INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

LUCILENE CANDIDO ROCHA

A Cultura Africana e Estudos de Geometria Fractal na Formação de Professores de Matemática

SÃO PAULO
2023

LUCILENE CANDIDO ROCHA

A Cultura Africana e Estudos de Geometria Fractal na Formação de Professores de Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática - ENCIMA do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Ensino de Ciências e Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Wellington Pereira das Virgens

SÃO PAULO
2023

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

r672c Rocha, Lucilene Candido
A cultura africana e estudos de geometria fractal na formação de professores de matemática / Lucilene Candido Rocha, Lucilene Candido Rocha. São Paulo: [s.n.], 2023.
180 f.

Orientador: Dr. Wellington Pereira das Virgens

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2023.

1. Geometria Fractal. 2. Cultura Africana. 3. Relações Étnico-raciais. 4. Formação de Professores de Matemática. 5. Geometria.. I. Rocha, Lucilene II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo III. Título.

CDD 510

Banca Examinadora

Prof. Dr. Wellington Pereira das Virgens
IFSP – Campus São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Prof.ª Dr.ª Giselly Barros Rodrigues
IFSP – Campus São Paulo
Membro externo ao programa

Prof. Dr. Gustavo Isaac Killner
IFSP – Campus São Paulo
Membro interno ao programa

Dedico esse trabalho à minha mãe por sempre me apoiar, à minha irmã, ao meu filho por participarem das etapas desta pesquisa, e a Deus.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a DEUS, pois ele é o meu princípio e fim.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Wellington Pereira das Virgens, pelo incentivo e apoio para a realização deste trabalho, por sua generosidade em partilhar conhecimentos pertinentes ao tema abordado e, sobretudo, por sua dedicação e paciência comigo, perfazendo o sinônimo da palavra mestre.

Não poderia esquecer de estender este agradecimento também à esposa do meu orientador, Sheila, por dedicar parte de seu tempo precioso para nos ajudar a organizar parte das atividades da oficina formativa e acreditar no meu potencial.

Agradeço aos companheiros do IFSP que foram alunos do curso de Licenciatura em Matemática, alguns em especial: Felipe, Fernando, Leticia, Mariana e Paula que, mesmo antes do meu título, já me tratavam como mestra.

Agradeço à professora Giselly Barros Rodrigues e ao professor Gustavo Isaac Killner, que aceitaram compor a banca de avaliação deste trabalho, desde a qualificação até a defesa, bem como por suas contribuições que muito ajudaram a melhor delinear os caminhos da pesquisa para mim.

Aos meus professores de Matemática, Cidelice e em especial ao prof. Me. Ronaldo Barros Órfão, com quem tive o privilégio de aprender no Ensino Médio e na análise de meu trabalho de conclusão da Pós-graduação lato sensu.

Agradeço imensamente aos meus familiares, aos meus amigos e amigas (Ana Paula Braga, Ana Paula Freire, Alessandra Felix, André Albuquerque, Carlos Alexandre, Airian, Mara, Beatrice – *in memorian* – dentre tantos outros) que perderam noites incontáveis de sono, durante todo esse período de formação, além daqueles que acompanharam minha trajetória até aqui.

Em uma sociedade racista, não basta não ser racista. É preciso ser antirracista!

Ângela Davis

RESUMO

Esta pesquisa trata da cultura africana impregnada de conhecimentos geométricos no contexto da promoção da formação de professores de Matemática, comprometidos com o desenvolvimento de práticas educacionais antirracistas e voltadas às relações étnico-raciais durante as práticas de ensino e de aprendizagem de Matemática. De modo geral, a Geometria ensinada e aprendida durante a escolarização básica é a chamada Geometria Euclidiana, que tem como ponto de partida os axiomas euclidianos e as demonstrações abstratas que, em tese, conferem caráter científico à Geometria. Todavia, entendemos ser necessário superar tanto a exclusividade da aprendizagem da Geometria Euclidiana nas práticas escolares, quanto a tradição da organização axiomática e eurocêntrica do currículo de matemática. É nesse sentido que a pesquisa que este texto sintetiza buscou organizar um movimento formativo que pudesse contribuir, conscientemente, para a formação inicial de futuros e futuras professores e professoras de Matemática, de modo que pudessem enfatizar, em suas práticas, perspectivas com potencial para superar a exclusividade da cultura eurocêntrica presente na organização curricular de Matemática, bem como para incluir em suas aulas aspectos de outras geometrias, como a Geometria Fractal, por exemplo. Os resultados deste movimento formativo são analisados aqui, no contexto do Materialismo Histórico-Dialético e à luz de constructos teóricos fundamentados na Teoria Histórico-Cultural. Tal análise nos leva à conclusão de que é possível organizar o trabalho pedagógico de modo que potencialize o desenvolvimento de aspectos do pensamento geométrico que podem superar a exclusividade curricular da Geometria Euclidiana. Também verificamos que a proposta formativa que apresentamos potencializa a superação de propostas de ensino e modos de aprendizagem exclusivamente eurocentristas, destacando um outro olhar para a geometria a partir das culturas geralmente invisibilizadas de povos africano ou afrodiaspóricos, cujas contribuições para a produção de conhecimento matemático são, por vezes, usurpadas. Entendemos que nossas conclusões contribuem para a promoção de uma educação antirracista, voltada para o estabelecimento e a consolidação das relações étnico-raciais durante as práticas de ensino e de aprendizagem de Matemática, de modo geral, e de Geometria – em particular.

Palavras-chave: Formação de Professores, Cultura Africana, Relações Étnico-Raciais, Geometria Fractal, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This research deals with the African culture impregnated in geometric knowledge in the context of promoting the training of mathematics teachers committed to the development of anti-racist educational practices and focused on ethnic-racial relations during the teaching and learning practices of mathematics. In general, the geometry taught and learned during basic schooling is the so-called Euclidean geometry, which has as its starting point the Euclidean axioms and abstract demonstrations that, in theory, confer a scientific character to geometry. However, we believe it is necessary to overcome both the exclusivity of learning Euclidean geometry in school practices and the tradition of axiomatic and Eurocentric organization of the mathematics curriculum. It is in this sense that the research summarized in this text sought to organize a training movement that could consciously contribute to the initial training of future Mathematics teachers, so that they could emphasize, in their practices, perspectives with the potential to overcome the exclusivity of the Eurocentric culture present in the mathematics curriculum organization, as well as to include aspects of other geometries in their classes, such as fractal geometry, for example. The results of this formative movement are analyzed here, in the context of historical-dialectical materialism and in the light of theoretical constructs based on Historical-Cultural Theory. Such an analysis leads us to the conclusion that it is possible to organize the pedagogical work in a way that enhances the development of aspects of geometric thinking that can overcome the curricular exclusivity of Euclidean geometry. We also verified that the educational proposal that we present enhances the overcoming of teaching proposals and learning modes exclusively produced in Europe, highlighting another look at geometry from the generally invisible cultures of African or Afro-diasporic peoples whose contributions to the production of mathematical knowledge are sometimes misused. We understand that our conclusions contribute to the promotion of an anti-racist education, aimed at establishing and consolidating ethnic-racial relations during the teaching and learning practices of mathematics, in general, and geometry – in particular.

Keywords: Teacher Training, African Culture, Ethnic-Racial Relations, Fractal Geometry, Teaching Mathematics.

Índice de Figuras

Índice de Quadros

SUMÁRIO

Introdução

Este texto sintetiza mais do que uma pesquisa de mestrado. Para além deste também importante aspecto, deposito aqui o resultado de uma busca por equidade, por respeito, por justiça e por identidade. Ratifico, do meu lugar de fala (RIBEIRO, 2019), a necessidade de uma educação verdadeiramente plural, em que a cultura e os conhecimentos produzidos historicamente pela humanidade estejam, de fato, ao alcance de todos os povos e que, ao mesmo tempo, todos os povos se reconheçam como produtores de tal conhecimento.

Dessa forma, a essência do que defendemos neste texto – o reconhecimento de todos os povos, especialmente os povos africanos, como coprodutores de todas as formas de conhecimento – não se inicia com o ingresso no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de São Paulo, mas se confunde com minha história pessoal, que é uma história de luta e resistência, muito similiar à de muitas outras mulheres negras em diversos aspectos. Desde os movimentos de minha mãe, mulher trabalhadora negra que não chegou a concluir a 3ª série do antigo primário (equivalente aos anos iniciais do atual ensino fundamental), até minha bisavó, que – filha de pessoas escravizadas – nasceu “liberta” nos termos da chamada Lei do Ventre Livre[1], foram ficando evidentes as contradições e dificuldades decorrentes dos superficiais entendimentos do que significaria *ser livre* em uma sociedade alicerçada em quase 400 anos de escravização do povo negro. As marcas desses séculos não só não foram apagadas naquele 13 de maio de 1888[2], como foram sendo reforçadas em nossa história e sintetizadas na cor de nossa pele.

Geração após geração, fomos sendo sempre empurrados e empurradas para o lugar daqueles que compuseram as tristes estatísticas históricas de analfabetismo e evasão escolar. Minha mãe, como indiquei antes, teve que abandonar a escola antes de concluir a 3ª série e, mesmo já com meu pai, homem branco e humilde, não tinha condições financeiras de comprar material

[1] A Lei do Ventre Livre foi promulgada em 28 de setembro 1871 e determinava que os filhos dos escravizados nascidos a partir dali seriam considerados “livres”.
[2] Data da publicação da chamada Lei Áurea.

escolar, nem mesmo uma mochila para mim. Isso culminou em minhas precoces experiências com o sofrimento causado pelo racismo, quando passei a ser chamada de a *"neguinha da sacolinha"*, em referência cruel à sacola de feira colorida confeccionada pela minha mãe – costureira – sacola que eu utilizava para levar os cadernos à escola.

Diante das dificuldades, todavia, análogas às de tantas outras histórias negras, buscamos superar os preconceitos e o racismo e isto fazemos até hoje. Essa luta é marcada por pontos altos, como, por exemplo, quando concluí o curso Normal para o Magistério (CEFAM)[3]. Mesmo naquele curso, em tese, voltado para a formação de professores, as pessoas que ministravam as aulas para mim diziam que eu não seria uma boa professora, pois *"não sabia falar"*.

Minha graduação – Licenciatura em Matemática – ocorreu em uma faculdade particular, no contexto da contradição que existia antes das leis sobre ações afirmativas (Lei n°12.711 de 2012), em que as universidades públicas eram frequentadas, em grande maioria, por integrantes das classes média e alta e egressos de escolas particulares. Só comecei a me aproximar do contexto acadêmico da universidade pública na pós-graduação. Tive a oportunidade de concluir no IFSP uma especialização *lato sensu* que foi fundamental para que eu reconhecesse que meu lugar também era na pesquisa, para além das minhas práticas como professora. Na pós-graduação, em nível de especialização, realizei a pesquisa intitulada *Aplicações Etnomatemáticas na Docência com Ênfase na Cultura Negra*, a qual definiu meu interesse de pesquisa na temática das relações étnico-raciais, em especial em relação à Cultura Africana e suas relações com o ensino de Matemática.

É neste contexto que se deu meu ingresso no Programa de Pós-graduação stricto sensu, em nível de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática - ENCIMA. Ingressei no programa mediante reserva de vaga para ações afirmativas, a popular "cota racial".

