolve a ideia de partição de um todo em “n” partes iguais, sendo cada parte compreendida como $\frac{1}{n}$. O todo pode ser contínuo ou discreto, sendo que no primeiro caso é apresentado com partes equivalentes em dimensão. Trata-se da representação mais corriqueira de uma fração, como mostrada na figura abaixo:

Figura 9 – Representação de $\frac{1}{5}$ (parte branca)

Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Compara%C3%A7%C3%A3o_de_Fra%C3%A7%C3%B5es_3.png

No caso de grandezas discretas, tem-se um conjunto de elementos que deve ser dividido em quantidades iguais, como representado na figura a seguir.

Figura 10 – Representação de $\frac{1}{5}$ (parte preta)

Fonte: elaborado pela autora.

Geralmente, o procedimento de dupla contagem é suficiente para resolver os exercícios que envolvem a relação parte-todo. Por exemplo, se for considerada a representação $\frac{m}{n}$, onde o inteiro foi dividido em “n” partes iguais, sendo tomadas “m” partes, o “n” é chamado de denominador, por ser a quantidade de partes no qual o inteiro foi dividido que dá nome às frações. Já o “m” é chamado numerador e indica o número de partes tomadas do inteiro.

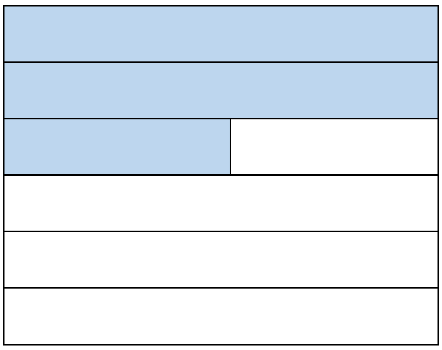
Santana (2012, *apud* Cardoso, 2019) pondera que para resolver problemas envolvendo esse subconstruto os estudantes precisam ter algumas competências prévias, como: saber identificar a unidade; realizar divisões; ter a ideia de conservação.

Graça, Ponte e Guerreiro (2021) também chamam a atenção para a importância da compreensão da unidade, e salientam que quando em uma grandeza discreta o denominador não corresponde ao número de itens do todo, a ação de compreender a unidade torna-se mais complexa.

Embora o subconstruto parte-todo possa ser a base para interpretações mais complexas, o fato de muitas vezes o ensino de frações se limitar a esse significado é alvo de críticas. Nogueira (2020) considera que essa abordagem pode se constituir como um obstáculo quando o inteiro não está dividido em partes iguais, ou no caso das frações impróprias, maiores que um inteiro, pois nestas situações o procedimento de dupla contagem apresenta limitações.

A figura 6 mostra uma representação que não pode ser resolvida com o procedimento de dupla contagem, já que o inteiro não está dividido em partes iguais. Nesse caso, há hipótese de que alguns estudantes podem recorrer à contagem e dizer que a parte pintada representa $\frac{3}{7}$ do retângulo.

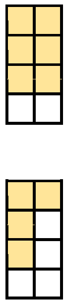
Figura 6 – Representação de $\frac{5}{12}$



Fonte: elaborado pela autora

Ademais, no caso da representação da figura 7, o procedimento de dupla contagem pode levar o estudante a pensar que a figura representa $\frac{10}{16}$ e não $\frac{10}{8}$.

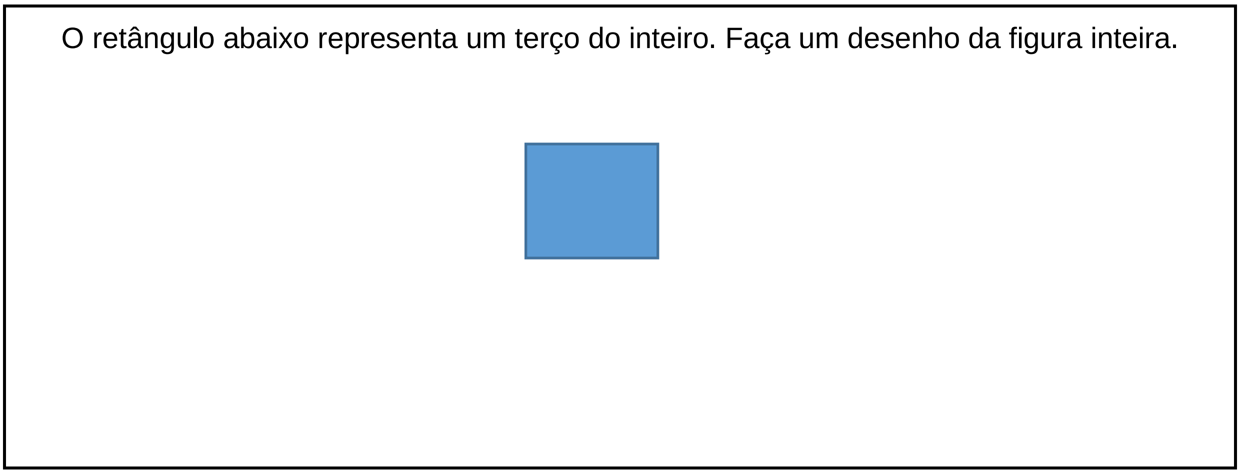
Figura 7 – Representação de $\frac{10}{8}$



Fonte: elaborado pela autora

A incompreensão das frações impróprias também é colocada por Graça, Ponte e Guerreiro (2021) como um obstáculo em uma abordagem solitária da relação parte-todo. Os autores destacam que quando o ensino de frações se limita ao procedimento de sombreamento de partes de figuras geométricas, muitas vezes os estudantes compreendem as frações como dois números inteiros separados. Salientam, ainda, que no subconstruto parte-todo, reconstruir o todo a partir das partes é tão importante quanto encontrar as partes do todo. A figura 8 ilustra essa possibilidade.

Figura 8 – Exemplo de exercício de fração



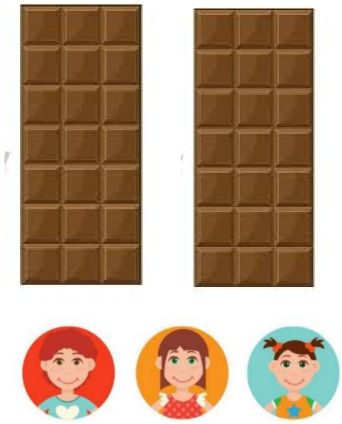
Fonte: elaborado pela autora.

2.2.1.2 Significado quociente

O subconstruto quociente está relacionado com o significado parte-todo, já que também está ligado à ideia de partilha e divisão. Nesse caso, tem-se uma divisão e seu resultado. O numerador representa o dividendo, enquanto o denominador representa o divisor.

Como exemplo, pode-se pensar em uma situação na qual seja preciso dividir duas barras de chocolate para três estudantes. Cada uma receberia $\frac{2}{3}$ de uma barra de chocolate.

Figura 9 – Representação de fração como quociente



Fonte das imagens: https://vectorportal.com/

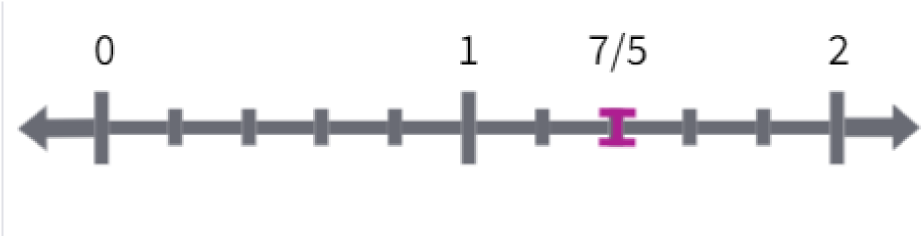
2.2.1.3 Significado medida

Como o significado anterior, este também está ligado à relação parte-todo. Nesse subconstruto tem-se a comparação de duas grandezas de mesma natureza, sendo que uma é tomada como unidade de medida. Por exemplo, pode-se pensar em representações de reta numerada e o trabalho com unidades de medida (metro, centímetro, decímetro).

Graça, Ponte e Guerreiro (2021) salientam que esse é um significado que apresenta maior dificuldade e que recebe pouca ênfase no ensino de frações. Para Nogueira (2020), o aprendizado desse subconstruto passa por três fases: escolha da unidade de medida; comparação do objeto que será medido com a unidade escolhida; apresentação do resultado dessa comparação em um valor.

Nogueira ressalta que o trabalho com o significado medida pode ser especialmente oportuno para frações maiores que um inteiro. Conforme visto anteriormente, as frações impróprias podem se constituir como um obstáculo quando o ensino se limita ao significado parte todo. Nesse caso, apresentar situações com a reta numérica pode ser de grande proveito.

Figura 10 – Exemplo de reta numérica maior que um inteiro



Fonte: elaborado pela autora.

2.2.1.4 Significado operador

Este significado difere dos anteriores, tendo em vista que não está relacionado à ideia de partilha, de divisão. O subconstruto operador envolve transformação, e atua sobre uma situação e a modifica. Nesse caso, a fração imprime uma ação sobre um número, transformando o seu valor. Assim, a expressão $\frac{m}{n}$ tem a finalidade de ampliar ou reduzir um determinado conjunto.

Veja o exemplo a seguir: como pensar em $\frac{3}{4}$ de 12 pirulitos? Nesse caso, descobrir o novo valor envolve, por exemplo, dividir 12 por 4 e, em seguida, multiplicar por 3, chegando a uma nova quantidade: 9.

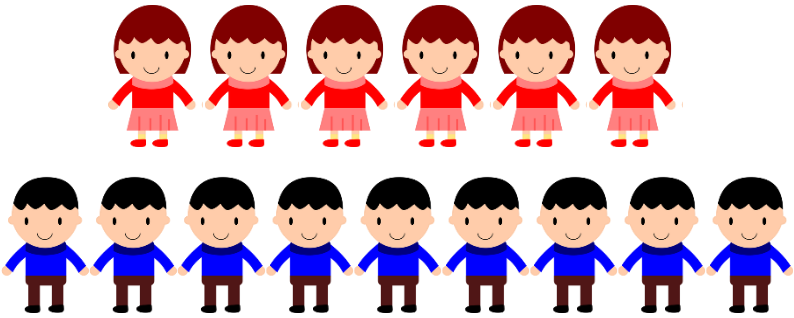
Graça, Ponte e Guerreiro (2021) salientam ser possível interpretar um multiplicador fracionário de diferentes formas. Tomando como exemplo para um operador multiplicativo $\frac{3}{4}$, pode-se pensar em $3 \times \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{4} \times 3$.

2.2.1.5 Significado razão

Sendo apontado como um dos mais complexos significados das frações, o subconstruto razão traz a ideia de comparação. Nesse caso, temos $\frac{m}{n}$ representando o quanto que “m está para n”, onde “m” é denominado antecedente e “n” consequente. Silva (2005, *apud* Nogueira, 2020) destaca que esse subconstruto pode aparecer em três diferentes contextos: parte-parte; todo-todo; parte-todo.

Como exemplo, pode-se pensar em uma sala na qual se tem 2 meninas a cada 3 meninos. A representação fracionária numérica seria $\frac{2}{3}$, significando “dois para três”.

Figura 11 – Representação fracionária de “dois para três”



Fonte da imagem: publicdomainvectors.org

Pode-se, ainda, estabelecer relações entre este significado e porcentagem, chance e probabilidade.

Figura 12 – Fração como representação de chance

A chance de sair o número quatro em um dado com seis faces é de um para seis, $\frac{1}{6}$.

Elaborado pela autora. Fonte da imagem: pexels.com

CAPÍTULO 3
PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS E CENÁRIO DA PESQUISA

Ao elaborar as questões de pesquisa, busca-se esclarecer o estudo por meio da análise das ações dos participantes envolvidos e das perspectivas teóricas adotadas para essa análise. Com essa característica fundamental, pode-se inferir que cabe ao pesquisador estabelecer um referencial que dê sustentação à estrutura metodológica do estudo e, a partir desse fundamento, definir as estratégias e procedimentos metodológicos que conduzirão a implementação das diversas fases da pesquisa.

Seguindo essa abordagem, o presente capítulo oferece uma descrição dos aspectos relacionados à metodologia escolhida e aos procedimentos metodológicos delineados para a investigação. Além do mais, a fim de proporcionar ao leitor uma visão do ambiente de pesquisa, apresenta-se também uma descrição do cenário em que o estudo ocorreu.

3.1 Caracterização da pesquisa

A pesquisa foi realizada em uma escola particular do município de São Paulo, na qual a professora-pesquisadora estava inserida em seu contexto natural, a sala de aula, ministrando suas aulas para uma turma do quinto ano do Ensino Fundamental. Dessa maneira, ela envolveu-se diretamente com a situação estudada, coletando dados descritivos que destacaram tanto o processo quanto o produto final.

A pesquisa em questão possui um caráter qualitativo e, em consonância com as premissas de Creswell (2014), manifesta-se como um conjunto de práticas destinadas a transformar o mundo visível em dados representativos. Este processo abrange a utilização de notas, observações, gravações em áudio e/ou vídeo, registros e lembretes, uma vez que, na pesquisa qualitativa, o objetivo é compreender um fenômeno em seu contexto natural.

Dessa maneira, pode-se considerar que uma pesquisa de natureza qualitativa parte do pressuposto de que a atribuição de significado a um fenômeno possui maior importância do que sua mensuração quantitativa. Além disso, seu escopo se limita à explanação do fenômeno ou do contexto específico em que a pesquisa é conduzida, não permitindo a generalização dos resultados para uma população ou para contextos diversos.

Considerando que esse caráter qualitativo possui múltiplos usos e significados que foram se modificando ao longo da história (Sandín Esteban, 2010), julga-se relevante especificar a concepção adotada que orientou o desenvolvimento da pesquisa realizada. Nesse sentido, salienta-se a afirmativa dessa autora, quando evidencia que

> a pesquisa qualitativa é uma atividade sistemática orientada à compreensão em profundidade de fenômenos educativos e sociais, à transformação de práticas e cenários socioeducativos, à tomada de decisões e também ao descobrimento e desenvolvimento de um corpo organizado de conhecimentos (Sandín Esteban, 2010, p. 127).

Essa afirmação reforça a nossa visão de que a abordagem qualitativa de pesquisa é mais adequada para atender aos objetivos da investigação assumida, uma vez que os seguintes pressupostos foram cumpridos: (i) a pesquisa foi realizada em ambiente natural; (ii) a professora-pesquisadora foi considerada um instrumento-chave na coleta e produção de dados; (iii) envolveu o uso de múltiplos métodos e um raciocínio que transita entre o dedutivo e o indutivo; (iv) focou na perspectiva dos participantes; (v) está situada dentro do contexto dos participantes.

Diante das especificidades inerentes aos diversos enfoques da pesquisa qualitativa, torna-se relevante apresentar o tipo de pesquisa adotado na investigação. Assim, com base nos interesses e objetivos da pesquisa, sublinha-se a escolha pela pesquisa do tipo Intervenção Pedagógica como aquela que melhor se alinhou com as metas estabelecidas. Especificamente, para justificar sua pertinência e reconhecê-la como pesquisa, enfatiza-se seu caráter aplicado.

3.2 Pesquisa Intervenção Pedagógica

As pesquisas do tipo Intervenção Pedagógica são essencialmente orientadas para a aplicação, visando resolver questões práticas. Nesse tipo de pesquisa, é de responsabilidade do pesquisador identificar o problema a ser abordado e tomar a iniciativa de definir estratégias para resolvê-lo.

Conforme destacado por Gil (2010), um aspecto distintivo da pesquisa de Intervenção Pedagógica é sua ênfase nos benefícios práticos resultantes dela, indo além do simples acréscimo de conhecimento que pode ser derivado da investigação. Portanto, é imperativo haver um cuidado especial na elaboração das análises e dos relatórios resultantes da pesquisa, de modo que o leitor consiga identificar claramente as características investigativas e o rigor com que a pesquisa foi conduzida.

Destaca-se, ainda, que Robson (1995), ao discorrer sobre esse tipo de pesquisa, enfatiza sua potência para subsidiar tomadas de decisões acerca de mudanças em práticas educacionais, promover melhorias em sistemas de ensino já existentes, ou avaliar inovações. É por meio de pesquisas dessa natureza, segundo esse autor, que a produção acadêmica pode produzir o desejado impacto nas práticas educacionais.

Ao analisar as assertivas desses autores, destaca-se que o mestrado profissional apresenta características específicas, as quais estão intimamente relacionadas à condução de uma pesquisa desse tipo. Entre essas características, destaca-se a necessidade de que o objeto de pesquisa esteja intrinsecamente ligado à atividade profissional do pesquisador, isto é, a questão norteadora da investigação deve surgir diretamente de sua própria prática.

Nesse contexto, é importante observar que essa característica se configurou como um elemento motivador e de interesse da professora-pesquisadora, pois a pesquisa está diretamente vinculada à sua prática, sendo significativa e refletindo em sua atuação profissional. No entanto, como bem salienta Gil (2010), essa característica também exigiu um olhar particular para o desenvolvimento da pesquisa, haja vista a necessária ênfase quanto à metodologia e ao rigor científico adotados, a partir de um distanciamento e procedimentos adequados para compreensão e análise, uma vez que a professora-pesquisadora esteve sempre envolvida em seu contexto.

Enfatiza-se, assim, que partir da prática se configura como um fator determinante a ser destacado na investigação realizada, pois ela foi construído *na* e *a partir* da realidade situacional, social, educacional e prática da professora-pesquisadora, considerando suas preocupações, seus problemas, suas dificuldades e demais contextos que as afetam e fazem parte de sua experiência cotidiana, focando, então, no cerne de sua prática pedagógica, incluindo a compreensão e sistematização da própria prática com o intuito de transformá-la, a partir da elaboração e do desenvolvimento de trajetórias hipotéticas de aprendizagem, visando, ainda, apresentar à comunidade formulações que possam representar avanços diante dos desafios enfrentados.

Considera-se que o vivenciar e refletir sobre o processo formativo, estimulado pelas ações da pesquisa, contribuíram para o crescimento e maior conscientização da professora-pesquisadora, particularmente ao observar como as discussões teóricas ampliaram seu corpo de conhecimento no campo da formação docente.

3.3 Contexto da pesquisa

A pesquisa foi realizada em uma escola particular, localizada no bairro de Moema, na cidade de São Paulo. Essa escola tem cerca de quatro mil estudantes, da Educação Infantil ao Ensino Médio, e quase mil funcionários em seu quadro de colaboradores. Trata-se de uma escola que apresenta alto índice de aprovação em vestibulares, sendo reconhecida por sua excelência acadêmica e trabalho com metodologias ativas.

Em termos de estrutura física, conta com salas de aulas, quadras poliesportivas, laboratório de ciências, ateliês de artes, auditório, pátios, refeitório, cantina, entre outras instalações. As salas de aula dos quintos anos possuem ar-condicionado, dois computadores, lousa branca e projetor multimídia. É possível, também, solicitar *Chromebooks* e *Ipads* para os estudantes, além de jogos e outros materiais concretos, quando necessário.

Em relação a aspectos pedagógicos, no ano de 2022, ano de desenvolvimento da pesquisa, destaca-se que até o terceiro ano as professoras eram polivalentes. Nos quartos e quintos anos as turmas passavam a ter duas professoras: uma ministrava as aulas de Matemática, Ciências e Jogos; a outra, Português, Filosofia, História e Geografia. Apesar dessa divisão por áreas, as professoras responsáveis pela disciplina de Matemática no quinto ano eram todas graduadas em Pedagogia.

Já em relação às turmas, havia sete turmas de quinto ano, cada uma com 28 ou 29 estudantes, totalizando em torno de 201 estudantes. Esse ano escolar contava com quatro professores responsáveis pela disciplina de Matemática, sendo três responsáveis por ministrar aulas em duas turmas, e a professora-pesquisadora[5] responsável por uma turma. Além disso, a equipe do quinto ano contava com onze assistentes, entre estagiários e profissionais com graduação em pedagogia, duas coordenadoras pedagógicas e duas assistentes de coordenação.

---

[5] Quando não se fizer necessário utilizar-se de uma narrativa em tom pessoal, será utilizado o termo professora-pesquisadora para nos referirmos à professora que desenvolveu esta pesquisa no âmbito do Mestrado Profissional.

O planejamento das aulas de Matemática era realizado por duas professoras, sendo a professora-pesquisadora responsável pela frente de números e operações. As coordenadoras pedagógicas contribuíram com o planejamento, e o coordenador de área, licenciado em Matemática, supervisionava e orientava o planejamento das aulas dos primeiros aos quintos anos, e sua colaboração foi constante durante a elaboração das tarefas que compuseram a THA desenvolvida.

A escola não adotava livro didático, sendo todo o material produzido pelos próprios professores, mas havia um material didático, denominado "Caderno de Problemas", que contava com mais de 70 problemas e geralmente era utilizado pelos professores, e o restante do material era composto por fichas impressas e materiais de apoio produzidos em slides projetados nas aulas e disponibilizados aos estudantes.

Os gestores da escola foram muito receptivos à realização da pesquisa na escola, e além de autorizarem sua realização, apoiaram todo o processo, fornecendo todo o suporte necessário. Ressalta-se, também, que os outros professores de Matemática do quinto ano também demonstraram interesse na proposta.

Assim, as tarefas planejadas pela professora-pesquisadora foram adotadas pelos demais professores, e então desenvolvidas nas sete turmas de quinto ano, pelos quatro professores que estavam ensinando Matemática naquele ano. A turma da professora-pesquisadora tinha 29 estudantes, entre 9 e 11 anos, e as aulas eram ministradas no período matutino.

3.4 Trajetória Hipotética de Aprendizagem

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), concebida por Martin Simon em 1995, constitui uma abordagem dentro do campo da Educação Matemática. A ideia central da THA integra seu modelo para o ensino de Matemática, que se fundamenta na reelaboração de práticas construtivistas para a constituição de conceitos. Ela descreve os trajetos que os estudantes seguem enquanto constroem seu conhecimento, percorrendo essencialmente dois caminhos:

- ➢ o primeiro, em que o professor tem dificuldade de identificar os mecanismos de aprendizagens dos estudantes;

➢ o segundo, sobre os aspectos nos quais a aprendizagem é adquirida em processos de ressignificação pelos estudantes.

Simon (1995) ressalta que numa THA os objetivos necessitam estar claros e declarados aos estudantes, pois, assim, será possível definir quais conceitos deverão ser apreendidos. Para esse autor, a partir da definição dos objetivos, estabelece-se uma sequência de aprendizagens pela qual os estudantes deverão ser desafiados e ser capazes de novas formulações.

Uma THA é constituída tanto pelos objetivos para a aprendizagem quanto pelas tarefas matemáticas que serão utilizadas para promover a aprendizagem dos estudantes (Simon, 1995). Ademais, no trabalho produzido por Simon e Tzur (2004), os autores ressaltam a compreensão de tarefas como elemento central no processo de construção de um novo conceito na perspectiva da reflexão sobre a atividade-efeito, a qual é realizada numa THA.

As discussões propostas por esses autores vão ao encontro de nosso interesse de investigação, uma vez que temos como hipótese que um dos grandes desafios das professoras[6] que ensinam matemática nos anos iniciais seja definir as estratégias de ensino e preparar/selecionar/adaptar as tarefas que sejam adequadas para o desenvolvimento e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Salienta-se que para traçar este percurso, foi escolhido o desenvolvimento de um trabalho que considerasse a construção de uma THA, a partir dos estudos de Simon (1995, 2009, 2013), Simon e Tzur (2004), bem como as reflexões de Pires (2009). Pires (2009), em especial, pondera haver um certo desconforto com relação à discussão de currículo na perspectiva construtivista, e nesse sentido as contribuições de Simon (1995, 2013) são muito relevantes. Ela ainda nos lembra que o construtivismo é uma teoria epistemológica e, portanto, não define estratégias de ensino, e destaca que

> […] a construção cognitiva, de natureza essencialmente humana, e a processual, emergente dos temas, regularidades e normas entrecruzando Matemática e interação social — para trazer a cognição e social juntos — não podem ser construídos *com simples sumários prescritivos de ensino.* Assim, não há referência a respeito da operacionalização de uma perspectiva construtivista social, sem contradizê-la. Comumente é usada a denominação ‘ensino construtivista’. No entanto, o construtivismo não oferece uma noção de como resolver os problemas de ensino ou de como efetivá-lo (Bauerfied, *apud* Pires, 2009, p. 153).