---

[3] De acordo com o Dicionário Interativo da Educação Brasileira, os CEFAMs surgiram no contexto em que, em nome da profissionalização do magistério, acabou-se com o curso normal e, no âmbito doensino profissionalizante de segundo grau (ensino médio), criou-se a habilitação específica para o magistério nas séries iniciais do primeiro grau (ensino fundamental). (DIEB, s/d). Disponível em: https://www.educabrasil.com.br/cefams-centros-especificos-de-formacao-e-aperfeicoamento-para-o- magisterio/. Acesso em 25 de janeiro de 2022.

As ações afirmativas garantiram que eu pudesse ter voz para expressar aquilo que muitas vezes é invisibilizado nas práticas de ensino em geral, mas nas de Matemática de modo muito evidente. Assim, do lugar de quem sofreu racismo por não ter uma mochila para ir à escola; de quem teve professores e professoras racistas mesmo no ambiente em que diziam estar formando futuras professoras; de quem foi formada em uma graduação na qual a Matemática foi apresentada como a ciência criada por homens, europeus e brancos para as *pessoas inteligentes*; de quem ouviu diversas vezes na vida que não fazia parte desse rol de *pessoas inteligentes;* é que apresento, a seguir, neste texto, a síntese da pesquisa de mestrado sobre as possibilidades de ensinar Matemática em uma perspectiva antirracista, na qual se reconhece que os conhecimentos, em geral, e matemáticos em particular, são produzidos pelos seres humanos e vão sendo historicamente impregnados na cultura humana, de modo que os povos negros, na África e nos movimentos diaspóricos, são produtores de conhecimento matemático tanto quanto – e, em alguns casos, mais do que – os europeus.

Ratificamos nossa convicção de que é possível e necessário construir um contexto educacional humanizado, voltado para o reconhecimento de que a cidadania decorre do *aprender a ser cidadão*, de que aprender a ser cidadão na sociedade do conhecimento implica reconhecer-se como sujeito (ativo) da produção do conhecimento humano e não meramente consumidor (passivo) do conhecimento produzido por outros – geralmente homens, brancos e europeus.

Nossa perspectiva, na pesquisa apresentada neste texto, tende-se a corroborar o entendimento freireano, segundo o qual “a educação não transforma o mundo. Educação muda pessoas. Pessoas transformam o mundo” (FREIRE, 1979, p. 84). Se o mundo está tomado por sociedades racistas parafraseando Ângela Davis, é preciso promover práticas antirracistas, e a Educação é uma das principais dessas ações.

Considerando o contexto histórico em que a Matemática tende a ser reconhecida como *a mãe das ciências* e a História da Matemática tende a ser apresentada sob a ótica de uma produção quase que exclusivamente europeia e masculina, podemos nos perguntar: qual pode ser a contribuição de uma professora para a construção de uma educação antirracista a partir das práticas de ensino de Matemática?

Entendemos que, pesquisando e dissertando sobre a cultura africana e reconhecendo os movimentos de produção de cultura e conhecimento em contextos afrocêntricos, podemos aprender a organizar nossas práticas de ensino e de aprendizagem de Matemática, de modo geral, e de Geometria, em particular, para mostrar que os povos negros também produziram, ao longo da história, conhecimento matemático e, mais do que isso, a cultura africana pode e deve ser também recurso desencadeador de aprendizagens curriculares e cotidianas. Assim, estudantes negros e negras se reconhecem como descendentes de pessoas que também produziram conhecimento matemático, bem como estudantes brancos e brancas se reconhecem como descendentes de pessoas que fizeram parte de um processo coletivo de produção maior, no qual ocupavam lugar de colaboradores e não de *senhores*[4].

E por que relacionar Geometria(s) e Cultura Africana? Mais uma vez, minha condição de professora de Matemática vem mostrar que a cultura escolar tem cristalizado um entendimento superficial das conquistas decorrentes das lutas por reconhecimento, igualdade e identidade histórica dos negros. Neste contexto, professores e professoras de Matemática acreditam – pois são formados desde o início de suas carreiras para no fato acreditar – que o ensino e reconhecimento da história, cultura, influências e produção do conhecimento dos povos negros seriam prerrogativa exclusiva, na educação básica, dos professores de Literatura, Artes e História, o que é ledo engano.

Os povos negros produziram conhecimento em todas as esferas possíveis, inclusive, claro, na Matemática. Tiveram grande influência nas sínteses apresentadas por gregos, mas não são – de modo geral – reconhecidos por tais contribuições. Apresentamos aqui, neste texto, uma proposta para superar esse processo de invisibilização da cultura africana que produz conhecimento no contexto da formação inicial de professores de Matemática. Acreditamos que só pela conscientização a respeito das contribuições dos povos negros para a produção do conhecimento matemático é que professores e professoras poderão exercer seu papel de multiplicadores de tal conhecimento.

---

[4] Segundo Marilina dos Santos Luz (LUZ, 1958), o termo senhor surge com o significado de “pessoa que tem autoridade e direitos sobre alguém ou alguma coisa” ainda na Idade Média.

Embora tenha emergido, recentemente, um discurso político falacioso[5], que supõe uma sociedade brasileira em que o racismo não existiria, o que verificamos na prática é a necessidade da existência de leis que coloquem as relações étnico-raciais em debate. São exemplos dessa necessidade a lei 12.711/2012 (conhecida como "lei de cotas"), a lei 12.288/2010 (que estabelece o "estatuto da igualdade racial"), além da lei 10.639/2003 (que determina a obrigatoriedade, no currículo oficial, dos estudos da História e Cultura Afro-Brasileira e Africana), além de outras. Ora, se, por um lado, essas são conquistas históricas para os movimentos negros, que lutam por igualdade racial, por outro contrapõem o referido discurso político de que não existe racismo no Brasil, uma vez que parece ser um contrassenso que uma sociedade em que a cultura é antirracista necessite de leis que estabeleçam igualdade racial.

Entendemos que a Cultura Antirracista deve ser construída historicamente e não imposta por meio de leis. Os processos educacionais ganham, assim, protagonismo. Igualdade, equidade, respeito, isonomia são conceitos que devemos aprender, como qualquer outro conceito produzido pela humanidade nos processos de produção de conhecimento. O racismo estrutural e a busca por igualdade racial são temas sempre atuais na sociedade. Urge o reconhecimento da necessidade de debates e reflexões que possam subsidiar a superação de práticas impregnadas no cotidiano brasileiro, para o combate aos preconceitos, ao racismo, à discriminação e à redução das desigualdades raciais no Brasil. Eis que esta pesquisa se apresenta para tal debate, a partir do recorte das possíveis – e necessárias – relações entre os processos de formação de professores de Matemática e o reconhecimento e valorização da Cultura Africana.

Um dos pilares da sociedade, também responsável pelos processos de

[5] Por exemplo: em junho de 2018 um político, então candidato à Presidência da República, afirmou em evento de campanha que "aqui no Brasil não existe isso de racismo" (https://noticias.uol.com.br/politica/eleicoes/2018/noticias/agencia-estado/2018/06/29/aqui-no-brasil-nao-existe-isso-de-racismo-diz-bolsonaro-em-fortaleza.htm). Em novembro de 2020, o vice deste candidato (tendo sido eleito), reafirmou que "no Brasil, não existe racismo" (https://g1.globo.com/politica/noticia/2020/11/20/mourao-lamenta-assassinato-de-homem-negro-em-mercado-mas-diz-que-no-brasil-nao-existe-racismo.ghtml). Esse discurso, porém, é falacioso, pois se apresenta como verdade a partir de premissas que não sustentam a conclusão.

formação ideológica e da cultura da exclusão, é a educação. Se a escola reconstituir, na formação do homem e da mulher, as marcas da desigualdade social e racial presentes na sociedade, haverá cada vez mais “neguinhas da sacolinha” e cada vez menos **professoras pretas**.

Entendemos que uma das formas de impedir que a escola seja racista – ou melhor, os modos de produzir uma educação antirracista – é formar professores e professoras antirracistas. Por essa razão, elegemos o público ao qual direcionamos nossas ações de pesquisa: Professores de Matemática em formação inicial.

Segundo Stein e Smith (1998), para mudar a Matemática que se ensina e se aprende na escola – de uma Matemática tecnicista para uma Matemática crítica – a formação de professores e professoras é de suma importância, pois as maneiras como trabalham em sala de aula influenciam diretamente na formação dos alunos.

A metodologia de nossa pesquisa, coerentemente com a perspectiva que defendemos e apresentamos até aqui, remete ao Materialismo Histórico-Dialético - MHD, proposto originalmente por Karl Marx, como ferramenta para a compreensão dos movimentos de produção de conhecimento no contexto da análise das unidades contraditórias que dão origem a novos conhecimentos. O movimento analisado à luz de tal perspectiva metodológica foi intencionalmente organizado como um ciclo de oficinas promovido como ação de extensão vinculada a projeto do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de São Paulo. Foram realizadas cinco oficinas relacionadas à formação para o ensino de Geometrias Não-euclidianas mesmo no contexto dos estudos curriculares de Geometria Euclidiana na educação básica. Os aspectos discutidos foram os Conceitos de *Complexidade infinita* e *de Autossemelhança*, ambos essenciais para a compreensão da Geometria Fractal (Não-euclidiana), mas que possibilitam, a priori, a construção de ideias muitas vezes negligenciadas nos estudos exclusivos de Geometria Euclidiana.

Mas quais contradições verificamos que subsidiam nossa opção metodológica pelo MHD? Buscaremos responder a essa pergunta no contexto do movimento que apresentamos neste texto; porém, a princípio, é importante destacar duas importantes contradições que subsidiam as superações que defendemos.

A lei 10.639/2003 (BRASIL, 2003) e legislações posteriores sobre as relações étnico-raciais de fato destacam as potencialidades presentes nas áreas de Educação Artística, Literatura e História para desenvolver o reconhecimento da produção de conhecimento a partir da Cultura Aricana. No entanto, tal indicação costuma receber uma interpretação distorcida, segundo a qual apenas aquelas áreas deveriam abordar tal temática. Essa interpretação contradiz a ideia, presente na própria legislação, de que o conhecimento e a valorização da história, das influências, da cultura e da produção do conhecimento africano seriam objeto de interesse de **todas** as áreas escolares.

A exemplo de Santos e Virgens (2020), entendemos haver fortes indícios históricos de que muitos conhecimentos que chegaram aos nossos dias foram, na verdade, usurpados de povos dominados em um processo de expropriação de culturas, conhecimentos e saberes. Nesse contexto, alunos e alunas negros e negras são submetidos, na escola, a estudos em que os principais produtores do conhecimento são homens, brancos, europeus e “iluminados” por uma suposta capacidade superior. A primeira unidade contraditória a ser superada, portanto, é aquela em que se defende práticas escolares nas quais todas as áreas do conhecimento devem valorizar a produção do conhecimento e as influências e potencialidades da Cultura Africana enquanto, na escola, estudantes negros e negras aprendem uma Matemática quase que exclusivamente vinculada a personagens históricos brancos, europeus e masculinos.

É importante destacar que não é nosso interesse, neste texto, apagar ou reescrever histórias da Matemática, segundo ressalta Adichie (2019). Existe uma palavra em *igbo* na qual sempre penso quando considero as estruturas de poder no mundo: *nkali*. É um substantivo que, em tradução livre, quer dizer “ser maior do que outro”. Assim como o mundo econômico e político, as histórias também são definidas pelo princípio de *nkali*: como elas são contadas, quem as está contando, quando são contadas e quantas são contadas, tudo depende muito de poder.

Reconhecemos as contribuições dos povos europeus para a constituição do que, hoje, entendemos ser Matemática. No entanto, problematizamos a exclusividade e o branqueamento de tal produção de conhecimento. Entendemos – mas isto não está no nosso foco de análise – a relevância das discussões antropológicas e históricas que discutem, ainda hoje, a etnia dos egípcios antigos – grandes produtores de Conhecimento Matemático – mas entendemos que discursos que "branqueiam" o povo *africano* que vivia no antigo Egito, que "retiram" o Egito da África, deslocando-o, no discurso, para o "Oriente Médio", ou que minimizam a importância ou a complexidade do conhecimento produzido por aquele povo, são movimentos que precisam ser superados, no sentido de que estão em contradição com práticas antirracistas.

Outro ponto a ser destacado é que, como veremos no capítulo 2 deste texto, a Geometria Euclidiana (de origem europeia) não é a única – e nem a principal – forma de compreensão da organização social e da natureza em relação à compreensão das formas, das medidas, do espaço e das posições (objetos de estudo das geometrias). No entanto, as práticas escolares, fundamentadas nos documentos curriculares oficiais – como a Base Nacional Comum Curricular, BNCC – tratam durante toda a educação básica quase que exclusivamente da Geometria Euclidiana. Assim, ideias geométricas importantes para compreender o mundo e a sociedade, como o conceito de infinito, a repetição de padrões de forma (autossemelhança), bem como as contribuições de outros povos, não-europeus, acabam sendo negligenciados e passam a constituir uma lacuna na formação geral dos estudantes.

Considerando essas contradições, no primeiro capítulo deste trabalho discutimos a necessidade de superação de compreensões exclusivamente eurocêntricas nas práticas de ensino, em benefício de possibilidades de discussões afrocentradas[6], em uma perspectiva histórico-cultural de educação.

Já no capítulo 2, colocamos em pauta a necessidade de superação de práticas de ensino de geometrias que remetem exclusivamente à Geometria Euclidiana em benefício de outras geometrias, como, por exemplo, a Geometria Fractal, em especial discutindo os conceitos de *complexidade infinita* e *autossemelhança*, além das formas como esta aprendizagem pode ser alcançada em um contexto de aprendizagem da Cultura Africana.

O capitulo 3 apresenta uma síntese dos aspectos da metodologia que

---

[6] Afrocentradas: a partir das considerações acerca do currículo, mas não apenas sob esse prisma - como uma pedagogia decolonial e, consequentemente, como estratégia de adoção de uma educação antirracista.

adotamos, bem como da fundamentação teórica que subsidia a nossa análise.

Por fim, no capítulo 4, apresentamos nosso produto educacional, o qual remete a uma possibilidade de formação de professores que ensinam Matemática no contexto do ciclo de oficinas, que intitulamos *“Discussões étnico-raciais durante o ensino de geometrias”*, momento em que pudemos compreender, acompanhar e atuar sobre os processos, em um movimento intencional mediado de formação, em que professores e professoras em formação inicial (licenciandos em Matemática matriculados no curso do IFSP) puderam conhecer propostas de sequências didáticas, cujo elemento desencadeador das práticas de ensino e de aprendizagem estiveram contextualizadas por elementos da Cultura Africana, como veremos neste capítulo quatro, em relação aos conceitos de *complexidade infinita* e *autossemelhança*.

Encerramos este texto com nossas conclusões de pesquisa que, adiantamos, apontam, satisfatoriamente, para a potencial superação de práticas eurocêntricas no ensino de Matemática, especialmente de geometrias, evidenciando que o silêncio de professores e professoras em relação ao trabalho envolvendo relações étnico-raciais no ensino de Matemática tem sua explicação no contexto de uma sociedade estruturalmente empenhada em invisibilizar e expropriar conhecimentos, saberes e culturas produzidas por povos negros. Todavia, tais práticas podem ser superadas a partir de uma formação intencionalmente voltada para a aprendizagem da organização do ensino (durante a formação inicial, em especial) que permita a promoção dos direitos humanos, da interculturalidade e da diversidade, possibilitando uma formação escolar humanizadora. Verificamos, no ciclo de debates e oficinas em nossa pesquisa, que os professores e as professoras de Matemática também podem e devem contribuir para essa perspectiva formativa.

Nossos apêndices trazem, por fim, os planos de organização das oficinas que realizamos que podem subsidiar a reprodução do nosso movimento e compõem nosso produto educacional, parte importante do movimento formativo no contexto do mestrado profissional em Ensino de Ciencias e Matemática.

Capítulo 1- Da exclusividade da cultura escolar eurocêntrica ao reconhecimento das potencialidades das culturas afrocêntricas nas práticas de ensino de Matemática

Neste capítulo, temos o objetivo de tratar do contexto social da temática de nossa pesquisa, de modo a apresentar aspectos que nos levam à conclusão de que nossa sociedade, construída sobre estruturas racistas, como bem demonstra Almeida (2019), só pode reproduzir práticas racistas. Assim, as práticas de ensino de Matemática exclusivamente eurocêntricas que costumamos adotar (por sermos formados e formadas para isso) nada mais são do que reflexos de tal estrutura racista da sociedade, de modo que precisamos mudar os modos de formar professores para que possamos superar o racismo, inclusive a partir das aulas de Matemática da educação básica.

Considerando este objetivo, partimos de uma afirmação forte, que é sustentada, como já indicamos, por pesquisadores como Almeida (2019) e Pinheiro (2021): a cultura constituída durante o processo de formação da sociedade ocidental, da qual somos parte, é racista!

Essa afirmação forte é importante para nossa contextualização de pesquisa, já que emerge da premissa que assumimos, segundo a qual a consolidação daquilo que se reconhece como *conhecimento* na nossa sociedade confere lugar de destaque às produções eurocêntricas e invisibiliza as produções negras. E Isso reverbera no racismo cientifico, que, segundo relata Carlos s, no século XIX e em seus respectivos desdobramentos na política e na sociedade do período, tem sido amplamente debatido entre os historiadores, sociólogos e antropólogos, bem debatidas como as influências da Cultura Africana sobre os processos humanos de produção do conhecimento, incluindo aqueles desenvolvidos na europa majoritariamente por homens brancos.

Entendemos que uma das formas de racismo consiste na negação de sua existência. Por negação deve-se compreender não apenas o discurso que defende explicitamente que o racismo não existiria, mas também as práticas que escondem e não denunciam o racismo. E cabe perguntar: poderia um racista promover um ideal de sociedade antirracista? Parece-nos evidente que a resposta mais óbvia para esta pergunta seria **não!** No entanto, diversos personagens históricos das nossas artes, literatura, filosofia e das ciências são, notoriamente, racistas! Acreditaram e defenderam que os negros não seriam capazes de produzir conhecimento e que se constituiriam como subespécie!

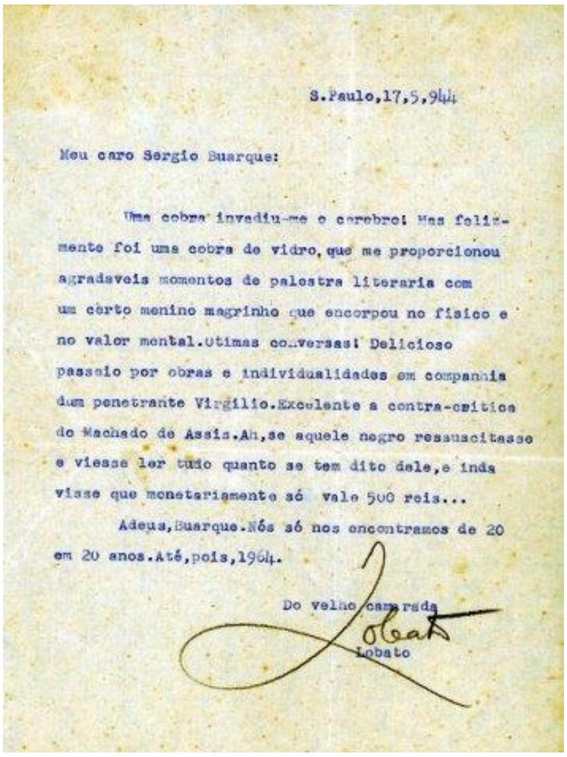
Diante de nosso interesse em compreender a organização social em que nossa pesquisa é realizada e o contexto em que nossos professores são formados, optamos por olhar para alguns desses personagens que são considerados importantes para a constituição de algumas ideias da nossa sociedade. Desejamos que, ao acompanhar nossa apresentação textual, tenha-se em mente a pergunta – retórica – que apresentamos no parágrafo anterior: poderia um racista promover um ideal de sociedade antirracista?

Iniciamos inspirados nas ideias da pesquisadora negra, professora Bárbara Carine Pinheiro, que apresenta (PINHEIRO, 2021) as palavras de Immanuel Kant, o qual, atrevendo-se a conjecturar "sobre o sentimento do belo e do sublime", escreveu as seguintes palavras.

> Os negros da África não possuem, por natureza, nenhum sentimento que se eleve acima do ridículo. O senhor Hume desafia qualquer um a citar um único exemplo em que um negro tenha demonstrado talentos, e afirma: dentre os milhões de pretos que foram deportados de seus países, não obstante muitos deles terem sido postos em liberdade, não se encontrou um único sequer que apresentasse algo grandioso na arte ou na ciência, ou em qualquer outra aptidão; já entre brancos, constantemente arrojam-se aqueles que, saídos da plebe mais baixa, adquirem no mundo certo prestígio, por força de dons excelentes. Tão essencial é a diferença entre essas duas raças humanas, que parece ser tão grande em relação às capacidades mentais quanto à diferença de cores. A religião do fetiche, tão difundida entre eles, talvez seja uma espécie de idolatria, que se aprofunda tanto no ridículo quanto parece possível à natureza humana. A pluma de um pássaro, o chifre de uma vaca, uma concha, ou qualquer outra coisa ordinária, tão logo seja consagrada por algumas palavras, tornam-se objeto de adoração e invocação nos esconjuros. Os negros são muito vaidosos, mas à sua própria maneira, e tão matraqueadores, que se deve dispersá-los a pauladas. (KANT, 1993, p. 75-76, apud PINHEIRO, 2021, p. 24-25)

No Brasil, último país a declarar oficialmente extinta a escravidão, como é natural supor, as práticas sociais de invisibilização e inferiorização do negro e de sua produção cultural e científica ecoam nas palavras de nomes que acabaram tornando-se importantes na constituição do ideário das pessoas sobre o que é "belo e sublime", segundo os termos adotados por Kant. O caso mais clássico é o de Monteiro Lobato, que é homenageado com seu nome em diversas ruas, avenidas e bibliotecas pelo país a fora e era membro da sociedade eugênica de São Paulo, tendo vindo a público em 2010 diversas cartas suas elogiando a Ku Klux Klan (seita supremacista branca que assassina negros e judeus nos Estados Unidos), conforme Leal (2020), além de utilizar em suas obras termos como "Macaca de carvão", "Carne preta", "Beiçuda", "um frangalho de nada" para se referir a pessoas pretas.

Em 17 de maio de 1944, Lobato escreveu a Sérgio Buarque uma carta em que, referindo-se a Machado de Assis (provavelmente o importante escritor brasileiro, que era negro), escreve: “Ah, se aquele negro ressuscitasse e viesse ler tudo quanto se tem dito dele, e ainda visse que monetariamente só vale 500 reis” (LOBATO, 1944, s/p).