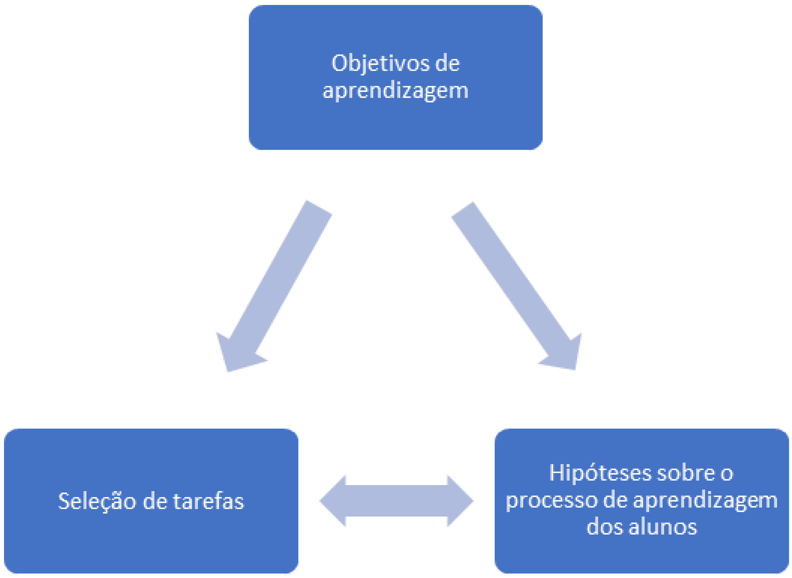
---

[6] Utilizaremos o termo professora ou professoras para nos referirmos os profissionais que ensinam matemática nos anos iniciais, tendo em vista que em sua maioria esses profissionais são mulheres.

Dessa forma, há um grande desafio em pensar sobre como o construtivismo pode contribuir para o desenvolvimento do ensino-aprendizagem de Matemática. Essa é uma das questões que se constitui como central para Simon (1995), que propõe uma pedagogia da Matemática, na qual se articulam o trabalho do professor, o currículo e o desenvolvimento de materiais de ensino.

Nesse contexto é que se insere a construção de uma THA, e de acordo com Simon e Tzur (2004), ela consiste em três componentes: (a) um objetivo de aprendizagem, (b) um conjunto de tarefas matemáticas e (c) um processo de aprendizagem hipotetizado. Embora a especificação do objetivo de aprendizagem preceda geralmente a especificação das tarefas e do processo de aprendizagem hipotetizado, ressalta-se que esses dois últimos componentes estão necessariamente interligados. O processo de aprendizagem é, pelo menos parcialmente, determinado pelas tarefas usadas, e estas devem refletir conjecturas sobre possíveis processos de aprendizagem, como pode ser observado pelo esquema a seguir:

Figura 13 - Relação entre objetivos, tarefas e hipóteses na THA



Fonte: Elaborado pela autora com base em Pires (2009)

Simon e Tzur (2004) afirmam que as tarefas matemáticas têm um papel preponderante no processo de aprendizagem. Portanto, a seleção dessas tarefas desse ser realizada de forma muito cuidadosa, sendo orientada pelos objetivos de aprendizagem e pelas hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos estudantes.

Aqui, deve-se ressaltar que Simon (1995) utiliza a noção de hipótese no sentido de não ser possível acessar diretamente os conhecimentos dos estudantes, e por essa razão não conseguirmos prever com exatidão o percurso de aprendizagem. Desta forma, ele considera que as antecipações sobre processo de aprendizagem dos estudantes são hipotéticas, e por isso a trajetória é hipotética, sendo modificada e ajustada conforme o desenvolvimento do trabalho.

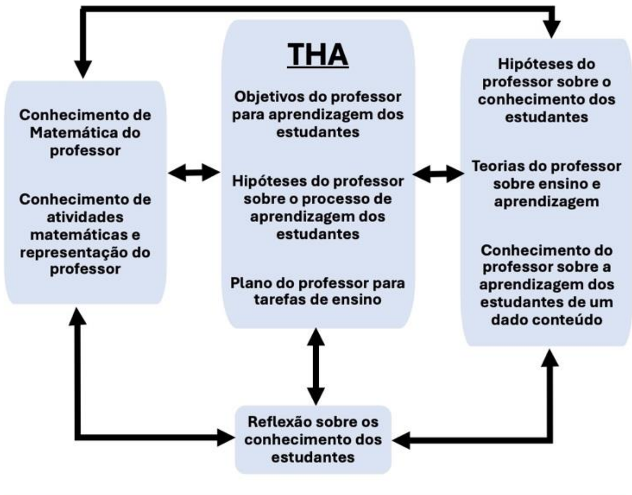
Pires (2009) destaca, ainda, outros conhecimentos que influenciam o professor na construção de uma THA, como:

> teorias de ensino sobre Matemática; representações matemáticas; materiais didáticos e atividades; e teorias sobre como alunos constroem conhecimentos sobre um dado assunto – saberes estes derivados da pesquisa em literatura e/ou da própria experiência docente (2009, p. 154).

Desta maneira, esses elementos influenciam o professor na construção de uma THA, tendo em vista que são norteadores no processo de elaboração das hipóteses sobre o processo e objetivos de aprendizagem, bem como do percurso a ser trilhado pelos estudantes.

De acordo com Simon (1995), os elementos de construção da THA, os quais foram apresentados, compõem o denominado "Ciclo de Ensino de Matemática", e que representa as inter-relações cíclicas que ocorrem entre o conhecimento do professor, a avaliação do conhecimento dos estudantes, a realização das tarefas e a THA, como mostra a figura a seguir.

Figura 14 – Ciclo de Ensino de Matemática



Ciclo de Ensino da Matemática, THA – Adaptado (SIMON, 1995, p, 56).

A THA, sendo desenvolvida ao longo do processo representado pelo Ciclo de Ensino, está sujeita a modificações desde o seu início até o seu completo desenvolvimento. Nesse contexto, a palavra "trajetória", conforme proposta por Simon (1995), pode ser comparada a uma jornada planejada. Durante essa jornada, podem ocorrer pequenos ajustes devido às diferentes condições e situações encontradas, mas esses ajustes não comprometem a capacidade de adquirir novos conhecimentos. O caminho efetivamente percorrido é a trajetória, e o caminho previamente planejado é a trajetória hipotética.

Portanto, o papel do professor é ajustar essa trajetória, considerando a evolução e o progresso alcançados. Isso envolve mediar o processo de aprendizagem e avaliar constantemente os desafios que os estudantes enfrentam nas tarefas, visando aprimorá-las. Uma vez que os estudantes podem reagir de maneiras distintas ao desenvolvimento das tarefas, dependendo de suas experiências matemáticas individuais, é necessário adaptar as tarefas sempre que algum conceito não for compreendido, uma vez que elas não atingiram plenamente seus objetivos.

Ressalta-se, aqui, que se o processo acabasse na escolha das tarefas matemáticas, o professor não consideraria o fazer matemático dos estudantes. O professor deve fazer ajustes constantes, a partir da sua observação do fazer matemático dos estudantes, pois pode haver a necessidade de modificar, acrescentar ou eliminar tarefas previamente elaboradas, e não apenas no planejamento entre as aulas, mas muitas vezes no decorrer de uma aula. Esses ajustes garantem que o processo dos estudantes está sendo respeitado e considerado no percurso.

A THA oferece oportunidades para uma reflexão contínua sobre a construção do conhecimento e pode ser uma valiosa contribuição para o processo de ensino e aprendizagem, especialmente quando desenvolvida de forma inovadora nas escolas de ensino básico. Isso se deve ao fato que sua construção oferece uma estrutura para pensar nessa ação. Considerando os objetivos e as hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos estudantes, essa ação passa a ser muito mais efetiva.

Simon e Tzur (2004) destacam, ainda, que a construção de uma THA não é sempre indicada, ou seja, não há necessidade de elaborar uma THA para todos os conceitos a serem trabalhados, haja vista se tratar de uma ação complexa. Os autores ponderam que a construção de uma THA deve ser pensada para conceitos que a aprendizagem geralmente é problemática e, justamente nesse sentido, e considerando as discussões propostas na introdução e no capítulo de revisão da literatura, foi possível observar que diversas pesquisas indicam o ensino de frações como um grande desafio aos professores, e essa é uma das razões pela qual entendemos que a elaboração de uma THA para nossa pesquisa é plenamente justificável.

Para Simon (1995), a construção de uma THA oferece aos professores a perspectiva de construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores inferências sobre como o conhecimento poderia ser processado. Diante das discussões apresentadas, é possível identificar as possibilidades de se ampliar os estudos referentes ao tema da presente pesquisa e, ainda, considerar que esses estudos possibilitam uma melhor compreensão do uso da THA nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

3.5 Instrumentos para a produção de dados

Os dados da pesquisa foram produzidos a partir da elaboração das trajetórias hipotéticas de aprendizagem pela professora-pesquisadora, iniciando-se em maio de 2022, até seu completo desenvolvimento com os estudantes, que ocorreu entre setembro e dezembro de 2022.

A estrutura para a produção desses dados configura-se pela triangulação, que para Araújo e Borba

> consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para a obtenção dos dados. Os principais tipos de triangulação são a de fontes e a de métodos. Quando checamos, por exemplo, as informações obtidas em uma entrevista com as atas de uma reunião sobre um mesmo assunto, estamos fazendo uma triangulação de fontes. Por outro lado, se observarmos o trabalho de um grupo de alunos e depois entrevistarmos seus componentes sobre o trabalho desenvolvido, realizamos uma triangulação de métodos. Fazendo assim, o pesquisador, ao invés de construir suas conclusões a partir de observações, pode utilizar as entrevistas para checar algum detalhe ou para compreender melhor algum fato ocorrido durante as observações, promovendo uma maior credibilidade de sua pesquisa (Araújo; Borba, 2004, p. 35-36).

Esses autores legitimam as escolhas metodológicas para a investigação, e justificam a importância da escolha de diferentes instrumentos e estratégias para a produção de dados, os quais são descritos a seguir.

3.5.1 O Uso do Caderno de Anotações

O ato de registrar as observações por meio do uso de um caderno de anotações se apresenta como um conjunto de notas detalhadas, as quais representam os dados primários das observações realizadas (Vianna, 2003). Portanto, o caderno de anotações se configurou como um importante instrumento para a professora-pesquisadora. Por meio dele, foi possível descrever os momentos de interação com o coordenador de Matemática, com as demais professoras que também desenvolveram as tarefas com suas turmas, e as interações ocorridas durante a elaboração e o desenvolvimento da THA.

Com o intuito de que as anotações fossem completas e fidedignas, a professora-pesquisadora registrava as aulas diariamente. Alguns diálogos e observações eram anotados em um bloco de notas, que servia como material de consulta para o registro posterior no caderno.

Ao iniciar cada aula, procedia-se ao registro da data, horário, local, quantidade de estudantes presentes e número da aula. Utilizando uma cor específica de caneta, eram feitas as anotações objetivas, abrangendo descrições da aula, diálogos, perguntas, falas dos estudantes e interações. Em outra cor, eram realizadas as anotações subjetivas, contemplando impressões, percepções, dúvidas e reflexões pessoais.

Apesar dos cuidados no registro no caderno de anotações, é importante ressaltar que, devido à posição da pesquisadora como professora da turma, houve limitações inerentes ao uso desse instrumento, pois a condução das tarefas durante a aula pela professora-pesquisadora tornava inviável realizar todas as anotações no momento. Além disso, a capacidade de acompanhar apenas alguns estudantes em cada instante também impunha restrições.

Mesmo com esforços para mitigar essas limitações, reconhece-se que os registros não conseguiram abranger todos os diálogos e interações ocorridos na sala de aula. Assim, os dados produzidos foram submetidos à análise com o objetivo de identificar e descrever os diversos tipos de interação e ações relevantes para as inferências e conclusões relacionadas às situações experimentadas ao longo do processo de elaboração e desenvolvimento da THA.

3.5.2 O Uso do Recurso de Gravações

De acordo com Clement (2000), o uso da gravação pode ser considerado uma contribuição valiosa para a observação, por registrar comportamentos e interações complexas, ao mesmo tempo, em que possibilita que o pesquisador reveja os dados de forma contínua.

Essas concepções encontram respaldo nos estudos de Powell, Francisco e Maher (2004), que destacam a ampla utilização da gravação em vídeo como uma ferramenta de pesquisa, especialmente na área da Educação Matemática, onde ela se revela como um instrumento crucial para a produção de dados, ao conseguir capturar e registrar cada momento da produção de informações.

As gravações foram usadas nas primeiras aulas. Foi utilizada a câmera do celular para a captação de vídeo e áudio. Registramos algumas discussões de grupo e momentos de plenária. Nessas ocasiões, após a anotação no caderno, assistíamos à gravação e acrescentávamos as informações que eram necessárias. Não foi realizada a transcrição integral das gravações e estas foram utilizadas como um recurso para o registro no caderno.

No entanto, apesar das gravações contribuírem para a triangulação dos dados, avaliamos que os estudantes ficavam inibidos quando viam estarem sendo gravados. Notamos também que algumas crianças, ao perceberem a gravação, alteravam seus argumentos, tentando falar de uma maneira mais formal. Algumas ficavam com medo de dizer algo errado e simplesmente não participavam da discussão.

Portanto, após percebermos essa questão, conforme o proposto no TALE e TCLE, suspendemos as gravações. Entendemos que poderíamos ter mais registros de diálogos, porém avaliamos que não seria proveitoso, visto inibir a participação de alguns estudantes.

3.5.3 O Uso de Protocolos de Pesquisa

O uso de protocolos produzidos pelos estudantes se configurou como um instrumento de produção de dados muito valioso e útil. Esses protocolos caracterizam as resoluções e anotações realizadas pelos estudantes durante o desenvolvimento da THA, e possibilitaram o levantamento de diferentes tipos de dados, como:

- ➢ A perspectiva dos estudantes: os protocolos possibilitaram que os estudantes expressassem suas próprias perspectivas, percepções e experiências durante o desenvolvimento da THA.

- ➢ A participação ativa dos estudantes: o preenchimento dos protocolos envolveu os estudantes na pesquisa, tornando-os participantes ativos no processo de produção de dados.

- ➢ Variedade de dados: os protocolos possibilitaram identificar uma variedade de informações, como o uso de desenhos, de representações, de esquemas e outros registros utilizados pelos estudantes para responder às tarefas. Ao longo das aulas, a professora-pesquisadora tirava fotos das atividades realizadas pelos estudantes, organizando os arquivos em uma pasta no

Google Drive. Para cada tarefa foi criada uma pasta e nela foram inseridos os registros daquela aula. No final do ano letivo, a professora-pesquisadora pediu aos estudantes que deixassem com ela o caderno de matemática e o caderno de problemas. Dos 23 participantes da pesquisa, 18 deixaram os materiais. Essa solicitação visava garantir uma maior diversidade de registros para a pesquisa.

Durante a escrita da descrição das aulas, foram selecionados protocolos representativos de cada tarefa para ilustrar as estratégias de resolução, diferentes raciocínios e formas de registro. A análise dos protocolos também foi realizada ao longo do desenvolvimento da THA. Os protocolos permitiam avaliar a aula, se os objetivos de aprendizagem estavam sendo atingidos e, consequentemente, direcionavam o ajuste na trajetória. Além disso, os protocolos permitiram visualizar a evolução no registro e pensamento matemático dos estudantes, individual e coletivamente.

3.6 Questões éticas: o Comitê de Ética em Pesquisas

A pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (CEP-IFSP), por meio do CAAE número 58745122.1.0000.5473, e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) também foram submetidos e aprovados.

Na escola, antes da pesquisa ser iniciada, a direção enviou por e-mail uma carta para as famílias, explicando a proposta da pesquisa, bem como os termos de consentimento. Em sala de aula, foram realizadas conversas com os estudantes, e assim foi possível tirar as dúvidas e entregar os termos impressos para as devidas assinaturas. Dos 29 estudantes, 23 trouxeram as autorizações para participarem, sendo estes os participantes cujos dados são utilizados para discussões e análises.

Considerando a importância de se proteger a identidade dos estudantes participantes da pesquisa, haja vista este ser um princípio ético fundamental na pesquisa, todos foram nomeados com pseudônimos.

CAPÍTULO 4
POTENCIALIDADES E DESAFIOS ENFRENTADOS NA ELABORAÇÃO E NO DESENVOLVIMENTO DA THA

Neste capítulo, abordo[7] as análises referentes às potencialidades e desafios enfrentados durante a elaboração da THA, assim como examino os componentes do "Ciclo de Ensino da Matemática", conforme proposto por Simon (1995), além de compartilhar minhas reflexões sobre cada um desses elementos. Apresento, ainda, extratos das descrições das aulas, das tarefas e das atividades dos estudantes. Para uma compreensão abrangente da THA elaborada, recomendo a leitura dos Apêndices A e B, onde estão disponíveis a descrição e o planejamento completos.

4.1 Objetivos da professora-pesquisadora para aprendizagem dos estudantes

Compreendo que os meus objetivos para a aprendizagem dos estudantes se configuraram como componentes primordiais para a elaboração da THA, assim como é sublinhado por Simon (1995), e esses objetivos condicionaram as minhas hipóteses de aprendizagem e as tarefas elaboradas. Dessa forma, destaco que o primeiro passo para a construção da THA foi a clara definição dos objetivos, os quais foram delineados a partir de uma análise documental, utilizando como referência a BNCC, os PCNs e o currículo escolar.

Destaco que um desafio significativo na escolha dos objetivos de aprendizagem residiu na necessidade de torná-los verificáveis, e isso implicou definir objetivos que poderiam ser posteriormente avaliados por mim. Outro desafio posto se referiu à quantidade de objetivos que precisavam ser estabelecidos, pois, em algumas situações, existe uma tendência de selecionar muitos objetivos, na esperança de que isso conduza a uma compreensão mais abrangente por parte dos estudantes. Contudo, ao definir uma quantidade excessiva de objetivos, corre-se o risco de abordar os conceitos de maneira superficial, na tentativa de abranger uma grande variedade de metas.

[7] Neste capítulo é utilizado uma narrativa em tom pessoal, na primeira pessoa do singular, uma vez que retrata o meu papel de professora-pesquisadora da turma. Isso visa uma abordagem pessoal e reflexiva, refletindo minha perspectiva e envolvimento direto com o tema abordado.

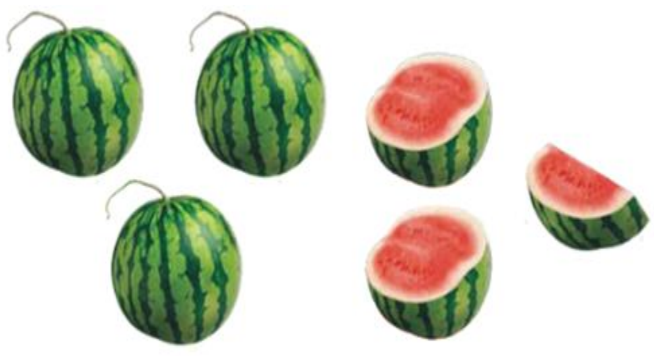
Destaco, portanto, que ao desenvolver a THA para o ensino e aprendizagem de conceitos iniciais de frações, estabeleci os seguintes objetivos:

- Identificar a necessidade da ampliação do conhecimento numérico para resolver novos problemas.
- Reconhecer números racionais na forma fracionária no contexto diário.
- Comunicar-se utilizando linguagem matemática.
- Compreender a ideia de fração em diferentes significados: parte-todo, quociente e razão.
- Resolver situações-problema que envolvam os diferentes significados das frações: parte-todo, quociente e razão.

Pode-se observar que esses são objetivos preliminares, associados à primeira compreensão de frações. O primeiro objetivo diz respeito à importância das frações na resolução de novos problemas, o qual é bem ilustrado pelo primeiro problema proposto aos estudantes, o qual é apresentado na figura a seguir:

Figura 15 – O problema das melancias

Henrique trabalha em uma barraca que vende frutas na feira. Sábado, quando estava desmontando a barraca e guardando as mercadorias que sobraram, Márcia, a dona da banca, ligou para ele, pois estava comprando mais frutas para serem vendidas no dia seguinte. Márcia perguntou quantas melancias haviam sobrado após as vendas do dia. Como a banca vende melancias inteiras, mas também em pedaços, Henrique ficou na dúvida de como poderia responder à pergunta de Márcia. A câmera de seu celular estava quebrada, por isso não era possível enviar uma foto. Como ele poderia responder à Márcia quantas melancias restaram, considerando a imagem a seguir?



Fonte: adaptado de Bertoni, 2009.

Para a resolução do problema das melancias, os estudantes se depararam com o seguinte questionamento: qual número representa um pedaço de melancia que é menor que um inteiro? Sendo assim, as discussões das primeiras aulas mostraram o esforço dos estudantes para nomear esses pedaços. A seguir, reproduzo um trecho da descrição da aula:

Carlos argumentou serem quatro melancias e um quarto, já que duas metades formavam uma melancia inteira. Os outros três integrantes deste grupo disseram serem três melancias, duas metades e um quarto, pois a melancia havia sido partida. Em seguida, perguntei se fazia diferença, ou se as duas respostas poderiam estar corretas, e todos os estudantes concordaram que as duas respostas eram válidas e anotaram as duas formas.

Com a intencionalidade de provocar um novo diálogo entre eles, questionei-os sobre como eles sabiam que aquele pedaço menor era chamado de “um quarto”. Assim, obtive como resposta de dois estudantes um desenho de uma cama para o pedaço de melancia, para fazer uma piada em referência ao termo “quarto”. Então, Eduardo começou a desenhar um semicírculo e disse:

> *“Eu sei, porque se você pegar a metade e dividir…”.*
>
> Vinícius interrompe: *“Precisa de quatro pedaços desse aí para formar uma melancia inteira”.*
>
> Eduardo concorda: *“Isso, são quatro pedaços, dividiu em quatro”.*

Os estudantes se depararam com o desafio de elaborar uma resposta para exprimir a quantidade de melancia representada pela foto. Nesse caso, precisaram acionar seus conhecimentos prévios a respeito de frações, e as discussões no grupo foram uma etapa fundamental para que conseguissem avançar na compreensão do problema.

É interessante notar que, apesar de não terem conhecimentos formais a respeito de frações, já possuíam um bom repertório sobre esse conteúdo. A ideia de metade, por exemplo, era conhecida por todos, bem como a noção de que são necessárias duas metades para formar um inteiro. Muitos estudantes conheciam a palavra “um quarto”, embora nem sempre soubessem explicar como sabiam. O grupo que respondeu “4 melancias e um terço” provavelmente escolheu essa resposta por já ter ouvido a palavra “terço” em um contexto de relação parte-todo.

De forma particular, o comentário de Vinícius revela um aspecto fundamental para a aprendizagem de frações, quando ele fala: *"É um quarto porque precisa de quatro pedaços para formar uma melancia inteira!"*. Bertoni (2009, p.36) considera que a cada nova fração surgida em uma situação deve-se insistir em perguntar "quantos daqueles precisamos para voltar a ter a coisa toda (formação do todo)". Para a autora, essa compreensão, de quantas frações iguais à certa fração dada são necessárias para fazer o todo, será útil ao longo de toda aprendizagem com frações" (Bertoni, 2009. p. 36).

Na resolução desse problema, considero importante destacar que não houve necessidade de que eu ressaltasse esse aspecto, pois quando perguntei ao grupo sobre porque aquele pedaço se chamava "um quarto", os próprios estudantes revelaram essa compreensão. Depois, essa percepção foi compartilhada com a turma no momento da plenária.