S.Paulo,17,5,944

Meu caro Sergio Buarque:

Uma cobra invadiu-me o cerebro! Mas felizmente foi uma cobra de vidro, que me proporcionou agradaveis momentos de palestra literaria com um certo menino magrinho que encorpou no fisico e no valor mental. Otimas conversas! Delicioso passeio por obras e individualidades em companhia dum penetrante Virgilio. Excelente a contra-critica do Machado de Assis. Ah, se aquele negro ressuscitasse e viesse ler tudo quanto se tem dito dele, e inda visse que monetariamente só vale 500 reis...

Adeus, Buarque. Nós só nos encontramos de 20 em 20 anos. Até, pois, 1964.

Do velho camarada

Lobato

Figura 1: Carta de Lobato a Buarque com conotação racista

Fonte: https://ungareia.wordpress.com/2019/07/24/em-carta-inedita-monteiro-lobato-expoe-seu- racismo-a-machado-de-assis/

A contradição que denunciamos remete ao discurso que evoca a Lei nº 3.353, de 13 de maio de 1888 (BRASIL, 1888), mais conhecida como Lei Áurea, bem como outras leis que, supostamente, promovem a igualdade racial, enquanto constitui-se uma sociedade estruturada, nos campos da filosofia, na política, nas artes, na literatura e em tantos outros campos, em bases racistas, como podemos inferir ao analisar as palavras de Kant, Hume e Lobato que circulam ainda hoje e influenciam o ideário das pessoas.

Foi em razão das lutas dos negros por liberdade e da importância política dos movimentos abolicionistas, que em 1951 (somente 63 anos depois da publicação da Lei Áurea) que a Lei Afonso Arinos tornou contravenção penal[7] a prática de discriminação decorrente de preconceito racial. Apenas em 1989, mais de um século após a assinatura da lei nº 3.353, de 1888, por iniciativa e luta do deputado negro Carlos Alberto Caó de Oliveira, foi assinada pelo então presidente José Sarney a Lei 7.716/1989, que ficou conhecida Lei Caó, a qual regulamentava a Constituição Federal de 1988 em seu mandamento de ser crime inafiançável e imprescritível a prática de racismo.

Resumidamente, desde a invasão ocorrida em 1500, até 1989 – durante 489 anos – a prática de invisibilizar a importância do negro na sociedade brasileira foi tida como *aceitável*. Nesse processo histórico, é difícil imaginar que pudesse ser diferente a composição de uma cultura escolar, de modo que o racismo presente na sociedade pudesse ser superado a partir da educação. O resultado reverbera nas práticas escolares como um todo e no currículo de modo particular.

Também é difícil esperar que aquilo que esteve presente – e considerado aceitável – durante 489 anos mudasse de uma hora para outra, a partir simplesmente da promulgação de uma lei. Seria preciso mudar as bases nas quais os valores sociais se fundam, e isso só é possível quando voltamos nossa atenção para os processos de formação das pessoas. É nesse sentido que, continuando a saga pelo reconhecimento das contribuições dos negros para a constituição do conhecimento humano, em 20 de dezembro 1996, surge a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB, Lei 9.394/96, que estabelece:

> Art. 1º A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais. (BRASIL, 1996)

---

[7] No ordenamento jurídico brasileiro, as contravenções penais são ações de pequeno potencial ofensivoque são passíveis de punições mais brandas, podendo ser convertidas em penas alternativas, ainda mais leves.

No entanto, apesar da indicação de que as manifestações culturais são parte dos processos educacionais, foi preciso esperar até 9 de janeiro de 2003, durante o primeiro governo do presidente Luiz Inácio Lula da Silva, para que surgisse uma alteração na LDB, através da Lei nº 10.639/03, para que fosse incluído o artigo 26-A, o qual determinava que

> Nos estabelecimentos de ensino fundamental e médio, oficiais e particulares, **torna-se obrigatório o ensino sobre História e Cultura Afro- Brasileira**. §1º. O conteúdo programático a que se refere o caput deste artigo incluirá o estudo da História da África e dos Africanos, a luta dos negros no Brasil, a cultura negra brasileira e o negro na formação da sociedade nacional, resgatando a contribuição do povo negro nas áreas social, econômica e política pertinente à História do Brasil. §2º. Os conteúdos referentes à História e Cultura Afro-Brasileira **serão ministrados no âmbito de todo o currículo escolar**, em especial nas áreas de Educação Artística e de Literatura e História Brasileira. (BRASIL, 2003, alterando BRASIL, 1996. Os destaques são nossos)

Atualmente, nos aproximamos das reflexões (chamadas por alguns de “comemorações”) decorrentes dos 20 anos da promulgação da lei 10.639/2003. O que verificamos, a princípio, é a ordem de grandeza da fração $\frac{20}{523}$, que indica a razão entre o período de tempo posterior à lei 10.639 e aquele que o antecedeu. Ou seja, quais e quantas ideias difundidas durante 523 anos poderiam ter mudado nos últimos 20 anos?

Almeida (2019) nos indica a essência dessas ideias construídas e que permanecem:

> 1. pessoas negras são menos aptas para a vida acadêmica e para a advocacia; 2. pessoas negras, como todas as outras pessoas, são afetadas por suas escolhas individuais, e sua condição racial nada tem a ver com a situação socioeconômica; 3. pessoas negras, por fatores históricos, têm menos acesso à educação e, por isso, estão alocadas em trabalhos menos qualificados, os quais, consequentemente, são mal remunerados; 4. pessoas negras estão sob o domínio de uma supremacia branca politicamente construída que está presente em todos os espaços de poder e de prestígio social. (ALMEIDA, 2019, p. 39)

A pesquisa que desenvolvemos se insere neste contexto, sobretudo quando volta sua atenção para as práticas de ensino de Matemática, especialmente de Geometria. Isso porque entedemos que, ao apresentar na escola de educação básica uma Matemática pensada, criada, encontrada, desenvolvida apenas por personagens históricos europeus e brancos e naturalizamos a ideia de que essa Matemática é representativa de uma *“ciência* *das pessoas inteligentes"*, estamos corroborando uma interpretação de que pessoas brancas seriam superiores em inteligência às pessoas negras, já que, supostamente, apenas pessoas brancas produziram a *ciência das pessoas inteligentes.* Como professores e professoras de matemática, cabe a nós desmonstar essa viga que compõe a estrutura racista da sociedade.

A lei 10.639/2003, como destacamos, estabelece que a História e a Cultura Afro-Brasileira serão objeto de estudo de *todo o currículo escolar*, mas apresenta uma potencialidade para as áreas de Artes, Literatura e História. Ao se deparar com essa indicação, parece ter se tornado comum que, de modo geral, professores e professoras de Matemática se abstenham das discussões a respeito da Cultura Afro-Brasileira no contexto de suas práticas de ensino.

Notamos, então, mais uma contradição: se, por um lado, a luta e a resistência dos povos negros alcançam vitórias sociais que apontam para a *obrigatoriedade* do ensino da História e da Cultura Afro-Brasileiras, ou seja, das contribuições dos negros na constituição do conhecimento humano, por outro lado as práticas tradicionais de ensino de Matemática têm reconhecido a Matemática escolar como reflexo absoluto e invariável da Matemática entendida como ciência milenar que tem, historicamente, estabelecido um estereótipo para os sujeitos da produção do conhecimento: homens, brancos e europeus.

Quando as evidências históricas apontam para uma produção de conhecimentos matemáticos produzidos em outros contextos (fora da Europa e por pessoas não brancas), tais conhecimentos são inferiorizados em uma comparação anacrônica com os conhecimentos atuais – esses sim, em tese, representativos de uma matemática *desenvolvida* e criada por pessoas que seriam *iluminadas* pelo saber (e, quase sempre, brancas e europeias ou descendentes de europeus). Essa contradição também precisa ser superada.

Assim, discutimos a seguir, no subitem 1.1, algumas evidências do eurocentrismo curricular nas práticas de ensino, como um todo, bem como naquelas voltadas ao ensino de Matemática, de modo especial. Conferimos especial ênfase ao recorte que envolve nossa pesquisa voltado à constituição dos saberes geométricos para, em seguida, apontar possibilidades de superação considerando influências da Cultura Africana presentes na sociedade brasileira.

Mais adiante, no subitem 1.2, trataremos do necessário reconhecimento das limitações formativas decorrentes de uma perspectiva de ensino única: o eurocentrismo. Apresentaremos, a partir de recortes particulares e específicos, nossa compreensão sobre os problemas de tal perspectiva eurocêntrica e como esta obstaculiza o desenvolvimento de uma educação matemática voltada ao desenvolvimento das relações étnico-raciais. Passemos, por hora, ao subitem 1.1.

1.1 A Europa como centro do conhecimento universal: o caso de Euclides e a "verdadeira" Geometria

É inegável que povos e personagens históricos oriundos da Europa contribuíram em grande medida para o desenvolvimento da ciência e do conhecimento humano. Feito este reconhecimento, passamos a problematizar a excessiva ênfase que os processos educacionais – de ensino e de aprendizagem – conferem às produções europeias em detrimento do reconhecimento das produções de outros povos, especialmente, os povos negros.

Por exemplo: uma busca no maior portal de buscas na internet pelo termo "Papiro de Rhind" – utilizando as aspas para delimitar a pesquisa à correspondência exata do termo – retorna 20.500 (vinte mil e quinhentos) resultados. Uma análise superficial dos primeiros resultados não apresenta nenhuma menção ao nome do escriba egípcio Ahmes, que escreveu o papiro. Uma busca, com os mesmos critérios, pelo termo "Papiro de Ahmes" retorna 10.100 (dez mil e cem) resultados (menos da metade em relação à pesquisa por "Papiro de Rhind"), sendo que a mesma análise dos primeiros resultados traz a indicação de que esse papiro é o "de Rhind". Por que isso é importante na nossa análise? Porque, na verdade, trata-se do mesmo documento histórico. De acordo com Pinheiro e Oliveira (2019), o

> [...] papiro de Rhind ou papiro de Ahmes é um documento egípcio de cerca de 1.650 a.C., no qual um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria. O papiro foi **roubado** pelo escocês Alexander Henry Rhind, de Aberdeen, em 1858, em Luxor, no Egito. O Museu **Britânico** incorporou-o ao seu patrimônio em 1865, permanecendo em seu acervo até os

> dias atuais. (PINHEIRO e OLIVEIRA, 2019, p. 6, destaques nossos)

Rhind, na sua vez, foi o escocês (europeu) que se apropriou do documento escrito pelo escriba egípcio (africano) Ahmes. Rhind, o europeu, é mais frequentemente associado ao documento, que é muito relevante para o reconhecimento dos processos de produção de conhecimento matemático humano, do que seu autor, um africano. O papiro, objeto histórico que sintetiza aspectos do conhecimento produzido no Egito, na África, faz parte do patrimônio do Museu Britânico, na Europa.

Este é um entre tantos exemplos que nos levam à compreensão de que nossa sociedade atual atribui uma centralidade europeia à produção de conhecimento que precisa ser problematizada em benefício de um reconhecimento de uma produção cultural e de conhecimentos de outros muitos povos e sujeitos não europeus que acabam sendo postos em segundo plano quando se busca educar – ensinar e aprender – sobre os processos de constituição dos seres humanos.

Um outro exemplo, mais relevante para nós nesta pesquisa, surge quando verificamos, nas práticas de ensino e de aprendizagem, uma homenagem que atribui ao grego (europeu) Euclides de Alexandria[8] o título de "pai da Geometria". A Geometria que domina o currículo de Matemática a ser ensinada é chamada de *Geometria Euclidiana* e isso, porque são ensinados majoritariamente os conhecimentos a partir dos quais a Geometria ocidental foi construída. Ela adota o método empregado por Euclides para escrever seu mais famoso livro, os *Elementos: o método axiomático-dedutivo*.

Esse método consiste em, partindo de premissas, em tese, óbvias (os axiomas), construir, por dedução, a demonstração de uma série de proposições (teoremas) que passarão a servir de estrutura para demonstrar outros teoremas ainda mais complexos (tornando-se lemas) e possibilitarão resolver todos os tipos de situações (problemas).

Os *Elementos* é a obra, cuja autoria é atribuída a Euclides, que compila todas as demonstrações e conhecimentos geométricos de seu tempo, que são

[8] Apesar de a cidade de Alexandria estar geograficamente localizada no território egípcio – na África, portanto – foi fundada por Alexandre Magno e estava sob domínio do que a história hegemônica chama de "mundo grego".

necessários para a construção, usando apenas uma régua não graduada e um compasso, dos cinco sólidos platônicos (BICUDO, 2009).

A história da Matemática já mostrou não ser razoável a ideia segundo a qual os *Elementos* tenham sido escritos por uma só pessoa. Bicudo (2009) indica que diversos “discípulos” de Euclides, ao se depararem com erros, dificuldades ou mesmo durante os processos de cópia que antecederam o surgimento da imprensa, acrescentaram, modificaram ou suprimiram partes de os *Elementos*, fazendo da obra que chegou aos nossos dias seja, na verdade, uma produção de diversas mentes atribuídas a um personagem histórico único.

Apesar de a suposta *paternidade* da Geometria ser atribuída a Euclides, o historiador Heródoto, citado por Caraça (1951), apresenta a seguinte origem para as ideias que estão na gênese do conhecimento geométrico:

> Disseram-me que este rei (Sesóstria) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que lhe tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que foi depois que ela passou aos gregos. (CARAÇA, 1951, p. 32)

Bicudo (2009), em sua importante tradução de os *Elementos* para o Português do Brasil, traz uma apresentação em que destaca um trabalho intitulado *História da Geometria*, escrito por Eudemo, que teria sido um dos mais importantes discípulos e colaboradores de Aristóteles. Nessa obra, Eudemo, reconhecendo a geometria produzida originalmente pelos egípcios, indica que

> Tales [de Mileto], primeiramente **tendo ido ao Egito**, transportou para a Grécia essa teoria [a Geometria] e, por um lado, descobriu muitas coisas, e, por outro lado, mostrou os princípios de muitas para os depois dele, aplicando-se a umas de modo mais geral; a outras, de modo mais sensível. (BICUDO, 2009, p. 38, destaque nosso)

Segundo Eudemo, Tales aprendeu muitas coisas em sua viagem ao Egito e levou tais conhecimentos para a Grécia, contribuindo com os que vieram depois dele. Para atenuar essa contradição – sobre a origem de a Geometria ser euclidiana (europeia) ou egípcia (africana) – o mais comum nos processos de formação de professores de Matemática atualmente é que haja uma relativização sobre a importância e a complexidade do conhecimento geométrico produzido pelos egípcios em relação ao conhecimento – supostamente pleno – que se verifica a partir de os *Elementos*.

O próprio professor Irineu Bicudo, na referida apresentação de sua tradução de os *Elementos*, trata de apresentar uma relativização do conhecimento produzido fora da Europa, com uma anacrônica comparação de complexidade, ao afirmar, por exemplo, que "um dos capítulos mais importantes da história cultural, embora pouco conhecido, é a transformação do **primitivo** conhecimento matemático empírico de egípcios e babilônios na ciência matemática grega, **dedutiva, sistemática, baseada em definições e axiomas**" (BICUDO, 2009, p. 83, destaque nosso). O professor Bicudo (2009) evoca Bourbaki (1984, p. 9, *apud* BICUDO, 2009, p. 83), o qual teria defendido que

> Não há, hoje, qualquer dúvida de que existiu uma matemática pré-helênica bem desenvolvida. Não somente são as noções (já mais abstratas) de número inteiro e de medida de quantidade comumente usadas nos documentos mais antigos que nos chegaram **do Egito** e da Caldeia[9], mas a álgebra babilônica, por causa da elegância e segurança dos seus métodos, não deve ser concebida como uma simples coleção de problemas resolvidos por um tatear empírico. (BOURBAKI, 1984, p. 9, apud BICUDO, 2009, p. 83, destaque nosso)

A evocação, no entanto, é feita para que o professor Bicudo (2009) possa discordar, afirmando que

> No entanto, não encontramos, seja nos documentos egípcios seja nos babilônios, que nos chegaram aos milhares, qualquer esboço do que se assemelhe a uma "demonstração", no sentido formal do conceito. A noção de ciência dedutiva era desconhecida dos povos orientais da Antiguidade. Os seus textos matemáticos mostram-se, em que pese o afirmado por Bourbaki, como uma coletânea de problemas, mais ou menos interessantes, e as suas soluções, em forma de uma receita prescrita, como as indicações das etapas de um ritual oferecido a uma deidade. Nada de definições, nada de axiomas, nada de teoremas! Sobre tais coisas repousa a sombra! (BICUDO, 2009, p. 83)

Mlodinou (2004), em seu clássico *A janela de Euclides*, defende propositura que, ao que parece, converge para este entendimento

[9] A região da antiga Caldeia fica no território que, atualmente, chamamos de "Oriente Médio", onde viveram os povos mesopotâmicos, como sumérios, assírios e babilônios. Geograficamente, a Mesopotâmia localizava-se na divisa entre o Oriente e a África, de modo que seja bastante provável que tenha havido trocas culturais e intercâmbio de conhecimentos entre as avançadas civilizações que, outrora, habitaram aqueles territórios.

generalizante de que egípcios e babilônicos (não europeus) esbarravam no conhecimento ao acaso e que suas construções e conhecimento de mundo decorreriam de um movimento incrível de sorte.

> As raízes dos intelectuais **brotaram** nas antigas civilizações da Babilônia e do Egito. Yeats escreveu sobre a indiferença babilônica, uma característica em matemática que impediu que alcançassem lugar de destaque. A humanidade pré-grega [ou seja, não europeia] tinha noção de muitas fórmulas eficientes, **truques** de cálculo e de engenharia, mas como nossos líderes políticos, eles algumas vezes **realizavam surpreendentes feitos com impressionante pouca compreensão do que estavam fazendo**. Eles nem se importavam com isso. **Eram construtores trabalhando no escuro, tateando, descobrindo o seu caminho, levantando uma estrutura aqui, colocando um piso ali, alcançando o propósito sem jamais ter alcançado a compreensão do processo**. Eles não foram os primeiros. Os seres humanos vêm contando e fazendo cálculos, cobrando impostos e dando troco de menos entre si, bem antes dos tempos históricos registrados. Algumas ferramentas consideradas de computação datadas de 30.000 a.C. podem muito bem ser varas decoradas por artistas com sensibilidades matemáticas intuitivas. Porém, outras são curiosamente diferentes. Nas margens do lago Edward, **na atual República Democrática do Congo** [também na África], arqueólogos descobriram um pequeno osso, de 8 mil anos, com uma pequeníssima pedra de quartzo presa num entalhe em uma das extremidades. O seu criador – um artista ou matemático nunca saberemos com certeza – entalhou três colunas de cortes em um dos lados do osso. Os cientistas acreditam que este osso, chamado de osso Ishango, provavelmente seja o mais antigo exemplo já encontrado de um dispositivo para registro numérico. (MLODINOW, 2004, p. 17, destaques nossos)

Contraditoriamente, no entanto, o próprio professor Irineu reconhece as razões para que algumas obras tenham resistido ao tempo e tenham chegado aos nossos dias, enquanto outras caíram no esquecimento.

> Ora, quando se tem em mente a dificuldade na confecção de cópias manuscritas, se um tratado trouxesse de forma bem posta e melhorada o que outros continham, passava-se, com vantagens, a copiar aquele em detrimento destes. Desse modo, o tempo fez com os trabalhos dos demais o que não conseguiu com os *Elementos* de Euclides: eliminou-os quase que totalmente da memória dos homens. (BICUDO, 2009, p. 41)

Com isso, podemos supor, com razoabilidade, ser pouco provável que os egípcios encontrassem, como obra do mero acaso, situações que sustentassem a grandiosidade daquilo que construíram, sem alguma sustentação teórica e que coube exclusivamente aos gregos a demonstração e definição daquilo que os egípcios, em seu conhecimento “primitivo” – nas palavras de Bicudo (2009) – ignoravam.

Também não parece razoável, a partir do que nos apresenta o historiador Eudemo, citado pelo próprio Bicudo (2009), que tenha cabido a Euclides e seus discípulos a criatividade da qual decorre a criação da Geometria Axiomática que chegou até nós, já que Euclides tem como uma de suas referências Tales, o qual, por sua vez, aprendeu com os egípcios. Além do que, como também o próprio professor Bicudo (2009) indica, “a dificuldade na confecção de cópias manuscritas”, diante da possibilidade de se copiar os *Elementos* – obra que compilava uma série de conhecimentos – pode ter contribuído para que os papiros e outras referências às produções egípcias que pudessem ter inspirado Euclides (a partir de Tales e de outros) fossem eliminadas “quase que totalmente da memória dos homens”.

Ainda diante na ânsia de justificar a Geometria Euclidiana como a *verdadeira* geometria, Bicudo (2009) indica que

> Tanto no Egito quanto na Mesopotâmia, era a classe sacerdotal a detentora do conhecimento. Ora, os sacerdotes punham-se de intermediários entre a deidade e o povo. Os desígnios da divindade não carecem de explicações; seus desejos devem ser satisfeitos com os rituais que, aplacando-lhe a ira, lhe atrai o beneplácito. É função dos sacerdotes interpretar a vontade dos deuses, guiando o povo nos passos do rito apaziguador. (BICUDO, 2009, p. 84)

Ainda que, de fato, a sociedade egípcia tenha se fundado em grande medida em preceitos de uma religiosidade politeísta, sabemos dos estudos históricos que a sociedade grega não era diferente. Se, no Egito, o conhecimento não estava acessível a todos, tão pouco na Grécia qualquer um poderia ser considerado cidadão e, portanto, acessar o conhecimento que era reservado a alguns membros da sociedade pertencentes às classes dominantes no mundo grego – tal e qual em relação à classe sacerdotal no Egito.

A defesa de que a Geometria Euclidiana (ou seja, aquela que reconhecemos a partir das contribuições de Euclides em os *Elementos* seja fundamental para entender as formas e as leis geométricas do mundo que nos rodeia) esconde, na verdade, a constatação de que a sociedade *ocidental*, à qual costumamos atribuir o rótulo de “o mundo”, ou ainda “o mundo civilizado”, fundamentou suas construções geométricas, basicamente naquilo que Euclides sintetizou em os *Elementos*. Então, é uma inversão dizer que a Geometria Euclidiana explica o mundo. O que acontece é que “o mundo”, pelo menos a ideia de mundo presente neste discurso, é que foi construído tendo como base estrutural a Geometria desenvolvida a partir de Euclides.