A escolha desse problema está articulada com as discussões de Bertoni (2009), que recomenda que sejam apresentadas inicialmente situações relacionadas ao cotidiano, na qual os estudantes possam expressar de forma espontânea seus conhecimentos. Bertoni (2009) classifica o problema das melancias como uma situação de quantificação que envolve uma contagem ampliada, requerendo novos números além dos naturais, e destaca:

> As crianças percebem que há 3 melancias inteiras, duas metades, um quarto (ou metade de metade). Estimuladas, conseguem simplificar para 4 melancias e 1 quarto. A resposta é uma quantidade. Algo que lembra um número. Vem misturado com números naturais. Além de ser uma situação que provoca a consideração de quantidades fracionárias, induz à noção de número — 4 e meio — que será um quantificador para a coleção, ou o resultado de uma contagem ampliada. Empregamos o termo ampliada significando uma contagem que extrapolou os números naturais. A vantagem dessas contagens é que as partes fracionárias aparecem com as inteiras, fazendo uma junção dos números fracionários aos números naturais. É bem diferente de quando se trabalha somente com a divisão de um inteiro (Bertoni, 2009, p. 34).

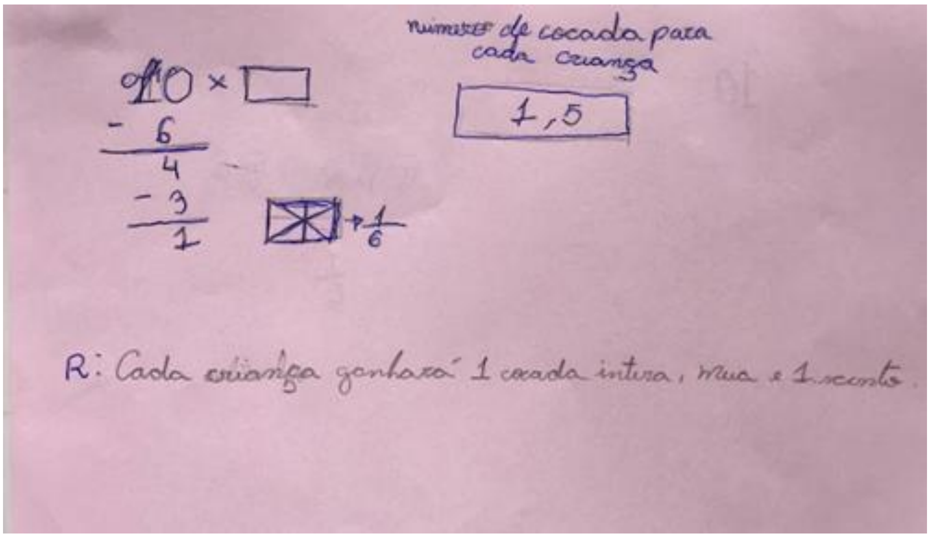
Com relação ao segundo objetivo, "reconhecer números racionais na forma fracionária no contexto diário", destaco as discussões ocorridas na aula 7, na qual foi realizado um trabalho formal com a representação numérica das frações no contexto de uma receita de massinha de modelar.

Quando foi apresentado o registro numérico de $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, praticamente todos os estudantes relataram conhecer o significado daqueles números. Nas aulas seguintes, foi dado continuidade à exploração das representações numéricas, que se tornaram familiares para eles.

No que diz respeito ao terceiro objetivo, “Comunicar-se utilizando linguagem matemática”, ressalto que a preocupação estava tanto na comunicação oral quanto na comunicação por meio de registros escritos. Assim, destaco um trecho da descrição das aulas 3 e 4, na qual os estudantes deveriam dividir dez cocadas para seis crianças. Após a discussão sobre as possibilidades de divisão, realizei uma conversa a respeito das representações elaboradas por eles.

A seguir, avisei que iria copiar alguns registros com letras maiores na lousa para que pudessem ser analisados. Copiei o primeiro, o qual é apresentado na Figura 16.

Figura 16 — Resolução do problema



Fonte: arquivo pessoal — foto tirada pela pesquisadora

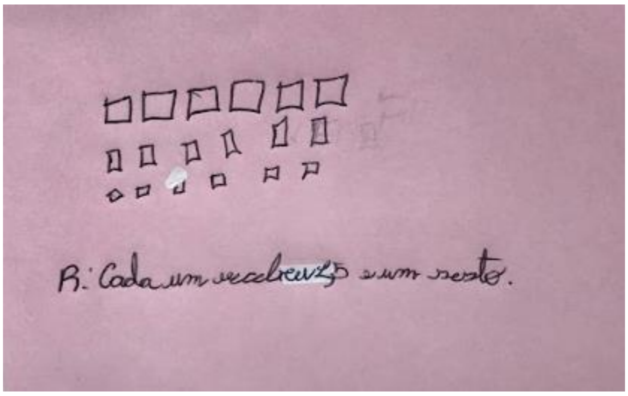
Após registrar a resolução em tamanho maior, alguns estudantes ficaram confusos e não conseguiam entender o raciocínio do grupo. Assim, aproveitei o momento e solicitei que uma pessoa do grupo explicasse o registro feito, e Gabriel levantou a mão para fazer a explicação.

Gabriel: *“A gente deu uma para cada. Sobraram quatro. Demos metade para cada, sobrou uma. Aí dividimos em seis. Ficou uma cocada, metade e um sexto.”*

Eu: *“Ah, entendi. O registro está ótimo, mas algumas etapas nós não conseguimos entender sem vocês explicarem. Vamos acrescentar algumas informações para ver se fica mais fácil de entender?”*

Assim, vou retomando a explicação e acrescentando informações no registro. Após terminar, pergunto se agora todos conseguem entender. Todos responderam que sim, portanto, passei para outro registro, representado na Figura 17.

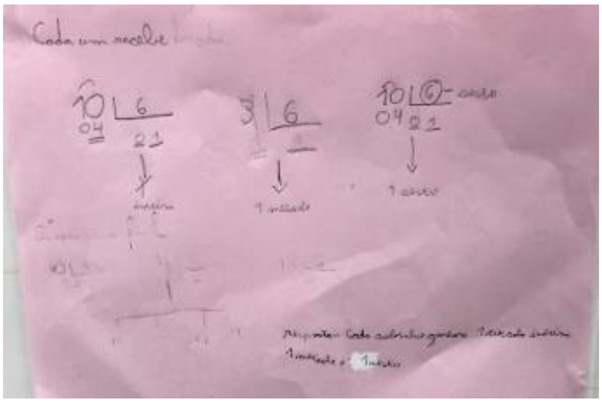
Figura 17 — Resolução de problema



Fonte: arquivo pessoal — foto tirada pela pesquisadora

Após apresentar o registro da Figura 17, perguntei se com o registro deste grupo todos conseguiam entender o raciocínio. A turma respondeu que sim, então passei para o próximo registro, ilustrado pela Figura 18.

Figura 18 — Resolução do problema



Fonte: arquivo pessoal — foto tirada pela pesquisadora

Ao apresentar a Figura 18, questionei-os se essa resolução estava compreensível, e a turma respondeu estar mais ou menos. Então, em seguida, pedi que Joaquim explicasse o processo de resolução.

Joaquim: *"A gente dividiu uma para cada, sobrou quatro. Dividimos três ao meio. Depois a que sobrou dividimos em seis, um sexto para cada."*

Depois disso, perguntei quais foram as respostas encontradas para o problema, e anotei na lousa as três possibilidades: (i) Uma cocada, metade e um sexto; (ii) Uma cocada e dois terços; (iii) Três metades e um sexto". Orientei que cada um deveria retomar o seu registro feito no caderno e fazer as modificações necessárias para o registro ser compreendido sem a necessidade de outras explicações. Assim, os estudantes começaram a rever os registros e a realizarem as modificações necessárias, mas vários deles optaram por refazer completamente a resolução. Após observar o que estavam fazendo, pedi que respondessem ao seguinte questionamento no caderno: "Como posso melhorar a qualidade dos meus registros?". Os estudantes começaram a responder, enquanto fui orientando que organizassem os materiais e se preparassem para a próxima aula.

Os dois últimos objetivos, a saber: (i) compreender a ideia de fração em diferentes significados: parte-todo, quociente e razão; (ii) resolver situações-problema que envolvam os diferentes significados das frações: parte-todo, quociente e razão – estão articulados. Essa foi uma preocupação que surgiu a partir de alguns referenciais teóricos estudados, que ressaltavam a necessidade de ir além do significado da fração como relação parte-todo. O quadro abaixo mostra os diferentes significados trabalhados nas aulas da primeira THA:

Quadro 6 – Significados de fração trabalhados nas aulas

Aulas	**Significado de fração**
1 e 2	Relação parte-todo
3 e 4	Quociente
5	Quociente
6	Relação parte-todo
7	Relação parte-todo
8	Razão

Fonte – elaborado pela pesquisadora

4.2 Plano da professora-pesquisadora para as tarefas de ensino

Após a definição dos objetivos de aprendizagem, considerando o desenvolvimento da THA, foi necessário estabelecer um plano para as tarefas matemáticas. É importante lembrar que se tratava de um planejamento inicial, e, portanto, sujeito a constantes ajustes, conforme o desenvolvimento das aulas e do fazer matemático dos estudantes.

Dessa forma, para o desenvolvimento da primeira THA foram planejadas oito aulas de 60 minutos cada, sendo que nas duas primeiras foi apresentado o problema no qual os estudantes deveriam identificar o número que representaria os "pedaços" de melancia menores que um inteiro, mobilizando, então, a ideia de fração como parte de um todo.

Na terceira e quarta aulas o problema apresentado requeria uma divisão (dez cocadas, para seis crianças), onde, com auxílio de material concreto, os estudantes enfrentaram o desafio de realizar uma divisão em partes iguais e sem resto, além de nomear as partes menores que um inteiro. Nessas duas aulas, assim como na quinta aula, foram trabalhados problemas que envolviam a ideia de fração como quociente.

Assim, na quinta aula, foi planejado um momento para organização das aprendizagens, com um registro coletivo a respeito da nomeação de frações, conforme o número de partes. Já a sexta aula foi destinada à elaboração de representações gráficas em um problema que envolvia a ideia de fração como parte de um todo.

A representação numérica das frações foi abordada apenas na aula 7, em um contexto de preparação de uma receita, começando pelas frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Essa representação surgiu em um dos grupos, já na primeira aula, no entanto, não foi compartilhada com toda turma o grupo.

A escolha de não apresentar a representação numérica, mesmo sendo um conhecimento que surgiu em um grupo de estudantes, está baseada nas considerações de Bertoni (2009), que propõe uma dispensa inicial da simbologia formal, quando afirma que:

> há necessidade de a compreensão dessas quantidades ser feita antes da introdução dos símbolos associados. Essa é outra hipótese que fizemos — de que a introdução prematura dos símbolos fracionários é um obstáculo à construção da ideia desse número. (…) Essa decisão encontra respaldo em Moro (2005), segundo a qual no ensino, é essencial seguir as notações espontâneas das crianças para, a partir delas, provocar-lhes a produção de notações mais avançadas, sempre em relação à interpretação das próprias crianças e trabalhando-se, primeiro, com os quantificadores de sua linguagem natural (Bertoni, 2009, p. 33).

Dessa forma, a notação numérica só foi introduzida formalmente após cinco aulas, no contexto de uma receita de massinha de modelar.

Finalmente, na oitava aula, foi trabalhada a ideia de fração como razão, em um contexto de chance de um determinado número sair em um dado de seis faces, e nessa aula também foi explorada a representação numérica de outras frações.

Salienta-se que as aulas não foram todas planejadas com antecedência, e o planejamento foi realizado em parceria com o coordenador de matemática da escola, que contribuiu com a definição dos objetivos, percurso e escolha das tarefas. Assim, foi realizado, inicialmente, o planejamento das quatro primeiras aulas e, após essas aulas terem ocorrido, já tendo as informações a respeito da compreensão dos estudantes, as outras quaro aulas foram planejadas.

Cabe destacar que, apesar de eu estar lecionando em apenas uma turma, as mesmas tarefas foram realizadas em todas as classes de quinto ano da escola, totalizando sete turmas. Por essa razão, o planejamento das aulas foi redigido detalhadamente e, além disso, as aulas foram discutidas nas reuniões mensais da área de matemática, da qual participavam os quatro professores da disciplina, o coordenador de matemática e as duas coordenadoras de série. Nessas ocasiões ocorreram discussões muito produtivas, com a contribuição de todos os professores.

No entanto, apesar de um planejamento único, cada professor fazia as adaptações que julgava necessárias, tendo em vista o desenvolvimento do fazer matemático dos estudantes nas aulas e as características específicas dos grupos. Por essa razão, ao final das oito aulas, foi reservada uma aula de ajustes, para cada professor ter a liberdade de aprofundar ou retomar aspectos que considerava mais importantes no percurso.

4.3 Hipóteses da professora-pesquisadora sobre o processo de aprendizagem dos estudantes

Enquanto os objetivos de aprendizagem condicionavam o meu planejamento e as minhas hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos estudantes, estes se influenciavam mutuamente. O processo de planejamento das tarefas é realizado a partir das hipóteses. No entanto, no decorrer do planejamento, as propostas geram novas hipóteses, em um processo de retroalimentação.

No Apêndice B são apresentadas, detalhadamente, as hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos estudantes, além de aparecerem indiretamente na descrição das aulas, sob a forma de sugestões de encaminhamentos para as aulas. Destaco que esse foi um aspecto que provocou uma grande mudança em minha prática pedagógica, pois entendo que sempre que se faz um planejamento de aula são consideradas as hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos estudantes. No entanto, na maioria das vezes, isso acontece de forma quase inconsciente.

De outro modo, na elaboração da THA, o processo de pensar com intencionalidade a respeito do processo de aprendizagem e registrar essas hipóteses foi uma grande novidade para mim. Nas aulas, por exemplo, eu ficava muito atenta para ver se as hipóteses seriam confirmadas, e alguns questionamentos eram feitos a todo momento, como: Qual seria a estratégia utilizada pelos estudantes? Como se dariam as discussões? De que forma representariam suas resoluções? Haveria diferentes estratégias e respostas que proporcionariam uma discussão mais rica? Essas perguntas me proporcionaram um novo olhar para o fazer matemático dos estudantes. Um olhar mais atento e investigativo.

Além disso, conforme dito anteriormente, tive a oportunidade de planejar a THA em parceria com o coordenador de Matemática. Em nossas reuniões, conversávamos a respeito das hipóteses, e muitos questionamentos também eram feitos: Como será que eles irão resolver esse problema? Será que é muito desafiador? Uma prática que acabei adotando durante esse processo de desenvolvimento da THA, foi a de na reunião seguinte, relatar como havia sido a aula, e então conversávamos a respeito das discussões, suas potencialidades e o que poderia ser mais bem explorado em outras aulas.

Assim, ressalto que pensar de maneira consistente sobre o processo de aprendizado dos estudantes teve grandes impactos em minha formação como professora. Assim, mesmo em aulas nas quais não estão sendo desenvolvidas THA, hoje tenho essa reflexão e registro no planejamento essas hipóteses na forma de perguntas e sugestões de encaminhamento. E, ao longo das aulas, sinto que tenho um interesse muito maior e genuíno pelas reflexões dos estudantes, e já não ando pela sala apenas auxiliando-os nas dúvidas, mas com uma verdadeira curiosidade pela forma como eles estão resolvendo os problemas.

CAPÍTULO 5
CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa pode ser considerada uma investigação sobre a prática. Desta forma, surgiu de um problema de minha prática profissional: o ensino de frações. Ponte (2002) alega que:

> (...) a investigação sobre a própria prática deve emergir como um processo genuíno dos atores envolvidos, em busca do desenvolvimento do seu conhecimento, procurando solução para os problemas com que se defrontam e afirmando assim sua identidade profissional (Ponte, 2002, p. 11).

Assim, o percurso dessa pesquisa se iniciou há muitos anos, por uma inquietação de minha prática pedagógica. Buscando respaldo teórico para o desafio do ensino de frações, ingressei no programa de mestrado. Apesar de saber o que me incomodava, não imaginava os caminhos que seriam percorridos.

Iniciei o mestrado em busca de respostas para o ensino de frações. No entanto, a participação no grupo de estudos, disciplinas, reuniões de orientação e leituras, foram me conduzindo para a reflexão a respeito das potencialidades e desafios da elaboração de uma trajetória hipotética de aprendizagem e suas implicações na formação de professores.

Essa dissertação traz assim a documentação desse percurso investigativo, que nasce na sala de aula. No capítulo 1, apresentamos a revisão da literatura. Constatamos a ausência de trabalhos que trouxessem trajetórias hipotéticas de aprendizagem nos anos iniciais.

No capítulo 2, apresentamos nossos pressupostos teóricos. Com relação à THA, partimos das considerações de Simon, Tzur e Pires. Construir uma THA possibilitou a compreensão de que é possível realizar um plano, sem desconsiderar o fazer matemático dos estudantes. Partimos dos objetivos de aprendizagem para seleção das tarefas, porém o tempo todo somos orientados por nossas hipóteses a respeito do processo de aprendizagem.

Queremos atingir os objetivos de aprendizagem e para isso precisamos selecionar tarefas adequadas. As nossas hipóteses direcionam as escolhas das tarefas. Da mesma forma, de acordo com as tarefas, hipotetizamos o percurso dos estudantes.

Ao pensarmos com intencionalidade a respeito do processo de aprendizagem, podemos desenvolver um interesse muito mais genuíno pela atividade em sala de aula. Esse é um processo que vai se ampliando a cada aula, tendo em vista que cada vez mais estamos alinhados com o progresso dos estudantes, e buscamos mais indícios para elaborar novas hipóteses para as próximas tarefas.

Com relação ao ensino de frações, consideramos extremamente positivo o trabalho para além do significado parte-todo, que acaba sendo tradicionalmente o mais explorado. Ao se depararem com outros significados, os estudantes têm a oportunidade de vivenciar uma compreensão mais ampla do conceito.

No capítulo 3, discutimos a respeito dos pressupostos metodológicos. Destacamos as especificidades de uma pesquisa sobre a própria prática e suas potencialidades na formação de professores. Também trouxemos algumas considerações a respeito da necessidade de um rigor metodológico, mesmo que esse tenha seus próprios pressupostos.

> Deste modo, a investigação não é algo que se possa realizar de forma rotineira, sem paixão, sem um verdadeiro investimento intelectual e afetivo. Ou seja, a investigação não se realiza com espírito de funcionário – requer espírito de protagonista social. Fazer parte de um projeto sem assumir, desde o início, uma posição de compromisso e empenhamento significa representar nesse projeto um papel secundário, não chegando a viver uma verdadeira experiência de investigação (Ponte, 2002, p. 12).

No capítulo 4 apresentamos os principais desafios e potencialidades enfrentados pela professora-pesquisadora. Estruturamos o capítulo de acordo com os elementos do Ciclo de Ensino de Matemática, proposto por Simon. Destacamos o processo de elaboração da THA, bem como nossas reflexões a respeito.

Por fim, gostaríamos de apresentar algumas limitações da pesquisa, bem como sugerir encaminhamentos para futuras investigações nessa área.

Destacamos que não termos conseguido utilizar o recurso da gravação para coleta de dados se mostrou como um limitador. Como a professora-pesquisadora era responsável por conduzir as aulas, não era possível registrar a aula no diário de bordo enquanto essa acontecia. O registro era realizado no mesmo dia, porém algumas discussões se perderam. Para contornar essa limitação, acreditamos que seria interessante o uso de um relógio conectado ao celular para captação de áudio, recurso que foi utilizado por alguns colegas do mestrado.

Outro fator que teria contribuído ainda mais para a coleta de dados, seria a observação de uma outra pessoa. Caso houvesse uma pessoa observando e registrando as aulas, teríamos mais material para análise e discussão.

Com relação ao ensino de frações, conseguimos explorar os seguintes significados: relação parte-todo; quociente e razão. Infelizmente, devido às limitações de tempo, não foi possível trabalhar com o significado medida em 2022. No entanto, em 2023 tivemos a oportunidade de reelaborar o planejamento e inserimos o trabalho com esse significado, que se mostrou muito proveitoso.

Outra mudança que foi realizada em 2023 diz respeito ao trabalho em uma perspectiva antirracista. Após a leitura do artigo “A matemática é negra: aspectos da identidade africana na origem do conhecimento matemático”, de Luana Cristina da Silva Santos e Wellington Pereira das Virgens, percebemos que em 2022 havíamos perdido uma oportunidade de trabalhar esses aspectos. Porém, em 2023, inserimos as origens das frações no continente africano em nosso planejamento.

Com relação aos dados produzidos em nossa pesquisa, por limitações de tempo e por não ser o nosso foco, não tivemos a oportunidade de realizar uma análise mais aprofundada dos protocolos dos estudantes, para investigar a diversidade de representações e estratégias de resolução dos problemas. Pretendemos realizar essa investigação em breve.

No que diz respeito à THA, uma questão nos acompanhou ao longo de todo esse percurso. De que forma, com as limitações de tempo e sobrecarga de trabalho experienciadas pela grande maioria dos professores da educação básica, a THA pode se tornar parte da cultura escolar? Vivenciamos o processo de elaboração da THA e não há dúvidas de seu potencial para o ensino de matemática. No entanto, sua elaboração é trabalhosa e dispendiosa. De que forma a THA poderia se constituir como uma realidade nas escolas? Assim, acreditamos que seriam proveitosas novas pesquisas nesse sentido, trazendo experiências de formadores de professores que expandissem o alcance das trajetórias hipotéticas de aprendizagem.

Gómez e Lupiáñez (2007, apud Pires, 2009) ponderam que muitas das THAs são elaboradas por pesquisadores:

> Como tornar compatível o propósito de que seja o professor quem construa a revisão da THA com o fato de que a totalidade de exemplos que se tem de THA foram desenvolvidas por investigadores que assumiram o papel de professor? (Pires, 2009, p. 162).

Nesse sentido, acreditamos que nossa investigação traz uma contribuição para esse debate, tendo em vista que foi elaborada no contexto de um mestrado profissional, por uma professora dos anos iniciais, que assume o papel de investigadora. Pires pondera:

> (...) é fundamental que professores se apropriem efetivamente de resultados de pesquisas relevantes sobre conhecimento matemático de crianças e jovens, inovações curriculares, planejamento, construções de atividades; e é mais importante ainda que se apropriem da ideia de que suas hipóteses e metas sobre as aprendizagens dos alunos (e a própria formatação das atividades) mudam continuamente e promovem novos conhecimentos e seu efetivo envolvimento na cultura matemática em sala de aula (Pires, 2009, p. 165)

Desta forma, acreditamos que o mestrado profissional se constitui como espaço privilegiado de conexão entre universidade e escola. Partindo de inquietações da sala de aula, o professor se constitui como pesquisador da própria prática. Nesse percurso investigativo, o docente não apenas encontra respostas para suas perguntas iniciais, como também se forma pesquisador. A sala de aula é local privilegiado de pesquisa. Quando surgirem novas questões, esse profissional sabe o caminho percorrer.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, J.L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. *In:* ARAÚJO, J.L.; BORBA, M. C. (Orgs.) **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática.** 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020.

BERTONI, N. E. **Módulo VI:** Educação e linguagem matemática. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

CARDOSO, L. S. **O desenvolvimento de uma sequência didática para trabalhar o conceito de fração com professores de 4º e 5º anos do ensino fundamental**.2019. 344f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Tocantins, Programa de Pós-Graduação em Educação, Palmas, 2019.

CLEMENT, J. J. Model based learning as a key research area for science education. **International Journal of Science Education**. 2000, v. 22, n. 9. p. 1041-1053.

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. Relationships of knowledge and practice: teacher learning in communities. **Review of Research in Education**, London: Sage, n. 24, p. 249-305, 1999.

CRESWELL, J. W. **Investigação Qualitativa e Projeto de Pesquisa**: escolhendo entre cinco abordagens. São Paulo: Editora Penso. 2014.

FLORES, M. V.; BISOGNIN, V. Os significados dos números racionais: um olhar a partir do livro didático. **Vydia - Revista Eletrônica,** v.40, n.1, p. 29- 43, 2020.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 5a. Ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GRAÇA, S.I.; PONTE, J.P.; GUERREIRO, A. Quando as frações não são apenas partes de um todo...! **Educação Matemática Pesquisa**. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. v. 23, n. 1, p. 683-712, 2021. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/51571

KIEREN, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Eds.), **Rational numbers: An integration of research** (p. 49–84). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

LAMONATO, M. **A exploração-investigação matemática:** potencialidades na formação contínua de professores. 2011. 256 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Humanas) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Boletim de Educação Matemática** 2008, 21(31), 1-22

MALACRIDA, R. M. **Frações e suas operações**: resolução de problemas em uma trajetória hipotética de aprendizagem. 2014. 156 f. Dissertação (PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

MARIA, C.; PIRES, C.; SIMON, M.; ESTUDOS, P. DE; EDUCAÇÃO, P. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. **Educação Matemática Pesquisa**. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. ISSN 1983-3156, v. 11, n. 1, p. 145–166, 2009.

NOGUEIRA, F. **Obstáculos epistemológicos e didáticos relacionados a frações:** um estudo com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental. 2020. 251 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2020.

PONTE, J. P. Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), **Reflectir e investigar sobre a prática profissional** (p. 5-28). Lisboa: APM, 2002.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular** (p. 11-34). Lisboa: APM, 2005.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento de Ideias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes. **Bolema**, v. 17, n. 21, p. 81-140, Unesp: Rio Claro, 2004.

ROBSON, C. **Real World Research**. Oxford: Blackwell, 1995.

SANDIN ESTEBAN, M. P. **Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições.** Porto Alegre: Artmed, 2010.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol. 26, n. 2, pp. 114-145. 1995

SIMON, M. A.; TZUR, R. Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. **Mathematical Thinking and Learning,** v. 6, n. 2, p. 91–104, 2004.

VIANNA, H. M. **Pesquisa em Educação:** a observação. Brasília: Plano Editora, 2003.

APÊNDICE A

PLANEJAMENTO DAS AULAS

No desenvolvimento da pesquisa, foram elaboradas duas Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem. A primeira THA foi composta por oito aulas de 60 minutos cada, e teve os seguintes objetivos de aprendizagem:

- Identificar a necessidade da ampliação do conhecimento numérico para resolver novos problemas.
- Reconhecer números racionais na forma fracionária no contexto diário.
- Comunicar-se utilizando linguagem matemática.
- Compreender a ideia de fração em diferentes significados: parte-todo, quociente e razão.
- Resolver situações-problema que envolvam os diferentes significados das frações: parte-todo, quociente e razão.

A segunda THA teve treze aulas de 60 minutos, com os objetivos de aprendizagem descritos abaixo:

- Compreender a fração como representação do inteiro, de um inteiro e do inteiro e mais partes.
- Compreender fração como resultado de uma divisão.
- Identificar quando duas ou mais frações são equivalentes.
- Compreender a porcentagem como representação de parte de um inteiro, do inteiro e do inteiro e mais partes.
- Demonstrar a equivalência entre frações, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas.
- Demonstrar as frações utilizando diferentes estratégias de representação.
- Ler, escrever, comparar e ordenar representações fracionárias de uso frequente.
- Representar graficamente frações.

Considerando os objetivos desta dissertação, optou-se por descrever e analisar a primeira THA. O planejamento e materiais das duas THA está disponível como anexo. No entanto, considera-se que as oito primeiras aulas apresentam um recorte muito interessante da aprendizagem dos conceitos iniciais de frações, em um trabalho com resolução de problemas, contemplando mais de um significado. Dessa forma, essa análise permitirá uma discussão mais aprofundada de nossas questões.

As aulas ocorreram no segundo semestre de 2022, sendo realizadas na sala de aula da turma, salvo quando há outra indicação na descrição. Trata-se de uma sala de aula com 31 mesas e cadeiras, mesa e cadeira da professora, quadro branco, dois computadores e um projetor. A sala conta com murais, armários, janelas e ar-condicionado.

Nesta escola, todas as aulas são acompanhadas por duas assistentes, profissionais contratadas pela escola. Uma era graduanda em Pedagogia e, à época, já trabalhava na escola há três anos, embora fosse o primeiro ano que acompanhava uma turma de 5° ano. A outra era graduada em Filosofia e cursava graduação em Pedagogia. Apesar de já ter experiência como assistente em outros locais, ingressou nesta escola em maio de 2022. As assistentes tinham acesso ao planejamento das aulas e materiais com antecedência.

Conforme informado anteriormente, a sala tinha 29 estudantes, e 23 aceitaram participar da pesquisa. Destaca-se que apenas as falas e atividades realizadas por estes estudantes foram analisadas.

Primeira Trajetória Hipotética de Aprendizagem

8 aulas de 60 minutos

Objetivos de aprendizagem

- Identificar a necessidade da ampliação do conhecimento numérico para resolver novos problemas.
- Reconhecer números racionais na forma fracionária no contexto diário.
- Comunicar-se utilizando linguagem matemática.
- Compreender a ideia de fração em diferentes significados: parte-todo, quociente e razão.
- Resolver situações-problema que envolvam os diferentes significados das frações: parte-todo, quociente e razão.

Aulas 1 e 2
Objetivos de aprendizagem ● Identificar a necessidade da ampliação do conhecimento numérico para resolver novos problemas. ● Reconhecer números racionais na forma fracionária no contexto diário. ● Comunicar-se utilizando linguagem matemática.

Tarefa

Na Matemática, o conhecimento de números e cálculos está relacionado à necessidade de resolver problemas. Nesta ficha você vai analisar três situações-problema e resolver cada uma delas, mostrando como comunicar matematicamente a solução.

Problema 1

Em novembro e dezembro de 2022 será realizada a Copa do Mundo no Catar. De acordo com as regras do campeonato, ocorre um sorteio para dividir as 32 equipes em oito grupos. Cada grupo tem uma seleção chamada “cabeça de chave”. Os oito cabeças de chave são definidos com base no ranking da Fifa, com as sete melhores equipes e o país sede (no caso, o Catar). Essa regra diminui as chances de as seleções mais fortes serem eliminadas logo na primeira fase. A imagem abaixo mostra os grupos da Copa do Mundo de 2022.

Fonte: https://pousoalegre24horas.net/noticia/37816/confira-como-ficaram-os-grupos-da-copa-do-mundo-e-quais-as-datas-dos-jogos-da-primeira-fase.html

Na primeira fase as seleções enfrentam todas as equipes que estão no mesmo grupo. Cada time joga apenas uma única vez contra cada adversário. Após essa rodada, as duas melhores equipes de cada grupo passam para as oitavas de final. Calcule quantidade de jogos que serão realizados no grupo do Brasil na primeira fase.

Problema 2

Paulo fez uma compra em uma loja de eletrônicos no valor de R $5.800,00 e optou por fazer um Pix para realizar o pagamento. No entanto, ao realizar a operação, recebeu uma mensagem de seu banco dizendo que seu saldo em conta era de R $3.000,00. Como Paulo poderá resolver essa situação?

Problema 3

Henrique trabalha em uma barraca que vende frutas na feira. Sábado, quando estava desmontando a barraca e guardando as mercadorias que sobraram, Márcia, a dona da banca, ligou para ele, pois estava comprando mais frutas para serem vendidas no dia seguinte. Márcia perguntou quantas melancias haviam sobrado após as vendas do dia. Como a banca vende melancias inteiras, mas também em pedaços, Henrique ficou na dúvida de como poderia responder à pergunta de Márcia. A câmera de seu celular estava quebrada, por isso não era possível enviar uma foto. Como ele poderia responder à Márcia quantas melancias restaram?

(Adaptado de Bertoni, 2009)

Etapas da aula

Observação: o principal objetivo dessa aula é que os estudantes percebam que existem alguns problemas que o conjunto de números naturais (sendo os números que eles estudaram até o momento) não é o suficiente para resolver. Por isso, precisaremos de outros números, os racionais, que serão apresentados inicialmente na representação fracionária. Começaremos o trabalho com resolução de problemas, para que se familiarizem com esses números. A representação numérica não será trabalhada no primeiro momento, por se apresentar como um possível obstáculo para compreensão dos conceitos. Introduziremos essa representação após algumas aulas, partindo da observação do uso das frações nas receitas.

1. Em trios, resolver as fichas. Reforçar a necessidade de comunicarem matematicamente o raciocínio e as respostas. Nos primeiros 20 minutos, os grupos devem trabalhar de forma autônoma, sem intervenção e ajuda dos educadores. Os problemas são desafiadores, mas os alunos precisam tentar mobilizar os recursos que possuem para resolvê-los. Após esse primeiro momento, educadores circulam verificando a compreensão, organização e comunicação da resolução.

2. Correção dos problemas, compartilhando diferentes estratégias e pedindo para que os estudantes expliquem seu raciocínio para os colegas. Deixar o problema das melancias por último. No problema das melancias, projetar a imagem no telão e explorar as diferentes soluções. Alguns encaminhamentos possíveis: *Como podemos chamar os "pedaços" que sobraram? Provavelmente alguns alunos trarão a ideia de metade. Como chamamos o pedaço menor? Podem falar "metade da metade" ou até mesmo "um quarto". Ressaltar que a melancia foi dividida em quatro partes, por isso cada parte recebe o nome de um quarto. Questionar quantos quartos são necessários para termos uma melancia inteira. Quantos quartos formam uma metade? Quantas metades formam uma melancia inteira? Se dividirmos as melancias inteiras em metades, quantas metades teríamos no total? Se juntarmos as duas metades, quantas melancias teríamos? De quantas formas diferentes podemos representar a quantidade de melancia da foto?* Explicar que além dos números que já conhecem, existem outros, que podem ser necessários para situações como essa. Neste semestre trabalharemos com as representações fracionárias.

Aulas 3 e 4
Objetivos de aprendizagem ● Identificar a necessidade de ampliação do conhecimento numérico para resolver novos problemas. ● Reconhecer números racionais na forma fracionária no contexto diário. ● Comunicar-se utilizando linguagem matemática. ● Resolver situação-problema envolvendo o significado de fração como quociente.
Tarefa **Problema** Elizabeth comprou dez cocadas para seus cinco sobrinhos que iriam visitá-la. Quando eles chegaram na sua casa, um deles havia trazido um amigo. Como Elizabeth pode dividir as cocadas entre as seis crianças, de forma que cada uma receba a mesma quantidade e não sobre nenhum pedaço? (Adaptado de Bertoni, 2009)

Etapas da aula
1. Retomar as discussões da aula anterior, projetando a imagem das melancias. Ressaltar as diferentes possibilidades e como podemos chamar os “pedaços” da melancia. Organização dos cadernos e dos grupos. 2. Em trios, as crianças devem resolver o problema. Disponibilizar retângulos de papel para representar as cocadas e explicar que as crianças podem utilizar o material concreto como suporte. No entanto, precisam comunicar o raciocínio matemático e a resolução por escrito e pensar em como elaborar a resposta. Eles podem fazer registros de apoio individual, mas cada grupo precisa elaborar coletivamente uma única resposta, que precisa ser registrada nos cadernos e em uma folha de resposta do grupo. Esse registro do grupo precisa ser feito com organização e cuidado, precisa ser legível e de fácil compreensão. Uma solução possível: dar uma cocada para cada um; partir as quatro que sobraram ao meio, dar metade para cada um; partir as duas metades que sobraram em três partes cada, dar um sexto para cada.) 3. Fazer um painel de solução do problema. Na lousa ou no mural, solicitar que as crianças colem a folha de respostas do grupo conforme forem terminando a resolução. Escolher respostas que apresentaram diferentes resoluções e/ou registros para discutir com as crianças. *Sugestões de encaminhamento das discussões: Quanto cada criança recebeu? Existem diferentes formas de realizar essa divisão? Qual foi a ordem da resolução? Como pensaram para resolver? Foi necessário fazer mais de uma tentativa? Como podemos chamar os “pedaços”? Todos os pedaços são do mesmo tamanho? Quantos pedaços precisamos para formar uma cocada inteira?* Provavelmente algumas crianças trarão as palavras metade, terço e sexto. Caso não falem, contar para eles que podemos chamar dessa forma. Explorar essa nomenclatura, sempre salientando que quando divido algo em seis partes, cada parte é um sexto e preciso de seis partes para formar o inteiro. Ainda não apresentar o registro numérico. 4. Encerramento da aula. Solicitar que no caderno as crianças avaliem o seu registro de resolução, dando de uma a cinco estrelas. Pedir que respondam no caderno à pergunta: *Como posso aprimorar os meus registros de resolução de problemas?* As crianças podem olhar os registros de colegas ou as respostas do grupo para pensar sobre a resposta da pergunta.

Aula 5
Objetivos de aprendizagem ● Identificar a necessidade de ampliação do conhecimento numérico para resolver novos problemas. ● Reconhecer números racionais na forma fracionária no contexto diário. ● Comunicar-se utilizando linguagem matemática.

- Resolver situação-problema envolvendo o significado de fração como quociente.

Tarefa

1. Marco ganhou uma barra de chocolate e gostaria de comer no lanche com quatro amigos. Todos devem comer a mesma quantidade e não pode sobrar nenhum pedaço.

a. Faça um desenho representando como ele pode fazer essa divisão.
b. Quanto cada um irá comer?
c. Você dividiu a barra em quantos pedaços?

2. Sônia resolveu fazer uma torta para o lanche da tarde e dividir igualmente para dar aos 4 filhos. Só que não esperava a chegada de 4 amigos, que também resolveram lanchar. Como a mãe poderia fazer para que todas as crianças comam a mesma quantidade?

Etapas da aula

1. Solicitar que resolvam individualmente os problemas da ficha. Pedir que releiam a avaliação da aula anterior e retomem a resposta que deram à pergunta: *Como posso aprimorar os meus registros de resolução de problemas?*
2. Organizar a turma em trios para comparação das respostas e registros. Se necessário, devem efetuar as correções. Grupos que terminarem antes do tempo previsto devem pegar um post -it para anotar o que já sabem sobre frações até agora (preparação para o registro coletivo).
3. Questionar como podemos chamar os pedaços. Perguntar se percebem alguma regularidade nas nomenclaturas trabalhadas até o momento. Organizar um registro coletivo: *O que sabemos sobre frações até agora?*

   Pode ser em tópicos. Algumas ideias que podem aparecer:

   - *As frações são divididas em partes iguais.*
   - *Alguns problemas precisam das frações para serem resolvidos.*
   - *As frações recebem o nome conforme o número de partes em que foram divididas:*

duas partes - metade/meio
três partes – terço
quatro partes – quarto
cinco partes - quinto …

Aula 6

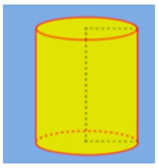
Objetivos de aprendizagem

- Reconhecer números racionais na forma fracionária no contexto diário.
- Comunicar-se utilizando linguagem matemática.
- Compreender a ideia de fração com significado relação parte-todo.
- Resolver situações-problema que envolvam os diferentes significados das frações: parte-todo, quociente e razão.

Tarefa

Problema

João possui em sua casa uma caixa d 'água no formato apresentado abaixo.



Nesta semana a SABESP fez uma manutenção na rede e ele ficou sem fornecimento de água.

Em seu caderno, usando régua, faça as representações propostas:

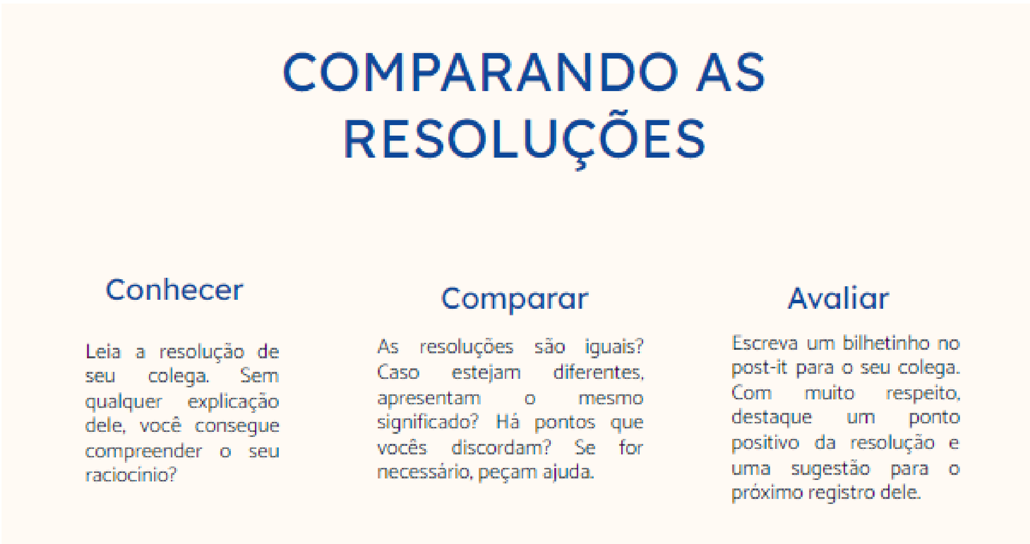
a) Às 15:00, João percebeu que a água ocupava um terço da caixa d´água.

b) Às 21:00, João percebeu que a água ocupava metade do que ocupava às 15:00.

c) Qual fração, referente à caixa d'água inteira, representa a quantidade de água que João tinha às 21:00?

(Adaptado de Nogueira, 2020)

Slide para orientar a discussão em duplas:



Etapas da aula

1. Resolução individual do problema. Pontos a serem observados: uso da régua, divisão em partes equivalentes, quantidade de partes divididas e pintadas.
2. Em duplas de trabalho, solicitar que comparem as respostas. Usar o slide para encaminhar a discussão. Educadores circulam, checando se as respostas estão

corretas. Entregar um *post-it* para cada aluno, para escreverem o bilhete ao colega. As crianças colam o *post-it* ao lado do seu registro.

Aula 7

Objetivos de aprendizagem

- Reconhecer números racionais na forma fracionária no contexto diário.
- Comunicar-se utilizando linguagem matemática.
- Compreender a ideia de fração como relação parte-todo.

Tarefa

Nas últimas semanas, resolvemos diversos problemas com frações. Agora iremos refletir sobre as diversas formas de representar um número fracionário. Para isso, vamos analisar uma receita:

Leia a receita abaixo:

Massinha caseira

Ingredientes

- $\frac{1}{4}$ de xícara de sal;
- $\frac{1}{2}$ xícara de água;
- $\frac{1}{2}$ colher de sopa de óleo;
- 1 xícara de farinha de trigo branca;
- 2 colheres de sopa de tinta guache.

Modo de preparo

- Coloque o sal e a farinha de trigo em uma bacia e faça uma cova no centro.
- Adicione a água e o óleo na cova e comece a misturar com uma colher.
- Amasse com as mãos até ficar bem macia. Se estiver muito grudenta, acrescente um pouco mais de farinha aos poucos.
- Acrescente a tinta guache da cor desejada e amasse até que ela seja totalmente absorvida.

→ *Guardando na geladeira a massinha dura até 15 dias.*

1. Grife na receita todas as informações numéricas.
2. O que significa $\frac{1}{2}$ xícara de água? Represente graficamente na imagem abaixo. Lembre-se de utilizar a régua.

3. O que significa $\frac{1}{4}$ de xícara de sal? Represente graficamente na imagem abaixo. Lembre-se de utilizar a régua.

4. Você já havia observado antes alguma outra representação de números fracionários? Discuta com seus colegas e registre abaixo.

5. Faremos a receita de massinha no laboratório. Trabalharemos em quartetos. A receita apresentada é o suficiente para duas crianças. Discuta com seu grupo e reescreva a lista de ingredientes adaptando para quatro crianças.

- ___________________ de sal;
- ___________________ de água;
- _____________________________ de óleo;
- ______________________________ de farinha de trigo branca;
- ______________________________ de tinta guache.

(Adaptado de Ribeiro, 2019)

Etapas da aula

1. Leitura silenciosa da receita e realização dos exercícios 1, 2 e 3. A divisão precisa ser em partes iguais e com uso da régua.
2. Em quartetos, realização das questões 4 e 5.
3. Discussão da questão 4 e correção coletiva da questão 5.
4. Discussão sobre os combinados do trabalho no laboratório. Dúvidas sobre a receita.

5. Em quartetos, fazer a massinha no laboratório seguindo a receita. Quando estiver pronto, deve dividir em quatro porções equivalentes. A massinha deve ser guardada em um saquinho plástico. 6. Organização do laboratório. Cada grupo só pode sair da bancada após organizar e limpar seu espaço de trabalho. 7. Realização individual das questões 6 e 7.

Aula 8
Objetivos de aprendizagem ● Comunicar-se utilizando linguagem matemática. ● Compreender a ideia de fração como razão. ● Resolver situação-problema envolvendo o significado razão.
Tarefa No lançamento de um dado de seis faces, numeradas de 1 a 6, responda: a) Qual é a chance de o resultado ser 5? b) Qual é a chance de o resultado ser um número menor que 5? c) Qual é a chance de o resultado ser um divisor de 2? (Caderno de Problemas, Escola Móbile)
Etapas da aula 1. Perguntar se os alunos compreendem o que significa um número ser divisor de 2. A partir das ideias iniciais, anotar o significado na lousa. 2. Individualmente, pedir que resolvam o problema. 3. Em trios, devem comparar as respostas e elaborar um registro único para o grupo. Questionar se é possível comunicar a resposta utilizando um registro fracionário numérico. 4. Discussão em grupo a respeito das respostas e diferentes registros. 5. Caso sobre tempo: apresentar outras possibilidades de probabilidade e chances. Esse site traz a possibilidade de jogar virtualmente vários dados, além de moedas e sorteios.

Segunda Trajetória Hipotética de Aprendizagem

Comparação, equivalência, diferentes representações

9 aulas de 60 minutos

Objetivos de aprendizagem

- Identificar quando duas ou mais frações são equivalentes.
- Demonstrar a equivalência entre frações, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas.
- Demonstrar as frações utilizando diferentes estratégias de representação.
- Ler, escrever, comparar e ordenar representações fracionárias de uso frequente.

- Representar graficamente frações.
- Resolver problemas envolvendo frações.
- Sistematizar as aprendizagens construídas.

Aula 1

Objetivos de aprendizagem

- Ler, escrever, comparar e ordenar representações fracionárias de uso frequente.
- Identificar quando duas ou mais frações são equivalentes.
- Demonstrar a equivalência entre frações, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas.

Tarefas

Jogo de comparação de frações – Estação 1

Link para o jogo

Réguas de fração – Estação 2

Utilizando como apoio a régua de fração virtual, faça as comparações e registre os resultados.

1.Selecione as seguintes peças das réguas de fração: inteiro, metades, quartos e oitavos. Faça as comparações e depois preencha as lacunas.

Determine quantas metades, quartos e oitavos são necessários para formar a peça inteira.

São necessários _________ meios para formar um inteiro.

São necessários _________ quartos para formar um inteiro.

São necessários _________ oitavos para formar um inteiro.

Determine quantos quartos e oitavos são necessários para formar $\frac{1}{2}$.

São necessários _________ quartos para formar um meio.

São necessários _________ oitavos para formar um meio.

Determine quantos oitavos são necessários para formar $\frac{1}{4}$.

São necessários _________ oitavos para formar um quarto.

2. Selecione as seguintes peças das réguas de fração: inteiro, terços, sextos e nonos. Faça as comparações e depois preencha as lacunas.

Determine quantos terços, sextos e nonos são necessários para formar a peça inteira.

São necessários ________ terços para formar um inteiro.
São necessários ________ sextos para formar um inteiro.
São necessários ________ nonos para formar um inteiro.

Determine quantos sextos e nonos são necessários para formar $\frac{1}{3}$.

São necessários ________ sextos para formar um terço.
São necessários ________ nonos para formar um terço.

Determine quantos nonos são necessários para formar $\frac{2}{6}$.

São necessários ________ nonos para formar dois sextos.

3. Selecione as seguintes peças das réguas de fração: inteiro, quintos e décimos. Faça as comparações e depois preencha as lacunas.

Determine quantos quintos e décimos são necessários para formar a peça inteira.