É nesse contexto que Eglash (2005b) apresenta sua crítica:

> A Geometria Fractal versus Não Fractal ("euclidiana") não implica bom versus mau. Por outro lado, as pessoas investem em formas abstratas significados locais particulares. Para dar um exemplo polêmico, decisões recentes da Suprema Corte dos EUA declararam que os distritos eleitorais não podem ter formas "bizarras" ou "altamente irregulares", e vários contornos fractais foram substituídos por linhas retas de forma euclidiana. Se os padrões de assentamento fractal são tradicionais para os afrodescendentes e os padrões de assentamento euclidiano para os europeus, é etnocêntrico insistir apenas nas divisões euclidianas dos distritos eleitorais? (EGLASH, 2005b, p. 8, tradução nossa)

Vai ficando cada vez mais evidente que a cultura ocidental tende a reconhecer como “estranho” aquilo que foge de suas tradições culturais, de modo que formas não contempladas por uma Geometria Euclidiana passam a ser rotuladas, de acordo com a indicação de Eglash (2005b), como “irregulares” e “bizarras”. Se nesse contexto, afrodescendentes acabam não se reconhecendo como produtores de conhecimento e passam a uma condição de alienação diante da sociedade e da ciência. Essa condição, evidentemente, precisa ser superada e o primeiro passo para isso é reconhecermos os mais diversos aspectos da diáspora africana em nossa cultura ocidental, de modo geral, e brasileira, de modo particular.

É nesse sentido que apresentamos o próximo subitem, 1.2, no qual nos propomos a discutir aspectos da presença e influência da cultura africana em nossa sociedade e buscamos estabelecer algumas relações entre esta cultura e a produção de conhecimento da matemática escolar.

1.2 Educação matemática para as relações étnico-raciais: reconhecendo a presença da cultura africana fora da África.

Discutir cultura e currículo é um grande desafio, sobretudo quando nos colocamos no lugar de quem fala a partir da sociedade brasileira. Como poderíamos definir a cultura brasileira? Ou melhor: poderíamos defini-la? A sutileza da variação na forma de apresentar a questão mostra sua complexidade.

Primeiro – quando perguntamos “como podemos definir” – há implícita a ideia de que existe uma definição e que esta precisa ser apresentada da melhor forma possível. Já a segunda forma coloca em dúvida a própria existência dessa definição. Eis o nosso problema neste texto. Parece-nos, a priori, muito difícil localizar os conceitos de Cultura, Cultura Africana e Cultura Brasileira sem cair na armadilha de tratar do que vem sendo chamado de "multiculturalismo". Mas, aceitando inicialmente o desafio, recorremos a Hall (2003, p. 52) para iniciar a compreensão da distinção entre multicultural e multiculturalismo:

> Pode ser útil fazer aqui uma distinção entre o "multicultural" e o "multiculturalismo". Multicultural é um termo qualificativo. Descreve as características sociais e os problemas de governabilidade apresentados por qualquer sociedade na qual diferentes comunidades culturais convivem e tentam construir uma vida em comum, ao mesmo tempo em que retêm algo de sua identidade "original". Em contrapartida, o termo "multiculturalismo" é substantivo. Refere-se às estratégias e políticas adotadas para governar ou administrar problemas de diversidade e multiplicidade gerados pelas sociedades multiculturais. É usualmente utilizado no singular, significando a filosofia específica ou a doutrina que sustenta as estratégias multiculturais. "Multicultural", entretanto, é, por definição, plural. Existem muitos tipos de sociedade multicultural, como por exemplo, os Estados Unidos da América, a Grã-Bretanha, a França, a Malásia, o Sri Lanka, a Nova Zelândia, a Indonésia, a África do Sul e a Nigéria. Estes são, de forma bastante distinta, "multiculturais". Entretanto, todos possuem uma característica em comum. São, por definição, culturalmente heterogêneos. Eles se distinguem neste sentido do Estado-nação "moderno", constitucional liberal, do Ocidente, que se afirma sobre o pressuposto (geralmente tácito) da homogeneidade cultural organizada em torno de valores universais, seculares e individualistas liberais. (HALL, 2003, p. 52)

Tomando a liberdade de incluir o Brasil entre os países citados por Hall (2003) como exemplos de sociedades multiculturais, verificamos que o multiculturalismo nos leva à armadilha sintetizada na falácia[10]: "somos todos brasileiros; somos todos iguais". É uma falácia, pois – de acordo com a definição de vocábulo – ele evoca uma premissa verdadeira (somos brasileiros), mas para sustentar uma conclusão falsa (somos iguais).

Não podemos, portanto, nos deixar levar para o lugar comum, no qual os elementos da nossa cultura (brasileira) que têm origem no continente-mãe (a África – bom que se diga) sejam meramente incorporados sem os devidos créditos, ou seja, sem a indicação explícita de que são africanos. Se não for

[10] Falácia é um argumento inválido. Válido é aquele argumento que apresenta uma ou mais premissas, as quais, por sua vez, sustentam uma conclusão logicamente irrefutável diante da veracidade daquelas premissas. Já o argumento inválido (ou falacioso) é aquele que apresenta uma ou mais premissas e, a partir delas, supõe uma conclusão que não é necessariamente verdadeira diante daquelas premissas.

assim, corremos o risco de invisibilizar a produção africana de conhecimento e, novamente, como alertou Eglash (2005b), alienar afrodescendentes que passam a não mais se reconhecer como produtores de conhecimento e de cultura.

Vamos apresentar um exemplo a este respeito: no contexto das atividades remotas realizadas nas redes de ensino em razão do necessário isolamento social decorrente da pandemia COVID-19, o Centro de Mídias do Estado de São Paulo – centro governamental instituído para apresentar parte do conteúdo escolar pela televisão (através do canal UNIVESP-TV) e pelo canal no portal da internet YouTube, criado especificamente para este fim – veiculou uma aula voltada à disciplina de Educação Física para alunos do 7º ano do ensino fundamental, intitulada "Lutas no Brasil: capoeira"[11]. No decorrer da apresentação, a equipe responsável pela transmissão passa a reproduzir uma entrevista com três pessoas (brancas) que se propõem a comentar a capoeira em razão das comemorações do dia do capoeirista. É nessa entrevista que um dos entrevistados apresenta a seguinte narrativa a respeito da história da capoeira:

> Tratar da história da capoeira é um assunto muito complexo e [...] não há muitas fontes. Então, só pra você [para a entrevistadora] ver um ponto contraditório aí: a primeira referência que se tem da luta da capoeira, enquanto luta, né, é de 1770, do tenente João Moreira, que era um português, né, da guarda de milícias. E a referência que se tem é que os negros viam, né, como esse tenente tinha uma maneira diferente de lutar e passaram a imitá-lo e dar nomes de movimentos. Entendeu? Então, quando nós falamos de capoeira na mata é uma coisa, capoeira enquanto luta é outra situação, né? Então o que nós temos é um produto multinacional, multicultural, né? Que envolve a cultura afro, a cultura lusitana principalmente, né? Há um paradigma que diz que a capoeira é fruto da cultura afro-brasileira, mas não podemos esquecer que é uma história de Portugal***. O maior tempo dela é uma história portuguesa, então é um patrimônio luso-afro-brasileiro.*** E, principalmente, quando falamos de África, não podemos nos esquecer das aculturações afro-asiáticas, que ocorreram. Então, é um assunto extremamente complexo. (SÃO PAULO-CMSP, 2021, grifo nosso)

Notemos que, sob a máscara do reconhecimento do multiculturalismo na origem da capoeira, o que se alcança, de fato, é a usurpação da produção cultural afro-brasileira. Ainda que de fato devamos reconhecer a pouca

---

[11] O vídeo com a referida aula ficou gravado no canal CMSP e está disponível no endereço: https://www.youtube.com/watch?v=Qz4UBIFuejA&t=820s. Entre os minutos 13:13 e 14:45. Acesso em 04 de janeiro de 2023.

quantidade de fontes acerca das origens da capoeira, precisamos pensar que as pessoas escravizadas não eram reconhecidas como produtoras de conhecimento. É preciso lembrar ainda o fato de que a capoeira era proibida em razão de representar risco à manutenção da sociedade escravista. Que tipo de “fontes” se esperava encontrar a respeito de uma prática que era proibida? Não é de se estranhar, portanto, a razão pela qual o registro histórico que chegou aos nossos dias tenha como protagonista um português. Isto, porém, não demostra, como infere o entrevistado (que manifesta sua posição a todos os estudantes do 7º ano da Rede Pública Estadual de São Paulo, a maior do país), que os portugueses fossem protagonistas, ou seja, os *principais* (expressão utilizada no vídeo, como destacamos na citação) criadores da capoeira enquanto luta. Apenas demonstra que aos portugueses seria permitido praticar aquilo que aos escravizados era proibido.

Ao promover a defesa da suposta complexidade a respeito das origens da capoeira e apelando ao *multiculturalismo* para justificar as nuances de tal prática cultural, o que se obtém não é o reconhecimento de que há no Brasil uma multicultura, mas sim um apagamento da produção cultural com origem africana, o que afasta o negro de seu papel de produtor de conhecimento e de cultura, para colocá-lo em um lugar de quem observa e copia aquilo que o branco europeu criou. Ao afirmar que “os negros viam, né, como esse tenente tinha uma maneira diferente de lutar e passaram a imitá-lo e dar nomes de movimentos”, o entrevistado (branco) coloca o negro em lugar secundário, subalterno em relação à produção.

Em que pese a já referida baixa quantidade de fontes para a historiografia, provavelmente pelas razões que expusemos acima, a versão histórica mais comumente aceita é a de que na África se praticavam rituais de passagem da infância para a vida adulta, os quais incluíam danças inspiradas nas observações da natureza e da vida animal, e estas teriam dado origem à manifestação cultural que, atualmente, denominamos capoeira.

Na África, de modo geral, os negros eram livres, de modo que não precisavam lutar para ter liberdade. Essa necessidade surge quando os negros africanos passam a ser escravizados. Dessa necessidade é que a dança e o ritual inspiram a luta. Assim, a capoeira surge no Brasil provavelmente no decorrer do século XVII.

> Os primeiros negros escravizados que chegaram ao Rio de Janeiro no início do século XVII eram oriundos dos declives a oeste das terras altas, ao sul do rio Cuanza, na região sul do que hoje é o território de Angola. Mais tarde, no final dos setecentos, quando da descoberta de ouro nas Minas Gerais, houve um aumento da demanda de escravos na cidade, e essa demanda foi suprida com pessoas capturadas nas montanhas centrais angolanas. Nesse momento, a escravização era feita por meio de incursões militares contra grupos possuidores de fortes exércitos. Um dos resultados deste tipo de meio de obter escravos é que os que eram feitos cativos possuíam extenso repertório militar, pois provinham de unidades militares treinadas. Joseph Miller defende que este repertório cultural comum poderia ter servido de base para a criação de laços de solidariedade entre os indivíduos escravizados. Os “benguelas”, nome como eram conhecidos os escravos dessa região, formaram o “primeiro grupo substancial de centro africanos” na cidade do Rio de Janeiro, e suas origens linguísticas comuns certamente favoreceram o estabelecimento de solidariedade entre esses grupos. É possível que seja deste período a difusão de técnicas marciais e militares entre os grupos escravizados, o domínio destas técnicas, como veremos mais adiante, era um dos elementos caracterizados dos capoeiras. (CALDAS, 2018, p. 29)

Por representar um risco à manutenção do sistema escravista, a capoeira ficou proibida oficialmente até 1937, embora nunca tenha deixado de ser praticada, como mostram os registros dos sistemas judiciário e carcerário que perseguiam e prendiam os praticantes da capoeira (OLIVEIRA e LEAL, 2009). Já nos anos 1930, o baiano Manuel dos Reis Machado, o mestre Bimba, criou a capoeira regional que se diferenciava da Capoeira Angola, a mais tradicional e que foi difundida a partir da década de 1910 pelo baiano Vicente Ferreira, o mestre Pastinha (Idem).