São necessários ________ quintos para formar um inteiro.
São necessários ________ décimos para formar um inteiro.

Determine quantos décimos são necessários para formar $\frac{1}{5}$.

São necessários ________ décimos para formar um quinto.

Determine quantos décimos são necessários para formar $\frac{4}{5}$.

São necessários _________ décimos para formar quatro quintos.

Problema – Estação 3

Um barril continha 180 litros de azeite, e $\frac{3}{5}$ deles foram engarrafados.

a) Faça a representação gráfica da situação acima identificando as partes e o todo. Lembre-se de usar a régua.

b) O restante do azeite foi colocado em 4 vasilhas iguais. Calcule quantos litros foram colocados em cada vasilha.

c) Apresente a fração do todo que a quantidade de azeite colocada em cada vasilha representa.

(Caderno de Problemas, Escola Móbile)

Etapas da aula

1. Cada estação terá duração de 15 minutos. Colocar um cronômetro na lousa para marcar o tempo.
2. Descrição das estações

Estação 1 - Jogo de comparação de frações

Materiais: 1 dispositivo eletrônico por quarteto, aberto no jogo.

Um conjunto de círculo de frações de madeira por quarteto.

As crianças formam equipes de dois, para jogar contra outra equipe. As regras do jogo estão no botão com um ponto de interrogação. Solicitar que leiam antes de começar a jogar. Cada dupla deve provar suas respostas com os círculos de frações.

Estação 2 - Régua de frações

Materiais: 1 dispositivo eletrônico por criança, aberto no site da régua de frações. Alternativa: réguas de fração de madeira.

Cada criança deve fazer as comparações propostas, usando as réguas virtuais.

Estação 3 - Resolução de problema

Material: caderno e problema Em duplas, resolver o problema.

Aula 2
Objetivos de aprendizagem ● Sistematizar as aprendizagens construídas.
Etapas da aula

1. Explicar aos alunos que organizaremos as aprendizagens de frações. Escrever na lousa a seguinte pergunta: *"Se vocês fossem explicar para um aluno que está ingressando agora no 5° ano, como vocês falariam as aprendizagens de frações até o momento?"*. Dizer que iremos trabalhar em trios e cada um irá analisar algum problema ou atividade realizada até o momento, para fazerem um registro preparatório para o registro coletivo.
   Cada trio deve retomar um problema para elaborar um registro, orientado pelas perguntas. As crianças devem consultar os registros no caderno para retomar as resoluções. Caso algum grupo termine o registro antes do tempo proposto, pode escolher outro problema para realizar um novo texto.
2. Discutir quais elementos aparecem em todos os registros e quais são mais específicos. A partir dos registros preliminares, construir coletivamente um registro da turma. Os elementos abaixo precisam estar no registro, caso algum não seja trazido pela turma precisa ser lembrado pelo/a professor/a para ser discutido e aparecer no registro. O texto pode ser em forma de tópicos.

Frações - Organizando as descobertas

- *Podemos representar as frações de diversas formas: representação gráfica (desenho), representação numérica (½, ¾, ⅖) e escrita (dois quartos, um terço).*
- *As frações apresentam diferentes ideias e são necessárias na resolução de diversos problemas.*
- *A fração pode representar a parte de um todo. Por exemplo: um quarto de melancia, significa que uma melancia inteira foi dividida em quatro partes equivalentes e estamos considerando uma parte. Se considerarmos três dessas partes, teremos três quartos.*
- *A fração pode representar uma divisão. Por exemplo: se dividirmos três chocolates para quatro crianças, cada uma receberá três quartos.*
- *A fração pode representar uma razão. Por exemplo: ao jogarmos um dado, a possibilidade do número 5 sair é de uma para seis, que podemos representar como ⅙.*
- *Podemos representar a mesma quantidade com diferentes frações. Dizemos que essas frações são equivalentes. Por exemplo: Metade é equivalente a dois quartos, um terço é equivalente a dois sextos.*
- *Quanto aumentamos a quantidade de divisões de um inteiro, cada parte fica menor. Por isso, um quarto é maior que um sexto.*

Aula 3
Objetivos de aprendizagem ● Resolver problemas envolvendo frações. ● Representar graficamente frações.
Tarefa **Problema 1** Guilherme usou $\frac{1}{4}$ de sua semanada na cantina da escola e $\frac{1}{2}$ na compra de gibis. Sobraram R$ 12,00. Calcule quanto Guilherme recebe de semanada. **Problema 2** Numa escola, há 1.800 alunos, dos quais $\frac{3}{5}$ levam lanche de casa diariamente. a) Faça a representação gráfica da situação acima identificando as partes e o todo. Lembre-se de usar a régua. b) Calcule o número de alunos que não levam lanche de casa. (Caderno de Problemas, Escola Móbile)
Etapas da aula 1. Em trios heterogêneos, solicitar que resolvam os problemas. Nos primeiros 20 minutos, as crianças realizam de forma autônoma. Após esse período, educadores circulam tirando as dúvidas e dando orientações a respeito dos registros. No problema 1, fazer uma representação gráfica pode ser uma boa estratégia de resolução. As crianças precisam compreender primeiramente que havia restado ¼ da mesada e que os 12 reais equivalem a esse $\frac{1}{4}$, para depois descobrir o todo. No problema 2, as crianças precisam entender que descobrir $\frac{3}{5}$ de 1.800, significa descobrir primeiro $\frac{1}{5}$ de 1800 e depois multiplicar por 3. Por isso a letra A, que tem a etapa de representação gráfica, é fundamental para a letra B. Não devemos apresentar a "regra" ou "macete" de "dividir pelo denominador e multiplicar pelo numerador". Apesar de ser prática, se as crianças aplicam essa regra sem compreender o significado a aprendizagem se tornará mecânica e sem significado. Podemos solicitar que as crianças façam a representação gráfica de $\frac{3}{5}$ e depois perguntar: se 1.800 equivale ao inteiro, $\frac{5}{5}$, como podemos descobrir $\frac{3}{5}$? Caso ainda precisem de ajuda, sugerir: será que se descobrirmos o valor de $\frac{1}{5}$, conseguiremos saber o valor de $\frac{3}{5}$? Faremos um painel de soluções na aula seguinte, então é importante selecionar algumas resoluções para serem discutidas.

Aula 4
Objetivos de aprendizagem ● Resolver problemas envolvendo frações. ● Representar graficamente frações.

Tarefa

Problema

Em uma prova, Lia acertou 20 questões e errou $\frac{3}{8}$ delas.

De acordo com esses dados:

a) Faça a representação gráfica da situação acima.

b) Observando sua representação gráfica, indique a fração que representa os acertos de Lia nessa prova.

c) Determine o número de questões dessa prova.

d) Quantas questões Lia errou?

e) Qual foi a nota dela, se o valor da prova é 8 e todas as questões têm o mesmo valor?

(Caderno de Problemas, Escola Móbile)

Etapas da aula

1. Fazer um painel de solução dos problemas da aula anterior. É importante escolher pelo menos três resoluções diferentes. Pedir que as crianças expliquem seu raciocínio para turma. Perguntar se os colegas concordam e se é possível compreender a resolução apenas lendo o registro. No canto da lousa, ir listando os pontos que as crianças forem levantando como positivos na elaboração do registro (uso de régua, cores diferentes, legenda indicando o significado dos cálculos etc.). Ao final, solicitar que as crianças revisem o seu registro, considerando os pontos levantados.
2. Em duplas, solicitar que resolvam o problema. Solicitar que façam a representação gráfica com régua, que escolham duas cores para representar os erros e acertos e que sinalizem a quantidade de questões que representa $\frac{1}{8}$.

Aula 5

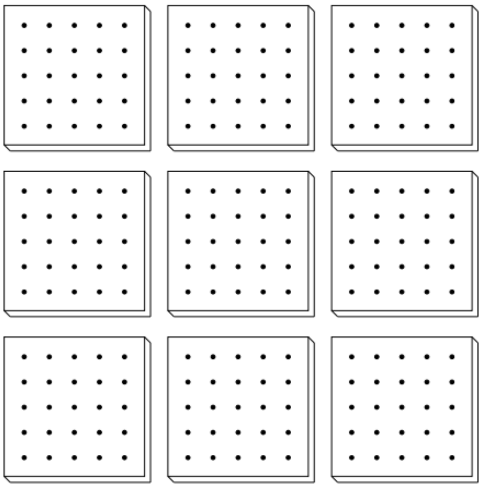
Objetivos de aprendizagem

- Demonstrar as frações utilizando diferentes estratégias de representação.
- Ler, escrever, comparar e ordenar representações fracionárias de uso frequente.
- Representar graficamente frações.

Tarefa

Registro do Geoplano

Escolha três representações de cada etapa da aula para registrar. Lembre-se de usar régua e identificar a parte e o todo. Escreva acima de cada representação gráfica, qual a fração está sendo representada.



Slides da aula

Link

Etapas da aula

1. Cada dupla acessa os slides e vai realizando as etapas de forma autônoma. São três etapas com solicitações diferentes. Colocar um cronômetro na lousa. Cada etapa terá a duração de 15 minutos. Nesse período, devem fazer as representações que forem possíveis no Geoplano, além de escolher três para registrar na tirinha. No registro, é necessário que usem régua e identifiquem as partes e o todo, além de indicar a fração que está sendo representada. Cada etapa tem várias representações, não é esperado que todas as duplas consigam realizar tudo.
2. Encerramento da aula. Escolher representações que tenham gerado mais discussões ou dúvidas, projetar na lousa e solicitar que algumas crianças mostrem as representações que fizeram.

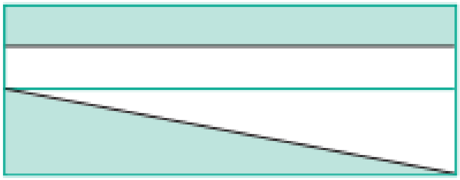
Aula 6

Objetivos de aprendizagem

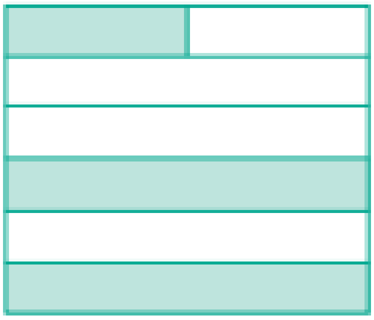
- Demonstrar as frações utilizando diferentes estratégias de representação.
- Ler, escrever, comparar e ordenar representações fracionárias de uso frequente.
- Representar graficamente frações.

Tarefa

1. Podemos afirmar que a área colorida corresponde a $\frac{1}{4}$ da figura? Justifique sua resposta.

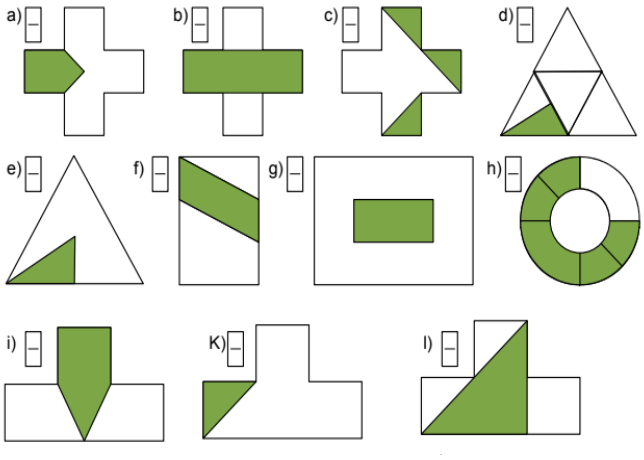


2. Qual fração representa a parte pintada do retângulo?



3. É correto afirmar que metade da figura abaixo está colorida? Justifique sua resposta.

4. Na imagem abaixo, escreva a fração que representa a área colorida. Dica: se necessário, faça mais divisões na figura usando a régua.



(Adaptado de Parra, 2006)

Etapas da aula

1. Realização individual dos exercícios 1, 2 e 3.
2. Correção coletiva. Nas questões 1 e 3, reforçar a estrutura de resposta do comando justifique.

   Encaminhamentos possíveis:

   Na questão 1, salientar que existem formas diferentes de dividir um inteiro. Projetar a imagem na lousa, dividir a figura ao meio e questionar se as partes pintadas representam "metade da metade"?

   Na questão 2, projetar e mostrar que a figura pode ser dividida ao meio verticalmente.

   Na questão 3, explorar as frações equivalentes: $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{3}{6}$.
3. Em duplas, solicitar que façam o exercício 4.
4. Projetar a questão na lousa para realizar a correção coletiva. Nas questões que gerarem dúvidas ou discordâncias, realizar a divisão em partes iguais com a caneta.

Aula 7

Objetivo de aprendizagem

- Resolver problemas envolvendo frações.

Tarefa

Apresentação de slides

Etapas da aula

1. Projetar os slides de apoio. Explicação da divisão de papéis nos grupos. O objetivo da divisão é organizar o trabalho e que todos tenham uma participação ativa. Avisar que a cada questão alguns grupos serão chamados para compartilhar as respostas e estratégias e que nesse momento o/a apresentador/a deverá explicar as conclusões do grupo para turma. (Obs.: não será possível chamar todos os grupos em todas as questões, fazer um revezamento para que todos os grupos compartilhem ao menos uma resposta).

   Projetar o slide 3 e fazer um levantamento de conhecimentos prévios das crianças a respeito de sorteios.
2. Projetar a questão 1 e solicitar que discutam e registrem em grupo na folha sulfite. Após 5 minutos, discutir as diferentes possibilidades e projetar a resposta. Questionar as diferentes estratégias. Solicitar que todos os grupos confiram se escreveram todas.
3. Projetar a questão 2 e solicitar que discutam e registrem. Após dez minutos chamar alguns grupos para compartilharem as resoluções. Explorar as expressões e escolher algumas probabilidades para registrar na forma de fração. Sugestões de encaminhamentos:

   A chance de sair o número 792 é de uma em seis, podemos representar através da fração $\frac{1}{6}$.

   A probabilidade de sair um número par é de duas em seis, podemos representar através da fração $\frac{2}{6}$. *Alguma outra fração pode representar essa possibilidade?*

A probabilidade de sair um número ímpar é de quatro em seis, podemos representar através da fração $\frac{4}{6}$. Qual tem maior probabilidade de sair, um número par ou ímpar?

4. Projetar a questão 3 e solicitar que discutam e registrem. Após dez minutos, compartilhar as resoluções e pedir que alguns grupos expliquem o seu raciocínio.

Aula 8

Objetivos de aprendizagem

- Resolver problemas envolvendo frações.
- Representar graficamente frações.

Tarefa

Em 2022, um estudo do Sebrae fez um levantamento para calcular o preço médio de uma pizza em cada bairro de São Paulo. Por meio do levantamento, foi constatado que, conforme a região na qual a pizzaria se encontra, pode haver uma variação de mais de 30 reais no preço de uma pizza. A imagem abaixo apresenta o valor de duas pizzas do mesmo tamanho, mas são vendidas em bairros diferentes.

Pizzaria A - Bairro de Moema

Preço: R$ 64,00

Pizzaria B - Bairro Capão Redondo

Preço: R$ 32,00

a. Calcule o valor de metade da pizza na Pizzaria A e na Pizzaria B.
b. Algumas pizzarias vendem pizzas em pedaços. Se as pizzas fossem divididas em oito pedaços, quanto custaria um pedaço de pizza na Pizzaria A e na Pizzaria B? Esse pedaço equivale a qual fração da pizza inteira?
c. Quanto custaria $\frac{3}{8}$ de pizza na Pizzaria A e na Pizzaria B? Essa fração equivale a quantos pedaços de pizza?
d. Podemos afirmar que um casal que comeu $\frac{4}{8}$ de uma pizza na Pizzaria A pagou mais caro do que um casal que comeu $\frac{7}{8}$ na Pizzaria B? Justifique a sua resposta.
e. Podemos afirmar que um grupo que consumiu $\frac{1}{2}$ de uma pizza na Pizzaria A pagou o mesmo valor que uma pessoa que consumiu uma pizza inteira na Pizzaria B? Justifique a sua resposta.

Etapas da aula

1. Leitura individual da ficha. Grifar as solicitações e informações necessárias para a resolução.
2. Em duplas, resolver os exercícios. Entregar um jogo de círculo de frações para cada dupla, além das fichas de unidade e dezena. Solicitar que formem o valor de cada pizza inteira com as fichas.
   Na letra A, orientar que utilizem o disco de frações de ½. *Se 64 reais equivalem à pizza inteira, qual seria o valor de metade da pizza?* Pedir que demonstrem, colocando o valor sobre cada metade da pizza (32 em cada metade). Repetir o procedimento com o valor de R$ 32,00. Questionar como poderíamos registrar esse raciocínio na resolução do problema.
   Na letra B, utilizar o círculo dividido em oitavos. Fazer o mesmo procedimento da letra A, mas dividindo em oito partes. Realizar com as duas pizzas e fazer o registro.
   Nas letras C e D, as duplas podem partir da resolução da letra B, ou continuar trabalhando com o material concreto.
   Na letra E, se necessário, utilizar o círculo de $\frac{1}{2}$.

Aula 9

Objetivos de aprendizagem

- Resolver problemas envolvendo frações.
- Representar graficamente frações

Tarefa

Problema

Marcela está juntando dinheiro para comprar um jogo. Ela guarda todas as moedas que recebe em um pote de vidro. Ela já juntou 30 reais, o que significa ⅖ do dinheiro necessário para a compra.

a) Qual fração representa o valor que falta para Marcela comprar o jogo?
b) Quanto custa o jogo que Marcela quer comprar? (Dica: fazer uma representação gráfica pode ajudar.)
c) A tia de Marcela deu 30 reais para ela. Podemos afirmar que Marcela já possui o dinheiro necessário para sua compra? Justifique a sua resposta.

Etapas da aula

1. Solicitar que resolvam individualmente o problema.
2. Pedir que comparem a resolução com o colega. Devem avaliar se o registro do raciocínio está compreensível, se todas as etapas estão registradas. Podem fazer alterações no registro após as considerações do colega.
3. Discussão coletiva do problema e estratégias de resoluções.

APÊNDICE B – DESCRIÇÃO DAS AULAS

No desenvolvimento da pesquisa, foram elaboradas duas Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem. A primeira THA foi composta por oito aulas de 60 minutos cada, e teve os seguintes objetivos de aprendizagem:

- Identificar a necessidade da ampliação do conhecimento numérico para resolver novos problemas.
- Reconhecer números racionais na forma fracionária no contexto diário.
- Comunicar-se utilizando linguagem matemática.
- Compreender a ideia de fração em diferentes significados: parte-todo, quociente e razão.
- Resolver situações-problema que envolvam os diferentes significados das frações: parte-todo, quociente e razão.

A segunda THA teve treze aulas de 60 minutos, com os objetivos de aprendizagem descritos abaixo:

- Compreender a fração como representação do inteiro, de um inteiro e do inteiro e mais partes.
- Compreender fração como resultado de uma divisão.
- Identificar quando duas ou mais frações são equivalentes.
- Compreender a porcentagem como representação de parte de um inteiro, do inteiro e do inteiro e mais partes.
- Demonstrar a equivalência entre frações, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas.
- Demonstrar as frações utilizando diferentes estratégias de representação.
- Ler, escrever, comparar e ordenar representações fracionárias de uso frequente.
- Representar graficamente frações.

Levando em consideração os objetivos desta dissertação, optou-se por descrever e analisar a primeira THA. As oito primeiras aulas apresentam um recorte muito interessante da aprendizagem dos conceitos iniciais de frações, em um trabalho com resolução de problemas, contemplando mais de um significado. Dessa forma, essa análise permitirá uma discussão mais aprofundada de nossas questões.

As aulas ocorreram no segundo semestre de 2022, e foram realizadas na sala de aula da turma, salvo quando há outra indicação na descrição. Trata-se de uma sala de aula com 31 mesas e cadeiras, mesa e cadeira da professora, quadro branco, dois computadores e um projetor. A sala conta com murais, armários, janelas e ar-condicionado.

Nesta escola, todas as aulas são acompanhadas por duas assistentes, profissionais contratadas pela escola. Uma era graduanda em Pedagogia e, à época, já trabalhava na escola há três anos, embora fosse o primeiro ano que acompanhava uma turma de 5° ano. A outra era graduada em Filosofia e cursava graduação em Pedagogia. Apesar de já ter experiência como assistente em outros locais, ingressou nesta escola em maio de 2022. As assistentes tinham acesso ao planejamento das aulas e materiais com antecedência.

Conforme informado anteriormente, a sala tinha 29 estudantes e 23 aceitaram participar da pesquisa. Destaca-se que apenas as falas e atividades realizadas por estes estudantes foram analisadas.

1. Descrição da primeira e segunda aulas

As duas primeiras aulas apresentam uma conexão, pois no primeiro momento foi realizada a resolução dos problemas e na segunda aula a discussão. Por esse motivo, optei[8] por descrever e analisar as duas aulas de forma conjunta.

Iniciei a aula fazendo a correção dos exercícios de lição de casa. Em seguida, expliquei aos estudantes que eles iriam resolver a última questão da ficha 8 e a ficha 9, em grupos, e destaquei que eram tarefas que envolviam a resolução de problemas e que eles deveriam ter muita atenção na discussão, no uso da linguagem matemática e na organização do registro. Salientei, também, que a correção seria realizada no dia seguinte.

Os estudantes foram organizados em sete quartetos [nesse dia um estudante havia faltado]. Após se organizarem, foram apresentados quatro problemas, sendo que apenas um envolvia a fração. A ideia era que os estudantes se deparassem com situações novas, por meio

[8] Neste apêndice utilizo a primeira pessoa do singular, uma vez que desempenhei o papel de professora-pesquisadora da turma, sendo eu mesma a autora do conteúdo apresentado. Isso visa a uma abordagem pessoal e reflexiva, refletindo minha perspectiva e envolvimento direto com o tema abordado.

das quais seriam desafiados a irem além do trabalho a que estavam habituados, ou seja, com o conjunto dos números naturais.

Os problemas envolviam números acima da classe do milhar, análise combinatória, números negativos e frações, mas nesta descrição o foco está no problema que envolvia fração.

Os grupos começaram a discutir e resolver os problemas. Mas devido ao tempo da aula, apenas um grupo chegou ao problema que tratava de frações, o qual é reproduzido a seguir:

Problema 1: *Henrique trabalha em uma barraca que vende frutas na feira. Sábado, quando estava desmontando a barraca e guardando as mercadorias que sobraram, Márcia, a dona da banca, ligou para ele, pois estava comprando mais frutas para serem vendidas no dia seguinte. Márcia perguntou quantas melancias haviam sobrado após as vendas do dia. Como a banca vende melancias inteiras, mas também em pedaços, Henrique ficou na dúvida de como poderia responder à pergunta de Márcia. A câmera de seu celular estava quebrada, por isso não era possível enviar uma foto. Como ele poderia responder à Márcia quantas melancias restaram, considerando as imagens a seguir?*

Fonte: adaptado de BERTONI, 2009.

Carlos argumentou que eram quatro melancias e um quarto, já que duas metades formavam uma melancia inteira. Os outros três integrantes deste grupo disseram que eram três melancias, duas metades e um quarto, pois a melancia havia sido partida. Em seguida, perguntei se fazia diferença, ou se as duas respostas poderiam estar corretas, e todos os estudantes concordaram que as duas respostas eram válidas e anotaram as duas formas.

Com a intencionalidade de provocar um novo diálogo entre eles, questionei-os sobre como eles sabiam que aquele pedaço menor era chamado de “um quarto”. Assim, obtive como resposta de dois estudantes um desenho de uma cama para o pedaço de melancia, para fazer uma piada em referência ao termo "quarto". Então, Eduardo começou a desenhar um semicírculo:

“Eu sei, porque se você pegar a metade e dividir ...”.

Vinícius interrompe: *“Precisa de quatro pedaços desse aí para formar uma melancia inteira”*.

Eduardo concorda: *“Isso, são quatro pedaços, dividiu em quatro”.*

Quando faltavam cinco minutos para o final da aula, solicitei que eles começassem a reorganizar a sala e a entregarem as fichas, e expliquei que eles poderiam terminar no dia seguinte. Em seguida, a turma foi liberada para o intervalo.

No dia seguinte, iniciei a aula explicando que eles teriam 20 minutos para a finalização da resolução dos problemas do dia anterior, e depois seria realizada a discussão e correção coletiva. Solicitei que se organizassem nos mesmos grupos da aula anterior e entreguei as fichas para eles.

O grupo que havia terminado todos os problemas na aula anterior recebeu uma ficha com atividade extra (problema de lógica), e então os estudantes começaram a trabalhar, enquanto eu e as assistentes circulávamos pela sala. Mantive o meu foco de observação nos grupos que estavam discutindo o problema das melancias.

Em um grupo, Celina disse: *“são três melancias, duas metades e um quarto”*, mas os outros integrantes disseram que eram quatro melancias e um quarto. Celina, não concordando com a resposta, diz: *“Não é uma melancia inteira! Não dá para colar com Super Bonder para virar uma só!”*. Então, as colegas do grupo alegaram que a banca também vendia melancias em pedaços, por isso não fazia diferença. No entanto, Celina não se convenceu e o grupo não chegou a uma conclusão única, mas também não discutiram mais, e deram o assunto por encerrado, cada uma escrevendo a sua resposta.

Outro grupo também me procurou e perguntou se a representação numérica que haviam feito estava correta, que era: $4\,\frac{1}{4}$, e eu disse que estava correto, mas perguntei o que representava o “um sobre o quatro”, e eles disseram: *“é um quarto”*, então questionei sobre como eles conheciam aquela representação numérica. Benício disse que tinha lembrado da plataforma $9\,\frac{3}{4}$ do filme do Harry Potter.

Logo em seguida, um grupo disse que sabia a resposta, mas que eles não sabiam como escrever com números. Disse que eles podiam escrever por extenso mesmo, e eles escreveram *“quatro melancias e um quarto”*.

Após essas discussões, orientei para que eles voltassem para os lugares para a realização da discussão coletiva.

Considerando o problema das melancias, fui registrando todas as possibilidades apresentadas pelos estudantes na lousa, que foram as seguintes:

- 4 melancias e meia
- 4 melancias e um terço
- 4 melancias e um quarto
- 3 melancias, duas metades e um quarto

Primeiramente, foquei a discussão no nome do pedaço menor, e pedi que Clarissa, estudante que achava que se chamava um quarto, explicasse o porquê.

"É um quarto porque dividimos em quatro partes. Aquelas ali [aponta para as metades] *foram em dois, o outro em quatro."*

Outras estudantes levantaram a mão e falaram:

"É como se fosse a metade dividida em dois."
"É a metade da metade."
"Para ser um terço, dividiria em três."
"Um quarto, porque foi em quatro. Mas também tem um quinto, um sexto, um décimo… isso é fração."
"Um quarto, mas se você pegar dois pedaços desse tamanho, aí são dois quartos, se forem três, três quartos."

Nesse momento, lembrei que no dia anterior havia escutado uma observação muito boa em um grupo, e então disse: *"O Vinícius deu uma ótima explicação ontem. Você lembra o que falou?"*

Vinícius responde: *"Sim! É um quarto porque precisa de quatro pedaços para formar uma melancia inteira!"*

Todos entraram em acordo que aquele pedaço era um quarto da melancia. Nesse momento Fernando falou: *"Isso aí era bem óbvio, né? Claro que era um quarto!"*.

A partir dessa fala, argumentei que devemos tomar cuidado ao fazer esses comentários, pois o que é óbvio para um não é necessariamente óbvio para o outro, e complementei: *"se uma criança achou desafiador, ou havia escolhido outro nome para o pedaço, ela pode se sentir* *mal ao ouvir um comentário como esse*". Após essa fala, Fernando concordou com minha observação.

Em seguida, passei para a discussão sobre as metades: *"seriam 4 melancias ou 3 melancias e 2 metades?*". Vários estudantes levantaram a mão, querendo responder:

"Eu acho que são quatro, porque se juntar as duas metades, é a mesma coisa que uma inteira."
"Como a banca vende pedaço também, tanto faz, porque pode ser que ela corte todas as melancias ao meio no dia seguinte."
"São duas metades. Quando a gente corta a melancia ela estraga mais rápido, não é a mesma coisa."
"Só que ela vai vender no dia seguinte, não vai estragar."
"A dona da banca quer saber quantas melancias, não os pedaços."
"Vai depender do cliente. Se ele quiser uma melancia inteira, não vai ser a mesma coisa. Mas se não se importar em levar duas metades, então tanto faz."

Apesar das discussões, percebi que faltavam três minutos para o intervalo, e então disse que continuaríamos a discussão na próxima aula.

Ao final, conversei com as assistentes sobre a aula.

"O Vinícius ficou muito feliz quando você falou a resposta dele. Até mudou a postura!"
"Pois é! Eu achei que ele nem fosse querer falar, que iria ficar com vergonha, mas falou!"
"Sim! Eu estava olhando para ele quando você falou. Ele abriu um sorriso e falou bem alto. Foi muito bom, porque ele é uma criança com muitos desafios, né? Foi muito bom para ele!"

1.1 Nossas hipóteses sobre o processo de aprendizagem da primeira e segunda aulas

Nesse primeiro momento, nosso principal objetivo era que a turma percebesse, por meio da resolução de uma situação-problema, que em algumas situações é necessário lidar com quantidades menores que um inteiro. Dessa forma, havia uma necessidade de ampliação dos conhecimentos matemáticos, pois precisaram ir além do Conjunto dos Números Naturais e iniciar um trabalho com os Números Racionais não inteiros.

Foram escolhidas quatro situações diferentes, mas apenas uma envolvia fração. Apesar de nosso foco estar totalmente centrado nas frações, entendemos que seria interessante oferecer uma variedade de situações desafiadoras para as estudantes. A aula gerou o engajamento imaginado, e apesar de alguns problemas não terem provocado as discussões esperadas, considera-se que foi produtivo oferecer essa diversidade.

No problema das melancias, tínhamos como hipóteses: (i) que a maioria ainda não chegaria em uma representação numérica; (ii) que o termo metade iria aparecer em todos os grupos; (iii) com relação ao termo “um quarto”, que alguns estudantes poderiam usar esse termo, enquanto outros poderiam chamar de “metade da metade” ou “pedaço”.

2. Descrição da terceira e quarta aula

Novamente, optou-se por descrever e analisar de forma conjunta a terceira e a quarta aula, por apresentarem uma continuidade.

Iniciei a aula retomando a discussão do problema da melancia. Projetei a imagem na lousa e escrevi: *“4 melancias e um quarto”, “3 melancias, 2 metades e quarto”*, e retomei a discussão sobre o porquê daquele pedaço ser chamado de um quarto. Em seguida pedi para que eles discutissem as duas possibilidades novamente, e os estudantes levantaram a mão para participar.

“São três melancias, duas metades e um quarto. A gente nem sabe se as duas metades são da mesma melancia!”
“Também acho que não é a mesma coisa. Se for viajar, a melancia partida estraga mais rápido!”
“O problema não está especificando, pode ser as duas respostas, eu acho.”
“Se a banca vende em pedaços, pode ser quatro melancias e um quarto. A dona queria saber o total. Pode ser que no dia seguinte ela até corte uma das melancias que está inteira em dois pedaços.”

A partir dos relatos, perguntei se as duas respostas poderiam estar corretas, e alguns estudantes afirmaram que sim, mas outros ficaram em dúvida. Então, mudei a pergunta: *“Alguma dessas está errada?”*. Disseram que não, entrando em acordo.

Em seguida, escrevi na lousa: “4”; “2 x 2”; “8 : 2” ; “quatro”, e perguntei se todas as formas representavam a mesma quantidade. A turma disse que sim, e afirmei que existem várias formas de representar o mesmo número. Depois disso expliquei que as duas formas apresentadas sobre o problema das melancias não eram iguais, mas representavam a mesma quantidade de melancias.

Celina ainda não estava convencida, e comenta: *“Mas se eu tiver quatro lapiseiras e depois quebrar uma ao meio? Aí não é a mesma coisa!”*

Maria fala: *“Mas com melancia é diferente!”*

A turma começa a se dispersar, e por isso sugiro que eles passem à próxima etapa da aula, mas Celina ainda comenta: *“É, para melancia pode até ser...”*

Depois disso, perguntei sobre quais números eles haviam estudado até então na escola, e eles responderam:

> *“Números grandes! Até bilhão!”*
> *“Sim, até um bilhão. Na verdade, até mais, né? Dez bilhões, cem bilhões.”*
> *“Zero, um, dois, três e por aí vai!”*

Em seguida, disse que os números que havíamos estudado fazem parte do conjunto dos números naturais, e perguntei se com esses números a gente conseguiria resolver problemas como o da melancia. Rapidamente, os estudantes disseram que não. Assim, contei para a turma que iríamos estudar os números que representavam os “pedaços”, as frações, e alguns estudantes ficaram animados com a notícia.

Depois disso, expliquei que iríamos resolver outro problema, o qual é apresentado a seguir, mas agora eles iriam trabalhar em trios.

Problema

Elizabeth comprou dez cocadas para seus cinco sobrinhos que iriam visitá-la. Quando eles chegaram na sua casa, um deles havia trazido um amigo. Como Elizabeth pode dividir as cocadas entre as seis crianças, de forma que cada uma receba a mesma quantidade e não sobre nenhum pedaço?

Fonte: Elaborado pela autora, adaptado de Bertoni, 2009

Ao propor o problema, expliquei que eles precisariam pensar juntos, e informei que iria entregar alguns retângulos de papel que poderiam ser utilizados como um material de apoio. Orientei que registrassem a resposta no caderno, mas que também precisariam registrar em uma folha de respostas do grupo (meia folha sulfite), e por isso o grupo precisaria chegar a um consenso na elaboração das respostas.

Em seguida, alertei-os sobre a necessidade de serem cuidadosos com o registro do raciocínio matemático, para que quando compartilhassem as respostas os colegas pudessem compreender a estratégia de resolução utilizada apenas lendo a resolução, sem que precisassem pedir explicações.

Depois disso, separei os estudantes em trios e comecei a distribuir os materiais. Logo em seguida Clarissa grita: *“O Eduardo já sabe! É 1, (inaudível)!”*. Nesse momento, ressaltei que cada grupo precisaria discutir e registrar a sua resposta. Talvez tenha sido por influência da fala do estudante Clarissa, mas vários estudantes começaram a tentar fazer pelo algoritmo, dividindo dez por seis. Após alguns minutos um grupo me chamou:

Bárbara: *“É 1,1 para cada!”*

P: *“Por quê?”*

Bárbara: *“A gente fez a conta”* [Mostram a conta]:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \cline{2-2} 4 & 1,1 \\ 0 & \end{array}$$

P: *“Como vocês pensaram nessa conta?”*

Bárbara: *“Ah, 10 dividido por 6 é 1, sobra 4. Aí coloca a vírgula e é mais 1.”*

P: *“Não entendi...”*

Bárbara: *“Na verdade, a gente ouviu a resposta do Eduardo...”*

P: *“Tudo bem, mas cada um deve pensar e discutir com o seu grupo. O Eduardo não é desse grupo...”*

Bárbara: *“Mas tá certo?”*

P: *“Não, a conta está errada. Por que vocês não usam os papéis?”*

Em seguida, continuei a circular pela sala, e observei que alguns grupos haviam percebido rapidamente que cada um receberia uma cocada inteira e sobrariam quatro cocadas.

Bruno: *“Mas o que a gente faz com as cocadas que sobram?”*

P: *“Não dá para partir?”*

Bruno*: “Pode cortar a folha?”*

P: *“Pode, claro”*

Bruno: *“Ah, fica mais fácil.”*

Um grupo resolve dar uma cocada para cada e partir as três que sobraram ao meio.

Melissa: *“Mas agora sobrou uma...”*

P: *“O que vocês podem fazer?”*

Melissa*: “Se dividir ao meio não adianta.”*

P: *“E se vocês dividirem de outro jeito?”*

Melissa: *“Pode?”*

P: *“Claro!”*

Diana: *“Vamos dividir em seis!”*

Melissa: *“Isso! Fica um para cada, pronto.”*

Diana: *“Mas como a gente junta? Uma cocada, metade e um sexteto. É um sexteto que fala?”*

P: *“Um sexto.”*

Diana: *“Um sexto. Como que eu junto a metade com um sexto? Vira o quê?”*

P: *“Mas precisa juntar?”*

Diana: *“Não precisa?”*

P: *“Não necessariamente.”*

Melissa: *“Então fica assim: uma cocada, uma metade e um sexto. Pode ser assim?”*

P: *“Pode. Agora pensem como vocês vão registrar o raciocínio.”*

Alguns grupos continuavam tentando fazer pelo algoritmo. Amanda, uma estudante que muitos desafios a serem superados em matemática, me chamou, muito feliz, e disse:

Amanda: *“Eu acho que a gente descobriu!”*

P: *“Como?”*

Amanda: *“Cada um recebe uma cocada inteira.”* [Distribui seis retângulos.]

P: *“Certo.”*

Amanda: *“Aí sobram quatro. A gente dividiu em três partes cada, um terço né? Aí cada um recebe dois desses.”* [Distribui dois terços para cada.] *“Uma cocada e dois terços. Tá certo?”*

P: *“Sim! Parabéns! Agora pensem como irão registrar.”*

O primeiro grupo me chamou novamente. Os integrantes cortaram os papéis, mas não mediram, nem usaram tesoura, então os pedaços estavam de tamanhos desiguais e tortos.

Bárbara: *“Quatro pedaços para cada.”*

P: *“Mas qual o nome dos pedaços?”* [Não sabem dizer]. *“Juntem os pedaços e me expliquem em quantas partes vocês dividiram.”*

As crianças explicaram que partiram todos ao meio, deram três metades para cada. Depois, partiram as duas metades que sobraram em três, e deram uma para cada.

P: *“Então, três metades e como chamamos esse menor?”*

Bárbara: *“De seis partes, sexto?”*

P: *“Isso.”*

Bárbara: *“Então três metades e um sexto.”*

A sala estava agitadíssima: crianças falando, cortando papel, fazendo contas, desenhando. Vários gritavam: “É impossível!”; “Não dá para dividir 10 por 6!”

Carlos se sentou na mesa do computador, abriu a calculadora e fez a conta dez dividido por seis. Apareceu o resultado: 1,6666666667, e ele gritou: *“É 1,66666666667!!!”*. Com a situação, dei risada, e pedi que voltassem para os lugares e entregassem a folha de respostas, e comentei que seria discutido na próxima aula e então liberei a saída para eles.

Na aula seguinte, iniciei a aula com as resoluções do dia anterior coladas na lousa, e expliquei que iríamos discutir as respostas e a comunicação das estratégias. Pedi que Fabiane relesse em voz alta o problema. Enquanto ela fez a leitura, fui anotando na lousa as informações: “10 cocadas” ; “6 crianças”, e em seguida perguntei: *“se fossem cinco crianças, como a Elisabeth iria dividir?”*. Arthur não hesitou em responder: *“Aí era fácil, duas para cada!”*

Posteriormente, perguntei se algum grupo desejava explicar como os integrantes haviam pensado. Amanda levantou a mão, e Melissa também. Bianca, que era do mesmo grupo que

Amanda, também levantou a mão, mas ao olhar para ela, que já estava com uma postura confiante, disse para que falasse, e então abaixou a mão.

Amanda: *"Nós pensamos assim: uma cocada para cada criança. Sobraram quatro. Aí, dividimos cada uma em três partes. Ficaram doze pedaços, demos dois para cada."*

P: *"Eu estou com os papéis do seu grupo aqui, Amanda. Vou colar na lousa representando o que cada criança recebeu"* [colei os papéis] *"Foi isso?"*

Amanda: *"Uma cocada e dois terços."*

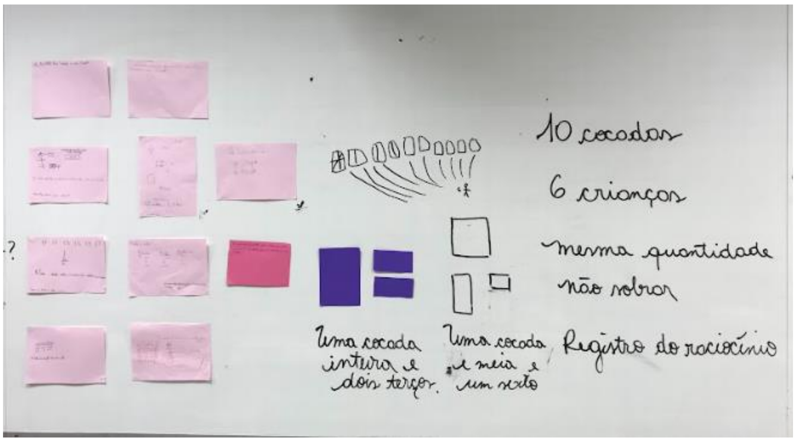
Solicitei que outro grupo explicasse como pensou.

Melissa: *"A gente deu uma cocada para cada. Sobraram quatro. Aí a gente dividiu três ao meio. Demos uma metade para cada, sobrou uma. A gente dividiu essa que sobrou em seis partes."*

P: *"Ótimo! Quando cada um recebeu?"*

Melissa: *"Uma cocada e meia e um sexto."*

Figura 19 - Painel de soluções na lousa

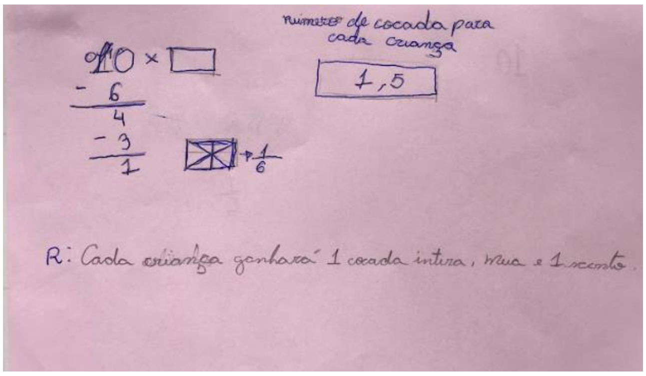


Fonte: arquivo pessoal - foto tirada pela pesquisadora

A maioria dos grupos chegou a essa solução, e aproveitei para lembrá-los de que, além da resposta correta, havíamos combinado que eles teriam que prestar atenção no registro do raciocínio. Comentei que iria mostrar os diferentes registros feitos por eles para nossa discussão.

A seguir, avisei que iria copiar alguns registros com letras maiores na lousa para que pudessem ser analisados. Copiei o primeiro, o qual é apresentado na Figura 20.

Figura 20 – Resolução do problema[9]



Fonte: arquivo pessoal - foto tirada pela pesquisadora

Após registrar a resolução em tamanho maior, alguns estudantes ficaram confusos e não conseguiam entender o raciocínio do grupo. Assim, aproveitei o momento e solicitei que uma pessoa do grupo explicasse o registro feito, e Gabriel levantou a mão para fazer a explicação.

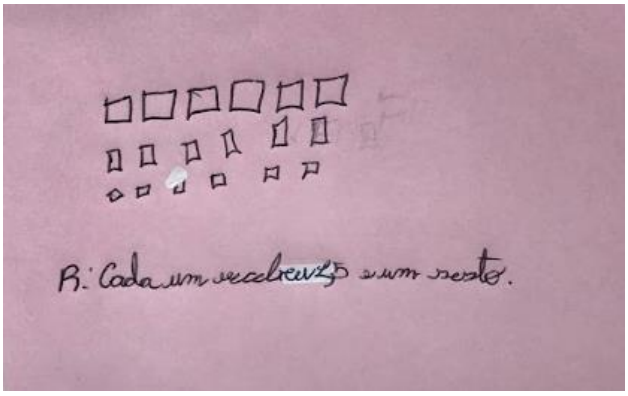
Gabriel: *"A gente deu uma para cada. Sobraram quatro. Demos metade para cada, sobrou uma. Aí dividimos em seis. Ficou uma cocada, metade e um sexto."*

P: *"Ah, entendi. O registro está ótimo, mas algumas etapas não conseguimos entender sem vocês explicarem. Vamos acrescentar algumas informações para ver se fica mais fácil de entender?"*

Após os diálogos, fui retomando a explicação de Gabriel e acrescentando novos elementos no registro, e então perguntei se agora a turma conseguia compreender. Todos responderam que sim, portanto, passei para um outro registro, representado na figura 21.

[9] Na resposta se lê: "Cada criança ganhará 1 cocada inteira, meia e 1 sexto."

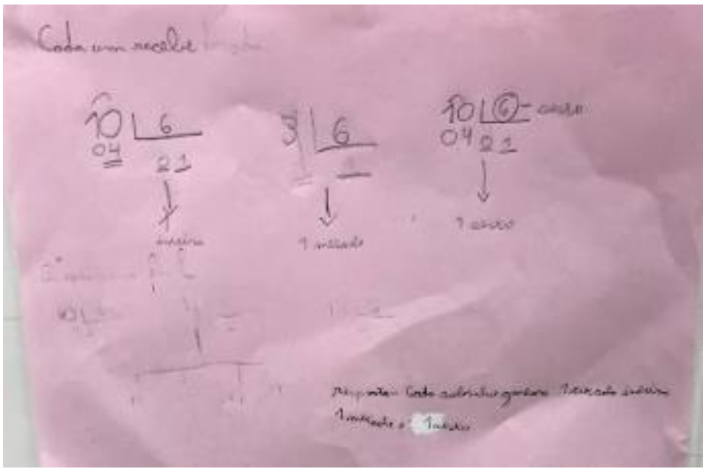
Figura 21 – Resolução de problema[10]



Fonte: arquivo pessoal - foto tirada pela pesquisadora

Perguntei se com o registro deste grupo todos conseguiam entender o raciocínio. A turma responde que sim. Passei para o próximo.

Figura 22 – Resolução do problema[11]



Fonte: arquivo pessoal - foto tirada pela pesquisadora

Questionei se essa resolução estava compreensível, e a turma respondeu que estava mais ou menos. Em seguida, pedi que Joaquim explicasse o processo de resolução.

Joaquim: *"A gente dividiu uma para cada, sobrou quatro. Dividimos três ao meio. Depois a que sobrou dividimos em seis, um sexto para cada."*

---

[10] Na resposta se lê: "cada um recebeu 1,5 e um sexto".

[11] Na resposta se lê: "Cada criança recebe 1 cocada inteira, 1 metade e 1 sexto."

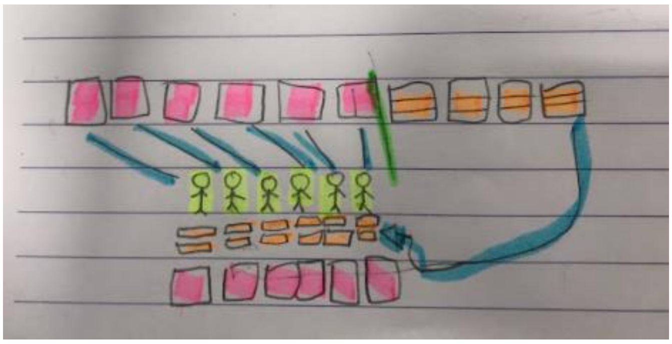
Depois disso, perguntei quais foram as respostas encontradas para o problema, e anotei na lousa as três possibilidades: “Uma cocada, metade e um sexto. Uma cocada e dois terços. Três metades e um sexto”.

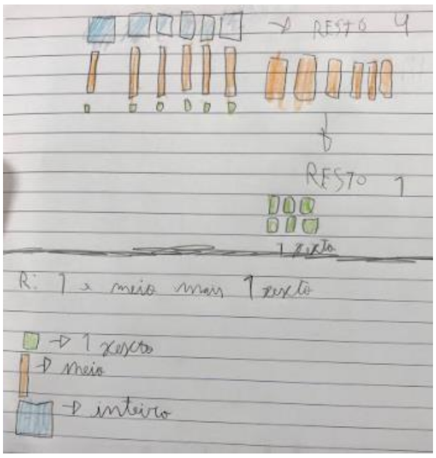
Orientei que cada um deveria retomar o seu registro feito no caderno e fazer as modificações necessárias para que o registro fosse compreendido sem a necessidade de outras explicações.