Esse exemplo nos coloca diante da oportunidade de, valorizando a presença da Cultura Africana fora da África, desenvolver situações didáticas que oportunizem o reconhecimento do povo negro como produtor de conhecimento e de cultura e não como mero observador e copiador das produções de outros. Essa oportunidade não se limita à História, ou às Artes (ou à Educação Física, como no caso da aula do CMSP). Os estudos de Matemática Escolar podem ser inspirados e desenvolvidos neste contexto, o que coloca a produção cultural além daquela imediata e possibilita discutir conhecimentos subjacentes. Vejamos as potencialidades para o ensino de Geometria.

De acordo com Santos et al. (2013, p. 7.266), a capoeira oportuniza a discussão de alguns elementos geométricos que se verificam durante o jogo, tais como:

> A música, [que] é marcada pelo compasso (a música possui operações com frações); Meia lua de compasso, rabo de arraia, rasteira de frente ou rasteira de costa: [que descrevem] um trajeto de 180° [ou seja, uma semicircunferência]; Rasteira lateral: [que possibilita identificar] um triângulo qualquer; Esquiva lateral: [que possibilita identificar] um triângulo retângulo; Organização da roda: [que apresenta uma] semicircunferência ou circunferência completa, (depende do mestre); [...] Ginga: [que permite reconhecer] ideia de um triângulo equilátero [ou isósceles]. (SANTOS, et. Al, 2013, p. 7266)

Complementarmente, podemos reconhecer, nos golpes e movimentos característicos da capoeira, elementos geométricos, como:

- Benção: eixo horizontal, um trajeto unidimensional;
- Meia lua de frente: lembra uma semicircunferência;
- Macaco: lembra uma circunferência completa;
- Salto folha: circunferência completa

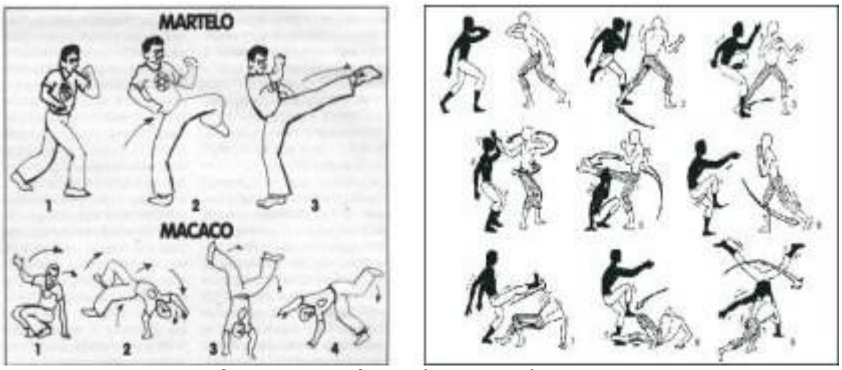


Figura 2: Golpes da Capoeira

Fonte: https://portal.uneb.br/gestec/wp-content/uploads/sites/69/2018/02/1286.pdf

Ao analisar a ginga e os golpes em que se pode verificar a estrutura triangular, surge a oportunidade de se discutir propriedades dos triângulos, como o fato de, uma vez estabelecidos dois lados e um ângulo, determinar-se um, e somente um, triângulo. Essa é a razão para que as estruturas de resistência, tanto na natureza quanto nas engenharias, remetam ao formato triangular.

Além dos golpes, na capoeira as formas também se verificam nos instrumentos, como os berimbaus, os pandeiros e os agogôs. A Matemática também se verifica nas marcações dos ritmos musicais, que serão propostos em todo o contexto da capoeira.

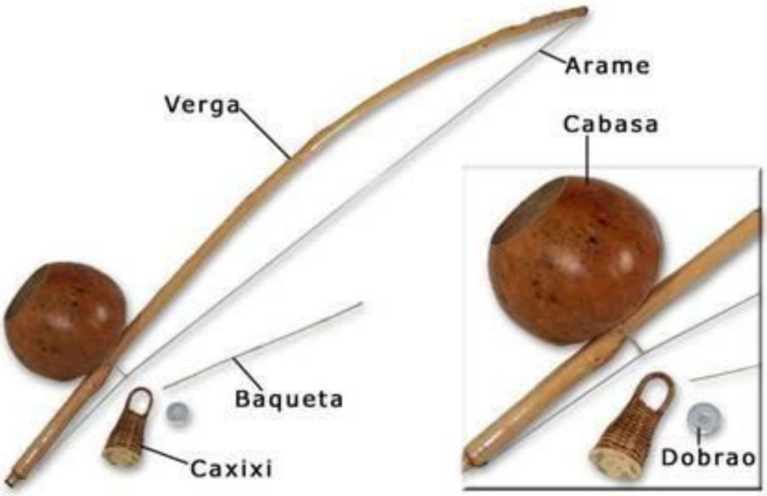


Figura 3: Instrumentos da capoeira - berimbau

Fonte: Abadá-Capoeira: https://abadarodos.files.wordpress.com/2012/01/img_0666.jpg

A capoeira se apresenta para nós como exemplo de oportunidade para, no reconhecimento da produção de conhecimento e de cultura por povos africanos e afrodescendentes, promovermos situações didáticas que tirem as pessoas negras das posições de coadjuvantes e as coloquem nas posições de protagonistas. Ao tratar da influência da Cultura Africana no Brasil, nos deparamos com discussões sobre sincretismos religiosos, comidas típicas, representação cultural, vestimenta, influências sobre a Língua Portuguesa, dentre outras contribuições.

Segundo Munanga (2007, p. 92), podemos distribuir os povos africanos em três áreas geográfico-culturais:

I – a área ocidental: representada pelas culturas dos povos ioruba ou nagô;

II – a zona do Sudão ocidental: ocupada pelos grupos de negros malês (Peul ou Fula, Mandinga, Haussás, Tapas e Guruns);

III – a área dos povos de língua bantu.

À medida em que pessoas escravizadas eram trazidas para o Brasil, a partir dessas regiões foram acrescentando aspectos culturais e conhecimentos que foram sendo apropriados e incorporados à nossa cultura, mas – como indicamos – não podemos perder de vista sua gênese.

A cultura trazida por esses povos apresentou grandes influências em muitos aspectos da formação da cultura brasileira, o que precisa ser evidenciado, pois pode oportunizar a construção de novos saberes, inclusive matemáticos. Os povos falantes do bantu, língua da qual herdamos o termo *quilombo*, que é a versão em Português da palavra bantu kilombo, a qual significa povoado ou fortaleza. Os Sudaneses trouxeram para cá instrumentos musicais e os termos que os nomeiam, como os Jongos, os Tambôs e os Candogueiros, além da dança Coco de Zambe, praticada em alguns estados nordestinos, a cuíca, conhecida em todo o Brasil, e o berimbau de barriga, que conhecemos da capoeira. No contexto das danças e músicas se destacam o maculelê, o maracatu, o bumba-meu-boi, a capoeira e o samba.

> Na visão dos brasileiros afrodescendentes de modo geral, consciente e inconscientemente, todos esses legados, ou bantus ou sudaneses, constituem o patrimônio histórico, sócio-político, cultural e religioso com o qual eles constroem a sua identidade. (MUNANGA, 2007, p.93)

Em síntese, pudemos colocar em discussão neste capítulo a necessidade de superar práticas exclusivamente eurocêntricas, que menosprezam, relativizam ou mesmo tentam usurpar dos negros sua posição de produtores de cultura e conhecimento, atribuindo-lhes um papel de coadjuvantes dos movimentos de produção humana. Neste contexto, apresentamos aspectos que evidenciam que a Matemática pode – e deve – ser parte de um processo de educação para as relações étnico-raciais desde que se reconheça a não exclusividade de personagens brancos, homens e europeus neste processo produtivo.

A presença da Cultura Africana na Matemática e, assim, na sociedade como um todo, não pode permanecer invisível e passar despercebida pelo professor, preocupado apenas em “fazer contas”. Conforme ressalta Paulus Gerdes (2011, p. 7), “os objetivos, conteúdos e métodos do ensino da Matemática devem ser enquadrados no ambiente cultural dos alunos”. Sendo nossa sociedade multicultural, torna-se fundamento que as práticas de ensino de todas as matérias escolares sejam multiculturais, inclusive, claro, a Matemática Escolar, tomando o cuidado sempre – como indicamos – de não cair na armadilha do multiculturalismo que invisibiliza e apaga os negros dos processos históricos e sociais de produção de conhecimento matemático em nome de um suposto conhecimento matemático universal e independente das pessoas e povos.

Neste capítulo, tratamos brevemente do desenvolvimento do conhecimento geométrico como potencialidade para esta superação da exclusividade eurocêntrica nas produções que envolvem o conhecimento matemático. A Geometria também oportuniza outra superação, mais particular e voltada ao currículo de Matemática: a superação da grande ênfase à Geometria Euclidiana que, como já indicamos, na forma como conhecemos atualmente, é europeia. Geometrias Não-Euclidianas podem ser enfatizadas em estudos de culturas não ocidentais, como é o caso da Cultura Africana. O próximo capítulo é dedicado a esta discussão.

Capítulo 2 – Segunda superação em perspectiva histórico-cultural: da Geometria Euclidiana aos Fractais.

Como já indicamos – e problematizamos – no item 1.1, o matemático grego Euclides, de Alexandria, é reconhecido por seus pares matemáticos como “pai da Geometria”, uma paternidade atribuída apesar de os historiadores terem aparente consenso de que a Geometria nasceu no contexto da civilização egípcia (africana, portanto), muito antes de Euclides. Essa evocada paternidade euclidiana, com também já indicamos, advém da inegável importância que foi dada à sua principal obra: os *Elementos*.

Em os *Elementos*, Euclides apresenta o método que passou à história conhecido como axiomático-dedutivo, que possui como característica a proposição de ideias iniciais, a princípio, inegáveis (os axiomas[12]) a partir dos quais são realizadas deduções que vão construindo os conceitos. Acontece que, para que seja possível estabelecer axiomas, é necessário que um movimento histórico já tenha sido realizado. Não é razoável supor que Euclides tenha apresentado seus cinco axiomas a partir do nada e tenha, a partir deles, realizado todas as deduções que fez. O mais provável é que tenha compilado em uma única obra – provavelmente para fins didáticos – conhecimentos que vieram sendo produzidos ao longo de vários anos e que, como mostramos no capítulo anterior, segundo Bicudo (2009), podem ter sido levados do Egito à Grécia pelo matemático Tales de Mileto.

Neste contexto, os *Elementos* – e Euclides – passaram a ser referenciados como a principal fonte do conhecimento geométrico, passando a constituir uma espécie de ponto de inflexão que separa uma Geometria supostamente rudimentar de uma Geometria plena, já que não se preocupava com os casos particulares de aplicação, mas sim com a formação do conhecimento científico. Por amor a este conhecimento, a Geometria teria, com Euclides, deixado de ser conhecimento *prático* (no sentido de possuidora de aplicações diretas e imediatas) e passado a ser conhecimento *filosófico*.

---

[12] Atualmente, os termos *axiomas* e *postulados* são reconhecidos como sinônimos no contexto da Matemática, de modo que também é comum verificarmos a referência a “postulados de Euclides”, em que pese, originalmente, Euclides ter feito distinção entre esses conceitos. Esta distinção, na sua vez, não será tratada neste trabalho por estar além de nossos objetivos para este texto.