Assim, os estudantes começaram a rever os registros e a realizarem as modificações necessárias. Vários optaram por refazer completamente a resolução. Durante esse momento, juntamente com as assistentes, passei a circular pela sala, checando os registros, ajudando com as dúvidas e dando sugestões.

Após observar o que estavam fazendo, pedi que respondessem ao seguinte questionamento no caderno: *“Como posso melhorar a qualidade dos meus registros?”*. Os estudantes começaram a responder, enquanto fui orientando que organizassem os materiais e se preparassem para a próxima aula.

Figura 23 – Registros no caderno após a discussão





Fonte: arquivo pessoal - fotos tiradas pela pesquisadora

2.1 Nossas hipóteses sobre o processo de aprendizagem da terceira e quarta aulas

Acreditávamos que o problema seria desafiador, já que até mesmo para adultos não apresenta uma resposta imediata. Imaginávamos que todos os alunos iriam utilizar os retângulos de papel para representar as cocadas, o que não ocorreu. Não prevemos que vários estudantes iriam tentar fazer pelo algoritmo da divisão. Achamos que essa estratégia surgiu a partir da influência da fala em voz alta de Eduardo, que logo no começo da resolução diz em voz alta um número com vírgula.

Algo que não imaginávamos é que alguns alunos com muitos desafios em matemática iriam conseguir resolver o problema de forma mais rápida do que outros colegas. O uso do material concreto pareceu favorecer determinadas crianças.

Imaginamos que o registro da resolução seria um grande desafio para a turma. Como foi o primeiro registro de um problema envolvendo frações, achamos que haveria muitas dúvidas a respeito de como fazer essa representação. Achávamos fariam uma representação com desenhos, mostrando as crianças e os pedaços de cocadas. Previámos que teriam dificuldade para precisar os tamanhos dos pedaços. Não pensamos que poderiam representar com um registro semelhante ao algoritmo da divisão, o que foi bem surpreendente.

3. Descrição da quinta aula

A primeira parte da aula foi dedicada a uma atividade de outra frente de matemática, que não será descrita por não estar relacionada com frações. Na segunda parte, pedi que os estudantes retomassem a resposta que escreveram na aula anterior, sobre o que poderiam melhorar nos registros de resolução de problemas, e expliquei que eles deveriam considerar suas respostas para resolver outros dois problemas, envolvendo frações.

1. *Marco ganhou uma barra de chocolate e gostaria de comer no lanche com quatro amigos. Todos devem comer a mesma quantidade e não pode sobrar nenhum pedaço.*

a. Faça um desenho representando como ele pode fazer essa divisão.
b. Quanto cada um irá comer?
c. Você dividiu a barra em quantos pedaços?

2. Sônia resolveu fazer uma torta para o lanche da tarde e dividir igualmente para dar aos 4 filhos. Só que não esperava a chegada de 4 amigos, que também resolveram lanchar. Como a mãe poderia fazer para que todas as crianças comam a mesma quantidade?

Fonte: Adaptado de Bertoni, 2009.

Após entregar os problemas para eles, expliquei que no problema do chocolate as estudantes poderiam desenhar uma barra no formato que quisessem, e não precisariam usar o chocolate da foto para fazer a divisão. Depois, anotei na lousa alguns aspectos que eles deveriam considerar no momento da resolução: *(i) Comunicação do raciocínio; (ii) Qualidade do registro; (iii) Uso da régua.*

No primeiro problema, algumas estudantes perguntaram se poderiam fazer uma barra de chocolate com quantos pedaços quisessem, e afirmei que sim.

Bernardo: *"Pode ser dez, cinco?"*

P: *"Pode."*

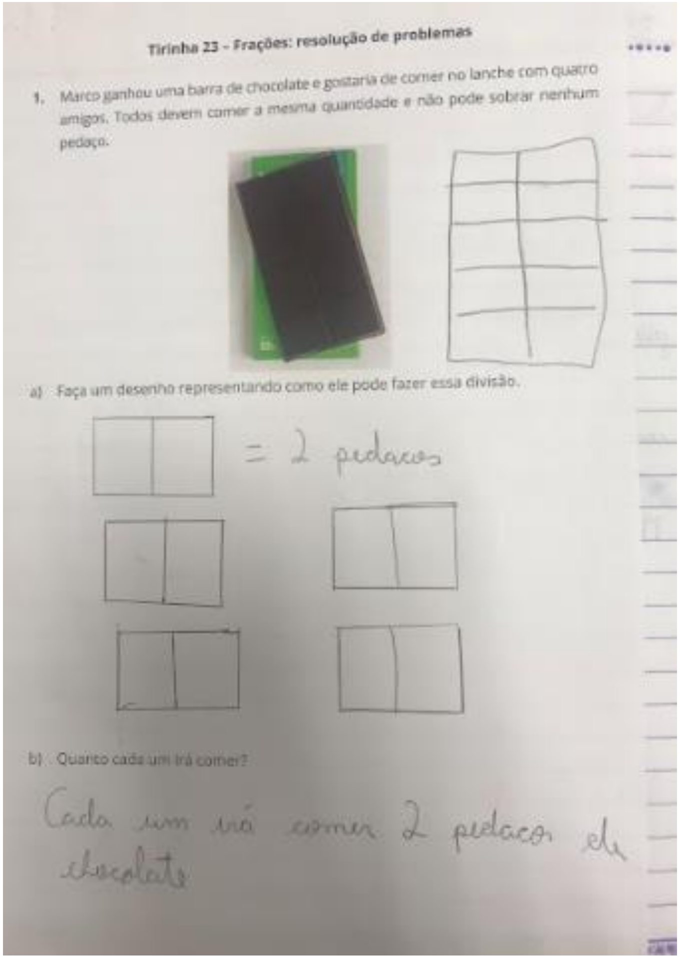
Bernardo: *"Ah, então tá fácil!"*

Alguns estudantes fizeram uma barra dividida em cinco e foram dando um pedaço para cada. Outros fizeram uma barra de dez pedaços, e cada criança recebeu dois pedaços. No entanto, vários grupos fizeram como o modelo da foto: oito pedaços para cinco crianças.

O problema da torta se mostrou menos desafiador. A maioria dos grupos respondeu rapidamente que bastaria dividir a torta em oito pedaços, e alguns grupos pediram que eu confirmasse se o nome do pedaço era um oitavo. A seguir, finalizei a aula, e comentei que as resoluções seriam discutidas no dia seguinte.

Na aula seguinte, iniciei a aula retomando o problema dos chocolates, e então solicitei que alguns estudantes escrevessem a resolução na lousa e explicassem o raciocínio aos colegas. Fernando explicou que fizeram uma barra com dez quadradinhos, e que cada criança recebeu dois pedaços.

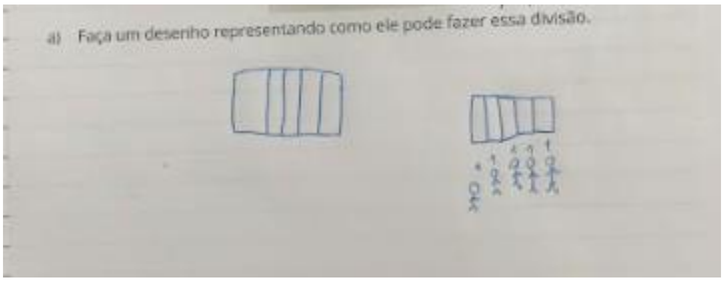
Figura 24 – Resolução do problema



Fonte: arquivo pessoal - foto tirada pela pesquisadora

Marina desenhou um retângulo na lousa, dividiu-o em cinco partes equivalentes e disse que cada criança recebeu um quinto.

Figura 25 – Resolução do problema



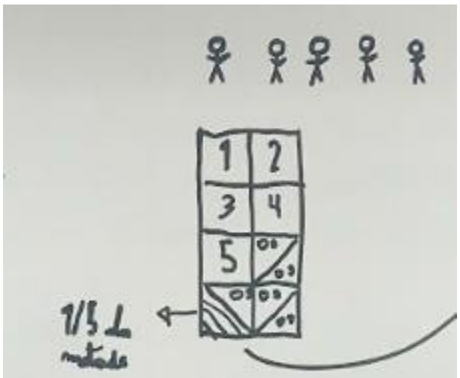
Fonte: arquivo pessoal - foto tirada pela pesquisadora

Diana foi até a lousa e disse que haviam usado a imagem como referência, então dividiram um chocolate de oito quadradinhos, e comentou:

"Cada um recebeu um quadradinho, metade de um quadradinho e um quinto da metade do quadradinho."

A figura 26 mostra a resolução da estudante Diana no quadro.

Figura 26 – Resolução do problema na lousa



Fonte: arquivo pessoal - foto tirada pela pesquisadora

Ao olhar para o registro de Diana, Maria comenta:

Maria: *"Não vale! Tem um quinto que é muito menor que o outro! Isso não é justo!"*

Nesse momento, perguntei se haveria uma outra forma de dividir esse último quadradinho, e Bernardo se levantou, foi até o quadro e desenhou um retângulo, depois dividiu-o ao meio e novamente dividiu a metade em cinco partes equivalentes. A figura 27 é o registro da representação feita por Bernardo no quadro.

Figura 27 – Resolução do problema na lousa

Fonte: arquivo pessoal - foto tirada pela pesquisadora

Em seguida, travou-se o seguinte diálogo:

Bernardo: *"Pronto, agora vai ficar igual."*

Diana: *"Ju, a gente vai chamar esse pedacinho de um quinto da metade mesmo?"*

P*: "O que vocês acham?"*

Bernardo: *"Pode ser um décimo, né?"*

Diana: *"Por quê?"*

Bernardo: *"Se dividirmos todo o quadradinho em dez partes, fica desse tamanho aí."*

Diana: *"Não entendi."*

Após o diálogo, Bernardo foi até a lousa e fez a divisão da outra metade em cinco partes, como pode ser observado na Figura 28.

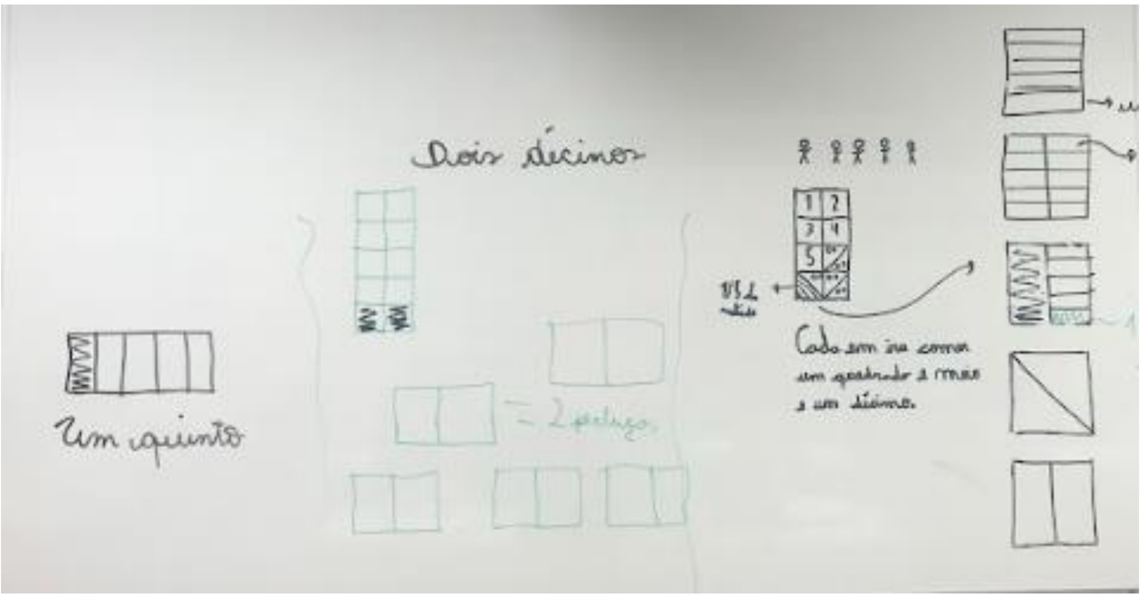
Figura 28 – Resolução do problema na lousa

Fonte: arquivo pessoal - foto tirada pela pesquisadora

Após o registro na lousa, Diana comenta: *"Ah, é mesmo! Um décimo então é metade de um quinto, né?"*. Após sua observação, confirmo que a interpretação dela está correta, e começo a discutir a outra tarefa.

A Figura 29, a seguir, contém os diferentes registros que foram feitos pelos grupos na lousa.

Figura 29 – Painel de soluções na lousa



Fonte: arquivo pessoal - foto tirada pela pesquisadora

3.1 Nossas hipóteses sobre o processo de aprendizagem da quinta aula

No problema do chocolate, apesar de termos colocado uma imagem de um chocolate com oito pedaços, imaginávamos que as crianças desenhariam uma barra dividida em dez ou cinco partes iguais. Algumas usaram essa estratégia, porém a maioria utilizou a imagem com oito partes como base, o que se mostrou positivo, já que o problema fica mais desafiador dessa forma e rendeu muitas discussões.

Um grupo percebeu que na imagem aparece a informação de que a barra tem 100 gramas e respondeu que cada criança comeria 20 gramas. Não havíamos previsto essa possibilidade.

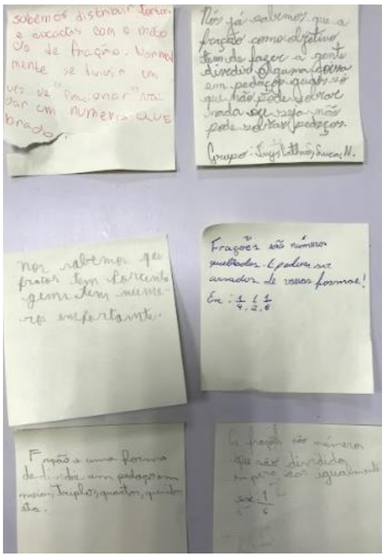
Com relação ao problema da torta, imaginávamos que os alunos usariam a imagem como base, dividindo primeiramente em quatro partes e depois dividindo cada parte na metade. No entanto, acreditávamos que essa solução chegaria após um tempo de reflexão e discussão, o que não ocorreu, já que praticamente todos fizeram essa resolução de forma imediata.

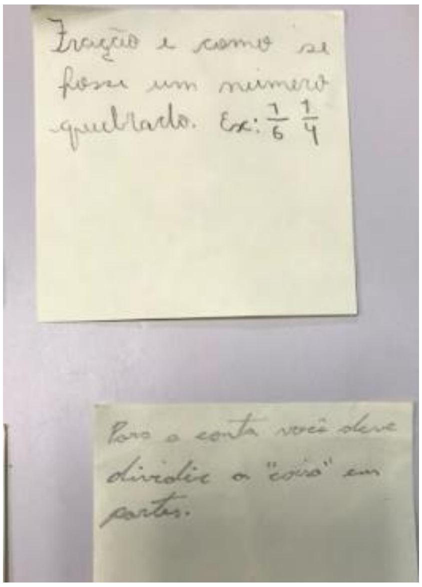
4. Descrição da sexta aula

Iniciei esta aula retomando o problema dos chocolates e, em seguida, solicitei aos estudantes que se separassem em trios, e escrevessem em um *post-it* o que já haviam aprendido sobre frações. Expliquei que essa etapa era uma preparação para um registro coletivo, e informei que eles tinham dez minutos para que escreverem seus comentários. Conforme iam terminando, os estudantes colavam os *post-its* no canto da lousa.

A Figura 30 contém alguns *post-its* com as anotações realizadas.

Figura 30 – Post-its com anotações dos estudantes



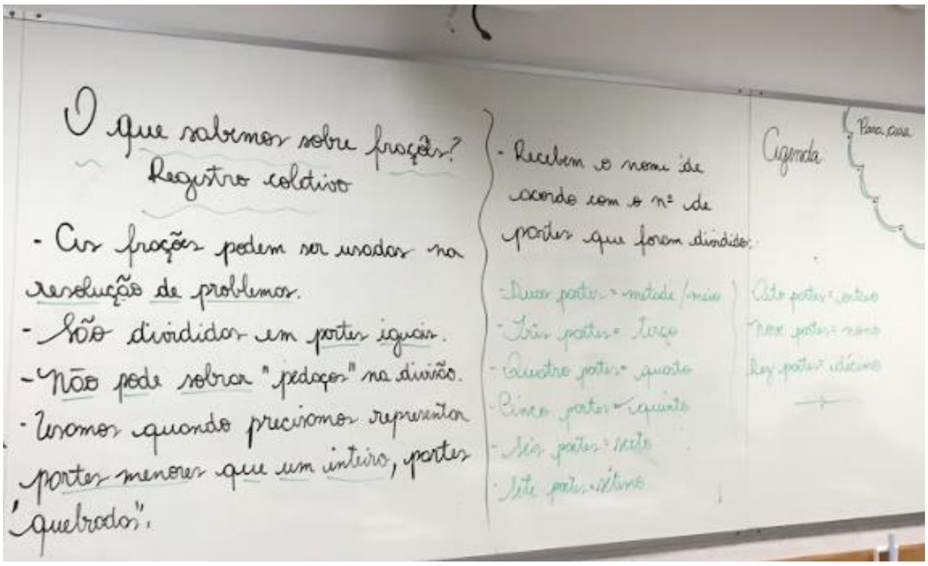


Fonte: arquivo pessoal - foto tirada pela pesquisadora

Após os estudantes colarem os *post-its* na lousa, passei a lê-los em voz alta. Em seguida, perguntei se eles poderiam agrupar os *post-its* que apresentam ideias parecidas, e alguns estudantes pediram para ajudar na organização. A partir dessa organização, começamos a elaborar o texto, com a colaboração das estudantes, que iam dando sugestões sobre o que deveria estar escrito, formas de organização e exemplos. Após a finalização do registro, as estudantes anotaram no caderno.

A Figura 31 apresenta o registro coletivo que foi realizado na lousa.

Figura 31 – Foto do registro coletivo na lousa



Fonte: arquivo pessoal - foto tirada pela pesquisadora

4.1 Nossas hipóteses sobre o processo de aprendizagem da sexta aula

Nessa aula, imaginávamos que teriam certa dificuldade para registrar o que já haviam aprendido até o momento, o que efetivamente aconteceu. Acreditamos que iriam aparecer principalmente observações a respeito da importância das frações para resolver determinados problemas; que o nome da fração deriva do número de partes em que foi dividida; que os pedaços deveriam "ser do mesmo tamanho"; que não podiam sobrar pedaços.

5. Descrição da sétima aula

Iniciei a aula explicando que eles fariam uma receita de massinha de modelar, e a turma ficou muito animada. Para começar, projetei a receita na lousa (Figura 32) e perguntei se eles conheciam aqueles registros numéricos, e eles disseram que sim, respondendo que conheciam "metade" e "um quarto".

Figura 32 – Tarefa para a massinha de modelar

Nas últimas semanas, resolvemos diversos problemas com frações. Agora iremos refletir sobre as diversas formas de representar um número fracionário. Para isso, vamos analisar uma receita:

Leia a receita abaixo:

Massinha caseira

Ingredientes

- *¼ de xícara de sal;*
- *½ xícara de água;*
- *½ colher de sopa de óleo;*
- *1 xícara de farinha de trigo branca;*
- *2 colheres de sopa de tinta guache.*

Modo de preparo

- *Coloque o sal e a farinha de trigo em uma bacia e faça uma cova (buraco) no centro.*
- *Adicione a água e o óleo na cova e comece a misturar com uma colher.*
- *Amasse com as mãos até ficar bem macia. Se estiver muito grudenta, acrescente um pouco mais de farinha aos poucos.*
- *Acrescente a tinta guache da cor desejada e amasse até que ela seja totalmente absorvida.*

1. Grife na receita todas as informações numéricas.

2. O que significa ½ xícara de água? Represente graficamente na imagem abaixo. Lembre-se de utilizar a régua.

3. O que significa ¼ de xícara de sal? Represente graficamente na imagem abaixo. Lembre-se de utilizar a régua.

4. Você já havia observado antes alguma outra representação de números fracionários? Discuta com seus colegas e registre abaixo.

5. Nós faremos a receita de massinha no laboratório. Trabalharemos em quartetos. A receita apresentada é o suficiente para duas estudantes. Discuta com seu grupo e reescreva a lista de ingredientes adaptando para quatro estudantes. • ____________________ *de sal;* • ____________________ *de água;* • ______________________ *de óleo;* • ______________________ *de farinha de trigo branca;* • ______________________ *de tinta guache.*

Fonte: Arquivo pessoal – elaborado pela pesquisadora

Logo depois, mostrei os exercícios e solicitei que se organizassem em quartetos para realização da tarefa. Orientei que deveriam fazer a ficha antes de irmos para o laboratório para fazerem a receita. Os estudantes trabalharam em grupo, enquanto eu e as assistentes circulávamos pela sala.

No primeiro exercício, eles não apresentaram dificuldades para reconhecer as representações numéricas. No exercício número 2, também identificaram a metade com facilidade. Alguns usaram régua para medir a xícara e dividir com maior precisão.

Em um grupo, Vinícius, Bernardo e Bruno dividiam sem usar a régua, e então Danilo pegou uma régua e disse: *"Cinco centímetros, dois e meio para cada. Temos que ter precisão."* Para dividir a segunda xícara, Vinícius e Bernardo começaram a dividir sem levar em consideração que era uma xícara de sal, fazendo uma linha horizontal e outra vertical.

Questionei: *"Vocês conseguirão colocar o sal dessa forma?"*. Bruno então fala: *"Não dá, né?"*. Vinícius olhou a representação de Danilo e apagou o seu. Já Bernardo havia feito de caneta, então ficou irritado com o comentário, rabiscou e fez da forma correta.

Bruno falou: *"Um quarto é metade da metade, né? Mais ou menos aqui."* e marcou um quarto na xícara. Danilo pegou a régua novamente e disse: *"Essa xícara também tem 5cm, não consigo dividir por 4, vai ficar um e pouco."*. Vinícius ficou observando, e disse que estava bom.

Na questão 3, a maioria dos estudantes afirmou ter visto frações em receitas, alguns disseram que já haviam visto nos materiais dos irmãos mais velhos, enquanto outros comentaram do filme do Harry Potter, onde há uma plataforma 9 ¾.

No exercício 5, que pedia que fosse dobrada a receita, alguns estudantes perguntaram se poderiam colocar metade no lugar do $\frac{2}{4}$, e então comentei que sim. Alguns as estudantes acharam que o dobro de $\frac{1}{4}$ é $\frac{1}{8}$, e então pedi para que eles pintassem na caneca como seria $\frac{1}{8}$.

Em seguida, expliquei que "dobrar a receita" significava colocar mais uma vez a mesma quantidade de sal, e perguntei se a quantidade que fizeram representava o dobro de $\frac{1}{4}$. Fiz um desenho na lousa explicando, e os estudantes afirmaram que compreenderam. Sendo assim, realizei a correção da ficha, li a autoavaliação com os estudantes e conversei com eles sobre o comportamento esperado no laboratório.

Logo depois, fomos todos ao laboratório, onde a técnica do laboratório aguardava a turma. A técnica deu algumas instruções sobre a organização da atividade, e os estudantes fizeram fila para pegar os ingredientes. A receita ficou projetada na lousa, eles pediam a quantidade de cada ingrediente e eu solicitava que indicassem na xícara até onde deveria colocar o ingrediente.

A aula correu com tranquilidade. A turma aproveitou muito, ficaram felizes. Alguns, inclusive, ressaltaram que tinha sido a melhor aula do ano, e pediram para que eu fizesse aulas assim mais vezes. No final, organizaram o espaço de trabalho, dividiram a massinha e guardaram no saquinho para levar para casa.

5.1 Nossas hipóteses sobre o processo de aprendizagem da sétima aula

Sabíamos que a aula causaria muita animação, pois já havíamos realizado a proposta da massinha no ano anterior, porém com um encaminhamento diferente. Achamos que todas as crianças conheceriam o registro numérico de $\frac{1}{2}$, mas o fato de todos conhecerem a representação $\frac{1}{4}$ não foi previsto. Imaginamos que os alunos não teriam dificuldades em marcar $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ na xícara. O fato de algumas crianças não considerarem que era uma xícara de farinha e que isso influenciaria na divisão da xícara nos surpreendeu. Também foi uma surpresa que alguns grupos acharam que o dobro de $\frac{1}{4}$ seria $\frac{1}{8}$. Entendemos o motivo desse erro (quatro é o dobro de oito), mas em um contexto tão concreto, não achávamos que teriam esse raciocínio.

6. Descrição da oitava aula

Iniciei esta aula perguntando se todos haviam entendido o que significava um número ser divisor de 2. Joaquim respondeu: *“é um número que dá para dividir por 2”*, e em seguida Eduardo comentou que seriam os números pares. Bárbara perguntou se poderia ter resto na divisão, e eu afirmei que não poderia, ou seja, que são os números que conseguimos dividir de forma inteira, sem resto, por 2.

Em seguida, solicitei que, individualmente, eles resolvessem o problema 26, do Caderno de Problemas, e comentei que eles teriam 15 minutos para esta etapa, sendo que nos primeiros 7 minutos eles deveriam tentar resolver sozinhos, e que depois disso poderíamos ajudar com as dúvidas.

Problema 26, do Caderno de Problemas

No lançamento de um dado de seis faces, numeradas de 1 a 6, responda:
a) Qual é a chance de o resultado ser 5?
b) Qual é a chance de o resultado ser um número menor que 5?
c) Qual é a chance de o resultado ser um divisor de 2?

Fonte: Caderno de Problemas

Os estudantes começaram a resolver o problema individualmente, sem apresentar muita dificuldade, mas alguns estudantes pediam ajuda para elaborar a resposta, pois não sabiam como se expressar. Arthur, por exemplo, me chamou e disse: *“Eu sei o que ´tá´ falando, mas não entendi como que posso escrever. A chance de cair vai depender da sorte, ´né´? Então como eu vou poder saber?”*.

A partir desse comentário, solicitei aos estudantes que considerassem que todos os números teriam a mesma chance de sair, porque é aleatório. Arthur então disse: *“Pode ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Então pode cair o 5, mas também pode cair qualquer outro. Não entendi.”* Perguntei, então, se haveria diferença se o dado tivesse 12 faces, por exemplo.

Arthur, respondeu: *“Doze? Aí era mais difícil sair o 5. Quanto mais faces, mais difícil sair um número. Então vai depender da quantidade.”* Assim, concordei com a afirmação dele, e pedi que tentassem elaborar uma resposta.

Após os 15 minutos combinado, solicitei que eles se reunissem em trios para comparar as suas respostas. Em um trio estava Celina, Maria e Carlos e logo começaram a comparar as respostas, provocando o seguinte diálogo:

Celina*: "Na letra (b) a chance é maior. Porque pode ser o 1, 2, 3 e 4. Na letra (a) só pode ser o 5. Eu coloquei na (a) assim, que a chance é pequena."*

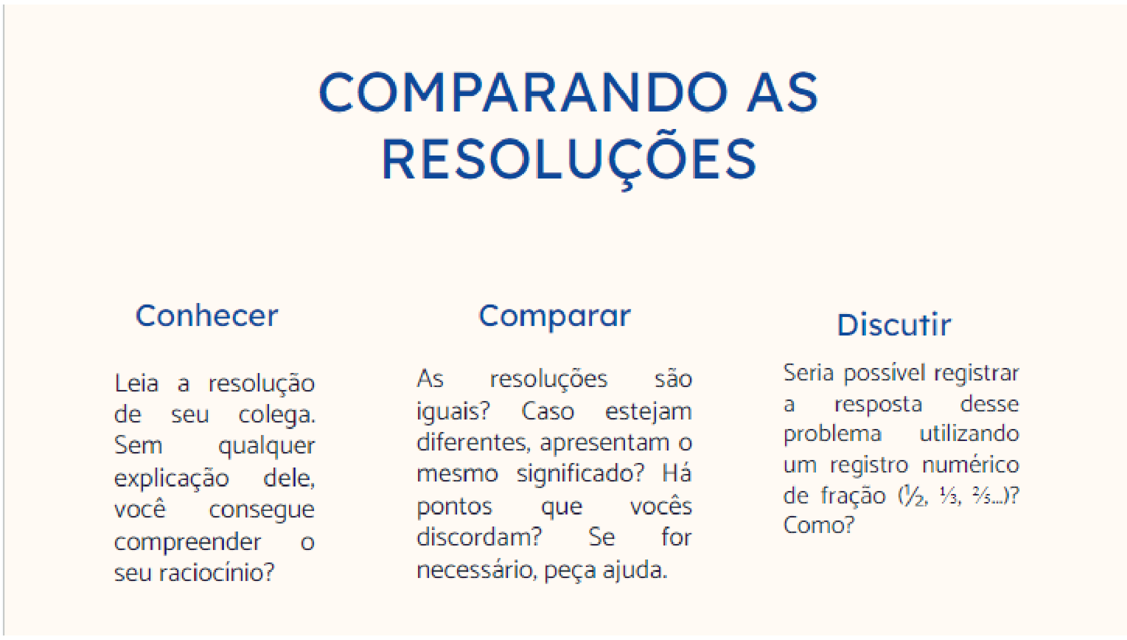
Carlos: *"Eu também falei que a chance é pequena* e na (b) *que a chance é bem grande."*

Maria: *"Mas não é tão pequena assim. Porque quando você ´tá´ jogando algum jogo que tem o dado, aí sempre vai ter alguma hora que cai todos os números. Nunca tem um jogo que só sai dois números."*

Celina: *"É, pode ser. Mas ´tá´ perguntando qual a chance. Mas aí também não dá para saber exato ´né´?"*

Projetei um slide com instruções para que os estudantes comparassem as respostas, o qual é apresentado na Figura 33.

Figura 33 – Slide com orientações para comparação das respostas



Fonte: elaborado pela pesquisadora

Os estudantes ficaram em dúvida sobre como poderiam registrar a resposta com frações, e então Clarissa me chamou e comentou: *"Como que isso vira uma fração? Não estou* *entendendo o que tem a ver.”* Antes de responder, pedi que ele e os demais discutissem com os colegas do trio para pensarem em uma solução.

Em seguida, Gabriel comentou: *“Eu acho que a letra a deve ser um quinto, por causa do cinco.”* e Melissa discordou: *“Eu acho que não, porque aí a letra b vai ser o que? 1,2,3,4 quintos? Não faz sentido.”* Após essa discussão, sugeri que eles anotassem quais são os números que podem sair quando jogamos um dado de seis faces. Eles anotaram os números de 1 a 6 no papel.

Depois disso, perguntei: *“E agora? Na letra (a), qual o resultado que vocês querem que saia?”*. Responderam que era o número 5. Melissa circulou o número 5, enquanto Gabriel falava: *“Ah! Então é um número né? Pode ser seis, mas a gente quer um só. Então um de seis, um sexto?”*. Perguntei se os outros concordavam, e todos disseram que sim. Dessa, forma, solicitei que elas fizessem o mesmo para as letras (b) e (c).

Após alguns minutos, iniciamos uma discussão coletiva. Perguntei se todos haviam descoberto uma forma de representar as respostas com frações, e a maioria dos estudantes concordou.

Em seguida, perguntei quem gostaria de ir até a lousa explicar o seu raciocínio, e Bianca se levantou e fez um dado, e depois escreveu os números de um a seis na lousa, e explicou: *“Pode sair 6 números nesse dado. No primeiro, quer saber a chance de sair o 5. Então pode sair 6 e a pessoa quer 1* [circulou o número 5]. *Então é um sexto* [escreveu $\frac{1}{6}$ na lousa]”. Perguntei se todos concordavam, e conclui: *“Nesse caso podemos dizer assim: a chance é de uma para seis.”*

Carlos pediu para responder a letra b. Ele se levantou, fez os números de um a seis, sublinhou os números 1, 2, 3 e 4 e afirmou: *“Nesse pode sair 4 números. Então quatro sextos”.* Novamente, concordei com a resposta, e disse que poderia ser dito que a chance é de quatro para seis.

Nesse momento, Fernando levantou a mão e pediu para explicar o que havia pensado. Assim, ele circulou os números 1 e 2 juntos, depois o 3 e 4 e por fim o 5 e 6, e comentou: *“Se fizer grupos de dois, aí ficaria que a chance é de dois para três. Tá certo?”*. Eu respondi a ele que sim, estava certo.

Logo depois, Marina se levantou para fazer a letra C e comentou: *“Esse a gente precisa pensar nos números pares, que é o 2, 4 e 6. Aí a chance é metade. Ou pode falar que é de 3 para 6.”* Após o comentário, perguntei se havia alguma dúvida, e como não houve manifestação, encerrei a aula do dia.

6.1 Nossas hipóteses sobre o processo de aprendizagem da oitava aula

Imaginamos que esse seria um problema mais desafiador, tendo em vista que era o primeiro que abordava o significado de fração como razão. Pensávamos que as crianças iriam desenhar as faces do dado para compreender as possibilidades. No entanto, a maioria não teve essa ideia e precisamos sugerir essa estratégia. Achamos que alguns estudantes já iriam pensar em frações equivalentes, o que efetivamente ocorreu.

ANEXO A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Comitê de Ética em Pesquisa

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Venho, por meio deste, convidar o menor pelo qual o(a) senhor(a) é responsável, a participar da pesquisa intitulada “Registros de representação semiótica no ensino-aprendizagem de frações”, a ser realizada por mim, Juliana Silveira Barreiro Ribeiro, na Escola Móbile, como parte dos estudos do curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática em desenvolvimento junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, sob orientação do professor Dr. Rogério Marques Ribeiro. O projeto de pesquisa foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa, CEP-IFSP, pelo CAAE número 58745122.1.0000.5473.

Os objetivos do projeto de pesquisa são: (i) compreender a natureza das dificuldades de um grupo de alunos durante o processo de ensino e aprendizagem de frações; (ii) elaborar uma THA com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica para o ensino de conceitos de fração; (iii) analisar, selecionar e adaptar tarefas de ensino de frações; (iv) catalogar um repertório de erros comuns que os alunos cometem na aprendizagem de conceitos de frações. A criança está sendo convidado(a) por ser aluno(a) dos anos iniciais e frequentar as aulas na turma na qual estou lecionando matemática. Tenho como interesse observar as suas estratégias para resolução de atividades de frações e essa observação será feita durante o desenvolvimento de atividades em sala de aula.

Você tem plena liberdade de recusar a participação do menor ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma para o tratamento que recebe neste serviço. A participação da criança não é obrigatória, não tem custos e nem é remunerada. Essa participação consiste em realizar as tarefas que serão propostas ao longo do desenvolvimento da pesquisa. É importante destacar que as tarefas serão realizadas no horário regular das aulas já previstas pelo calendário escolar, ou seja, não haverá nenhuma atividade para ser realizada extraclasse.

Quanto ao sigilo da pesquisa informo que nenhuma outra pessoa, além de mim e de meu orientador, terá qualquer informação que for obtida durante a pesquisa sobre os(as) alunos(as) sem a autorização dos(as) mesmos(as) e de seus responsáveis. As identidades pessoais dos(as) alunos(as), serão mantidas em sigilo, não sendo revelada em momento algum, nem mesmo nos documentos de divulgação dos resultados da pesquisa.

A pesquisa poderá implicar em benefícios aos(às) alunos(as) participantes, pois estes(estas) serão inseridos(as) em novas situações de ensino e aprendizagem, por meio do desenvolvimento de trajetórias hipotéticas de aprendizagem, contribuindo para o desenvolvimento dos conceitos de frações. As atividades que serão propostas terão, ainda, como uma de suas características, o trabalho com diferentes registros de representações semióticas, que poderão contribuir, significativamente, para o desenvolvimento dos conhecimentos sobre números racionais.

Toda pesquisa com seres humanos também está sujeita a riscos. A fim de se explicitar os riscos que envolvem a realização desta pesquisa, bem como orientar a forma de minimizá-los, descrevo, a seguir, os elementos identificados:

(1) Um risco para os(as) alunos(as) participantes está no possível uso de gravações em áudio e vídeo das aulas durante a realização das atividades, haja vista que essas gravações podem gerar um fator de incômodo e/ou constrangimento nos participantes. Para minimizar esse risco, ressalto que ao longo da pesquisa não será feito nenhum tipo de julgamento ou de avaliação dos(as) alunos(as) participantes, e que as filmagens servirão apenas para que as situações vivenciadas ao longo das aulas possam ser, posteriormente, mais bem descritas e analisadas. Entretanto, julgo importante destacar que caso o constrangimento e/ou o incômodo de fato aconteça, e os(as) alunos(as) participantes não se sintam à vontade com as gravações, os aparelhos poderão ser desligados e os registros do desenvolvimento das aulas passarão a ser realizados apenas com o uso do Diário de Campo;

(2) Um outro tipo de risco reside no temor de que o acesso do pesquisador às gravações comprometa a avaliação dos(as) alunos (as) ou a relação entre professora e alunos(as). Buscando minimizar esse risco, de forma que os(as) alunos(as) não se sintam vigiados(as) ou incomodados(as) com a presença de câmeras e/ou gravadores durante as aulas, os equipamentos serão instalados e operados de modo discreto. Caso haja perturbação no ambiente, comprometendo o desenvolvimento do trabalho e a sala de aula, ou mesmo seja percebido que os(as) alunos(as) estejam em situação de constrangimento, a pesquisa ou alguns dos procedimentos metodológicos serão interrompidos. Isso inclui, até mesmo, desligar os equipamentos e apagar gravações já realizadas;

(3) Um terceiro tipo de risco, para essa pesquisa, refere-se ao risco de exposição dos dados dos(as) alunos(as) participantes sem o consentimento dos(as) mesmos(as). Como forma de minimizar esse risco serão adotados pseudônimos para todos os(as) participantes da pesquisa, sendo que seus dados verdadeiros, como nomes, deverão ser de conhecimento apenas da pesquisadora e de seu orientador. Ainda, buscando evitar que qualquer tipo de dado do(a) participante seja divulgado sem o seu consentimento, há uma menção explícita neste termo de que as identidades pessoais dos sujeitos, serão mantidas em sigilo, não sendo reveladas em momento algum, nem mesmo nos documentos de divulgação dos resultados da pesquisa.

Considerando o interesse em poder gravar em áudio ou vídeo algumas das aulas, solicito a autorização para que os registros de imagem e áudio dos participantes possam ser feitos por meio de gravação. Ressalto que os materiais coletados não serão divulgados para nenhum fim, sendo analisados apenas por mim e pelo meu orientador. Serão mantidos sob guarda por um período mínimo de cinco anos após o término da pesquisa, sendo posteriormente descartados por incineração.

Garantimos ao menor, quando necessário, o ressarcimento das despesas devido à sua participação na pesquisa, ainda que não previstas inicialmente. Comprovada a necessidade de ressarcimento de despesas aos participantes da pesquisa, referido ressarcimento será feito mediante transferência bancária para uma conta corrente indicada pelos responsáveis pelo(a) menor.

Também estão assegurados ao(à) Sr(a). o direito a pedir indenizações e a cobertura material para reparação a dano causado pela pesquisa ao(à) participante da pesquisa. Asseguramos ao(à) Sr(a). o direito de assistência integral gratuita devido a danos diretos/indiretos e imediatos/tardios decorrentes da participação no estudo ao (à) participante, pelo tempo que for necessário.

Você poderá entrar em contato a qualquer momento tanto com o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos do Instituto Federal de São Paulo (CEP/IFSP) quanto com a Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), quando julgar pertinente. O CEP/IFSP fica na Rua Pedro Vicente, 625, Canindé – São Paulo - SP, Telefone: (11) 3775-4569, e-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br Se preferir também poderá entrar em contato comigo ou com meu orientador por meio dos contatos que constam junto ao campo das assinaturas. Este documento (TCLE) está elaborado em duas VIAS, que devem ser rubricadas em todas as suas páginas, exceto a com as assinaturas, e assinadas ao seu término por você, pela pesquisadora responsável e pelo seu orientador, ficando uma via com cada um.

Dr. Rogério Marques Ribeiro
Orientador
e-mail: rmarques@ifsp.edu.br
Av. Celso Garcia, 5754 – apto. 23 – bl 02 –
São Paulo – SP
(11) 2763-3566

Juliana Silveira Barreiro Ribeiro
Mestranda no Programa de Pós-Graduação –
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências
e Matemática do IFSP/Campus São Paulo
e-mail: ju.silveiraribeiro@gmail.com
Rua Tucuna, 1250 - São Paulo - SP
(11) 5536-4402

COMITÊ DE ÉTICA EM
PESQUISA
Rua Pedro Vicente, 625
Canindé – São Paulo/SP
Telefone: (11) 3775-4665
E-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios da participação do menor pelo qual sou responsável na pesquisa e concordo com a sua participação.

____

Nome do menor participante da pesquisa

____

Nome e assinatura do responsável

ANEXO B – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido - TALE

(para alunos menores de idade)

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Comitê de Ética em Pesquisa

Termo de Assentimento Livre e Esclarecido - TALE (para alunos menores de idade)

Título da pesquisa: Registros de representação semiótica no ensino-aprendizagem de frações.

Você está sendo convidado(a) a participar como voluntário(a) em uma pesquisa educacional chamada "Registros de representação semiótica no ensino-aprendizagem de frações". Estamos fazendo esse estudo para compreender a natureza das dificuldades dos alunos investigados na aprendizagem de conceitos de frações, e também para entender como o trabalho com diferentes registros de representação semiótica pode colaborar com essa aprendizagem.

A pesquisa será realizada nas nossas aulas de Matemática do 5°B. Caso você concorde em participar, iremos gravar trechos de nossas aulas e utilizar as respostas de algumas tarefas sobre frações. Você só participará da pesquisa se quiser, e poderá desistir de participar a qualquer momento, sem prejuízos. Além disso, a participação na pesquisa não terá qualquer influência em suas notas semestrais, e sua participação é voluntária, ou seja, não haverá nenhum pagamento ou recompensa pela participação.

Caso concorde em participar, seu nome não será divulgado em nenhum momento. Os vídeos, áudios e atividades serão analisadas apenas pela professora-pesquisadora e seu orientador, e todos os dados serão usados somente para este estudo e possíveis artigos a partir dessa pesquisa.

Os benefícios da pesquisa estão em proporcionar novas situações de ensino e aprendizagem, por meio do desenvolvimento de trajetórias hipotéticas de aprendizagem, contribuindo para o desenvolvimento de conceitos de frações. As atividades que serão propostas terão, como uma de suas características, o trabalho com diferentes registros de representação semiótica, e poderão contribuir para a compreensão desse objeto matemático. Você também estará colaborando com uma pesquisa que pode ajudar outros professores a realizarem um trabalho com frações com as suas turmas.

Os possíveis riscos associados à essa investigação são mínimos e referem-se:

1. Ao possível uso de gravações em áudio ou vídeo das aulas durante a realização das atividades, pois essas gravações podem gerar um fator de incômodo e/ou constrangimento nos participantes. Para minimizar esse risco destacamos que ao longo da pesquisa não será feito nenhum tipo de julgamento ou de avaliação dos(as) alunos(as) participantes a partir das gravações, e que as filmagens ou gravações em áudio servirão apenas para que as situações vivenciadas ao longo das aulas possam ser, posteriormente, mais bem descritas e analisadas. Os aparelhos, quando utilizados, serão instalados e operados de modo discreto. É importante destacar que caso haja perturbação no ambiente, constrangimento e/ou incômodo, e os(as) alunos(as) participantes não se sintam à vontade com as gravações, os aparelhos poderão ser desligados e os registros do desenvolvimento das aulas passarão a ser realizados apenas com o uso do Diário de Campo;

2. Um outro tipo de risco reside no temor de que o acesso do pesquisador às gravações comprometa a avaliação dos(as) alunos (as) ou a relação entre professora e alunos(as). Buscando minimizar esse risco, de forma que os(as) alunos(as) não se sintam vigiados(as) ou incomodados(as) com a presença de câmeras e/ou gravadores durante as aulas, os equipamentos serão instalados e operados de modo discreto. Caso haja perturbação no ambiente, comprometendo o desenvolvimento do trabalho e a sala de aula, ou mesmo seja percebido que os(as) alunos(as) estejam em situação de constrangimento, a pesquisa ou alguns dos procedimentos metodológicos serão interrompidos. Isso inclui, até mesmo, desligar os equipamentos e apagar gravações já realizadas;

3. ao risco de exposição dos dados dos(as) alunos(as) participantes sem o consentimento dos(as) mesmos(as). Como forma de minimizar esse risco serão adotados pseudônimos para todos os participantes da pesquisa, sendo que seus dados verdadeiros, como nomes, serão conhecidos apenas pela professora-pesquisadora e seu orientador.

Ressaltamos, ainda, que os possíveis riscos serão minimizados e/ou eliminados por meio da supervisão e da orientação da professora-pesquisadora e do seu orientador. Todo o material coletado será arquivado pela professora-pesquisadora por cinco anos, assegurando-se o sigilo sobre a participação dos envolvidos no projeto. Após esse período os dados serão destruídos por meio da incineração.

Os conhecimentos resultantes do estudo poderão ser divulgados em revistas, em jornais, em congressos ou outros encontros acadêmicos/científicos, e também na produção de uma dissertação de mestrado e de um produto educacional. Em qualquer uma das situações seu nome será mantido em sigilo.

Caso você não queira participar, nenhuma informação será coletada, incluindo registros escritos, e você não sofrerá qualquer tipo de punição ou prejuízo acadêmico por essa decisão.

Garantimos, quando necessário, o ressarcimento das despesas devido à sua participação na pesquisa, ainda que não previstas inicialmente. Comprovada a necessidade de ressarcimento de despesas pela sua participação na pesquisa, referido ressarcimento será feito mediante transferência bancária para uma conta corrente indicada pelos seus responsáveis

Também estão assegurados o direito a pedir indenizações e a cobertura material para reparação do dano causado pela pesquisa ao(à) participante da pesquisa. Asseguramos o direito de assistência integral gratuita devido a danos diretos/indiretos e imediatos/tardios decorrentes da participação no estudo ao (à) participante, pelo tempo que for necessário.

Se você quiser, por qualquer motivo, esclarecer algum aspecto do projeto e/ou das atividades que serão desenvolvidas no mesmo, poderá entrar em contato com os pesquisadores (cujos endereços eletrônicos estão abaixo). Você também pode entrar em contato com quem autorizou essa pesquisa, o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos do Instituto Federal de São Paulo (CEP/IFSP) ou com a Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP). O CEP/IFSP fica na Rua Pedro Vicente, 625, Canindé – São Paulo - SP, Telefone: (11) 3775-4569, e-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br.

Agradecemos, desde já, a sua colaboração.

São Paulo, ____ de ______________ de 2022.

Dr. Rogério Marques Ribeiro
Professor orientador
e-mail: rmarques@ifsp.edu.br
Av. Celso Garcia, 5754 – apto. 23 – bl 02 – São Paulo – SP
(11) 2763-3566

Juliana Silveira Barreiro Ribeiro
Professora-pesquisadora
e-mail: ju.silveiraribeiro@gmail.com
Rua Tucuna, 1250 - São Paulo - SP
(11) 5536-4402

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé –
São Paulo/SP
Telefone: (11) 3775-4665
E-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br

Eu ___________________________________ aceito participar da pesquisa “Registros de representação semiótica no ensino-aprendizagem de frações”. Eu entendi os riscos e benefícios que podem acontecer, e também entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir, e ninguém vai ficar bravo comigo. A professora tirou minhas dúvidas, informou e pediu autorização para os meus responsáveis.

Recebi uma cópia deste documento, e eu ou meus responsáveis podemos tirar qualquer dúvida que me lembrar.

Data: ____/____/____

__________________________________ ________________________

Nome do participante da pesquisa Assinatura