Bicudo (2009) narra uma passagem que seria representativa da mudança de paradigma que passava do conhecimento útil (por ser aplicável) ao conhecimento como fim em si mesmo (filosófico):

> Há, por fim, um episódio relatado por Stobaeus nos seus *Eclogarum physicarum et ethicaram Libri II*. Ei-lo: (...) alguém que começara a estudar geometria com Euclides, tendo aprendido o primeiro teorema, perguntou a Euclides: "Mas o que me será acrescido por aprender essas coisas?" E Euclides, tendo chamado o escravo: "Dê-lhe três óbolos[13], ***porque para ele é preciso lucrar com o que aprende***". (BICUDO, 2009, p. 43, grifos no original) .

A Geometria e os objetivos do processo de aprendizagem (que podemos inferir disso) remetem à ideia do surgimento de um conhecimento filosófico, não pragmático. Se pudermos contribuir, fazendo humor, na discussão a respeito da paternidade da Geometria, ousaríamos dizer, talvez, que os egípcios africanos são os verdadeiros pais da Geometria, cabendo a Euclides um papel mais próximo ao de um "tio" que teria proposto o que poderíamos certamente chamar de Geometria Filosófica. Euclides seria, então, o tio da Geometria.

No entanto, o que a História da Matemática nos reservou foi, como vimos, a atribuição da paternidade dos principais aspectos da Geometria contemporânea a Euclides, fazendo com que aquilo que não cabia nas demonstrações e conclusões realizadas por Euclides fosse rotulado, por muito tempo, como "estranho", "bizarro" e, de certo modo, até "proibido". Foi assim, por exemplo, como veremos mais adiante neste mesmo capítulo, o ocorrido com o conceito de infinito.

Recentemente, em entrevista a uma revista popular, replicada no portal do IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, o matemático que preside aquela instituição, Marcelo Viana, afirmou o seguinte: "[...] acho muito importante estudar as formas de aplicação da Matemática ao longo da história. Mas uma confusão que me parece frequente é a de achar que isso é Matemática, ou que fazer esse tipo de estudo faz parte da Matemática em si. Isso é uma falácia. O conteúdo da Matemática é independente" (VIANA, 2021, s/p). Apesar de chamar de falaciosa a defesa de uma matemática vinculada

---

[13] Óbolo é uma antiga moeda grega. Três óbolos equivaleriam a cerca de 1 (um) centavo de real, atualmente.

aos contextos culturais de sua própria produção, Viana (2021) faz questão de salientar que “ninguém sabe direito quem descobriu o Teorema **de Pitágoras**, mas ele era conhecido na Mesopotâmia em 1800 a. C. e foi ‘redescoberto’ **e tornado famoso** pelo próprio Pitágoras, **que era grego**, **mil anos depois**” (VIANA, 2021, s/p, destaques são nossos). Ora, se, como afirma Viana (2021), o conhecimento da relação existente entre os lados de um triângulo retângulo “não é mesopotâmio, não é grego, não é francês, não é africano”, então por que não chamamos o fato de “Teorema Africano” ou “Teorema Egípcio” ou “Teorema Babilônico”, já que era conhecido nessas regiões mais de mil anos antes de Pitágoras? A suposta *paternidade* do teorema que, no contexto da estrutura social eurocêntrica e racista, atribuímos a Pitágoras tem razão direta com a defesa da necessidade de desconstrução *de práticas de ensino* e acabam por apagar as contribuições daqueles povos que são os verdadeiros *pais e mães* dos conhecimentos.

É a esse movimento de apagamento histórico das contribuições de povos africanos e do povo preto, durante as práticas de ensino, que, a exemplo de Santos, et al (2016) e Carneiro (2005), chamamos de *epistemicídio*. Esse conceito remete à

> [...] anulação e à desqualificação do conhecimento dos povos subjugados, [bem como a] um processo persistente de produção da indigência cultural: pela negação ao acesso à educação, sobretudo de qualidade; pela produção da inferiorização intelectual; pelos diferentes mecanismos de deslegitimação do negro como portador e produtor de conhecimento e de rebaixamento da capacidade cognitiva pela carência material e/ou pelo comprometimento da autoestima pelos processos de discriminação correntes no processo educativo. (CARNEIRO, 2005, p. 97)

E é o combate ao epistemicídio que defendemos ao propor práticas de ensino que coloquem a Cultura e a História Africana no centro da atividade de ensino (LEONTIEV, 1978) e que sirvam de inspiração para a elaboração de situações desencadeadoras de aprendizagem (MOURA, 2010). Constituem processos de epistemicídio aquelas práticas de ensino que consideram *primitivas* as produções de povos não europeus – especialmente os povos africanos – e enaltecem uma suposta supremacia dos conhecimentos produzidos em contextos eurocêntricos.

Para Shiva (2017),

> A definição do cristianismo como única religião, e de todas as outras crenças e cosmologias como primitivas, encontra seu paralelo na definição da ciência ocidental mercantilizada como única ciência, e todos os outros sistemas de conhecimento como primitivos. (SHIVA, 2017, p. 27)

Segundo Stephen Hawking, a Cosmologia não deve ser considerada um campo que interesse exclusivamente aos pesquisadores da área astrnômica. Ao longo da história, diversos segmentos sociais se manifestaram sobre este assunto. Por isto, nesta pesquisa, usamos a Cosmologia para exemplificar que a Cultura Africana não precisa ser justificada.

No contexto dos estudos e práticas de ensino de Matemática, podemos considerar *epistemicidas* aquelas práticas que enfatizam a importância e o valor cultural de conhecimentos quando se entende que estes tenham sido produzidos em contextos eurocêntricos, enquanto aqueles produzidos em outros contextos, por outros povos (povos não europeus) seriam representativos de conhecimentos *primitivos.*

A ideia de enaltecer as produções europeias como *verdadeira ciência* e rotular as contribuições de outros povos como *primitivas* é uma prática racista (MOORE, 2007). E, considerando que essa prática racista não seja a unica intensão do professor ou da professora de Matemática em suas aulas, até porque como ressalta Adichie (2019 seria uma história unica, significa que o racismo está impregnado na estrutura do processo de produção e consolidação do conhecimento, ou seja, o racismo (existente na produção do conhecimento matemático que contamina também as práticas de ensino dessa ciência) é um racismo estrutural, assim entendidas aquelas práticas racistas impregnadas na estrutura constitutiva da sociedade, como propõe Almeida (2019).

O subitem 2.1 deste capítulo trata de apresentar mais formalmente, ainda que de forma resumida, considerando as evidentes limitações de espaço deste texto para contar uma história com mais de 2.300 anos, aspectos da história da Geometria Euclidiana, bem como das outras geometrias e as razões pelas quais elas ficaram conhecidas como Geometrias Não-Euclidianas.

Antes, porém, de iniciar esta discussão, cumpre-nos apresentar também o que será discutido no subitem 2.2. Paralelamente ao desenvolvimento da Matemática (bem como das geometrias), a humanidade passou a elencar uma série de conhecimentos que deveriam ser acessíveis a todas as pessoas. Historicamente, grosso modo, esses conhecimentos foram sendo conjugados em um Campo teórico de investigação e do conhecimento que com outros aspectos passou a ser chamado de Campo do Currículo.

Tal Campo não é diretamente aquele em que este trabalho se insere, de modo que não aprofundaremos as discussões sobre a formação e consolidação do Currículo de Matemática, mas realizaremos um recorte importante para nossa pesquisa, o qual remete aos documentos curriculares oficiais. É uma análise de alguns deles que realizamos no subitem 2.2 em busca de reconhecer quais geometrias estão (ou não) presentes neles. Focaremos, especificamente, em dois documentos curriculares oficiais: a Base Nacional Comum Curricular e o Currículo do Estado de São Paulo, por serem os documentos que orientam as práticas pedagógicas que contextualizam nossa pesquisa e nossa proposta de formação de professores: o ciclo de debates e palestras que realizamos com professores que atuam nas redes públicas abrangidas por estes documentos curriculares.

Encerraremos este capítulo 2 discutindo, no subitem 2.3, aspectos que caracterizam a Geometria Fractal, a qual apresentamos como forma de superação da exclusividade da Geometria Euclidiana no currículo de Matemática em razão de seu potencial de também colocar em evidência outras culturas – especialmente, para nós, a Cultura Africana – possibilitando uma educação para as relações étnico-raciais no contexto das práticas de ensino de Matemática.

Sendo esta a estrutura deste capítulo, passemos então às discussões do subitem 2.1.

2.1 Considerações históricas e conceituais da Geometria Euclidiana.

De acordo com Eves (2011), Euclides é um personagem histórico sobre o qual pouco se sabe a partir de registros históricos. Apesar dessa indicação de um importante historiador da Matemática, como o é Howard Eves, são poucas as pessoas que duvidam de sua existência ou que relativizam a importância de sua obra, tal como são relativizadas as produções africanas.

O que se conjectura com maior grau de probabilidade, ainda de acordo com Eves (2011), é que Euclides tenha sido fundador da escola de Matemática de Alexandria, tendo sido ainda professor nela. Também é provável que tenha se formado na escola platônica de Atenas. Sobre a data de seu nascimento Bicudo (2009) apresenta a seguinte conjectura:

> (1) Arquimedes viveu imediatamente após o primeiro Ptolomeu; (2) Arquimedes menciona Euclides; (3) há uma história sobre algum Ptolomeu e Euclides; logo, (I) Euclides viveu no tempo do primeiro Ptolomeu. (4) Euclides medeia entre os primeiros discípulos de Platão e Arquimedes; (5) Platão morreu em 347/6 a.C.; (6) Arquimedes viveu de 287 a 217 a.C.; logo, (II) Euclides deve ter atingido o seu acúmen por volta de 300 a.C. (o que acorda bem com o fato de que o primeiro Ptolomeu reinara de 306 a 283 a.C.); (7) Atenas era, à época, o mais importante centro de Matemática existente; (8) os que escreveram *Elementos* antes de Euclides viveram e ensinaram em Atenas; (9) o mesmo vale para os outros matemáticos de cujos trabalhos os *Elementos* de Euclides dependiam; logo, (III) Euclides recebeu o seu treinamento matemático dos discípulos de Platão em Atenas. (BICUDO, 2009, p. 42)

Assim, podemos calcular que Euclides teria escrito os *Elementos* por volta de 300 a.C., o que significa que esta obra perpassou um período de cerca de 2.300 anos desde que foi escrita até nossos dias. Eves (2011, p.169) entende que "não há dúvida de que Euclides teve de dar muitas demonstrações e aperfeiçoar outras tantas, mas o grande mérito de seu trabalho reside na seleção feliz de proposições e no seu arranjo numa sequência lógica, presumivelmente a partir de umas poucas suposições iniciais". Essas suposições iniciais são os postulados ou axiomas.

Esses axiomas, ou seja, as *verdades* iniciais – aparentemente inegáveis e propostas por Euclides, eram as seguintes:

- Axioma I: Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.
- Axioma II: Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.
- Axioma III: Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
- Axioma IV: Todos os ângulos retos são iguais.
- Axioma V: Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

A compreensão de tais axiomas demanda ainda algumas definições ou compreensões supostamente inatas. As principais dessas compreensões (que não precisariam de definição) seriam as ideias de ponto, linha, plano e espaço. A noção de linha possuía ainda uma especificidade que poderia ser definida: uma linha em que todos os pontos estão postos da mesma maneira sobre si mesmos é chamada de reta. Essas noções estão relacionadas ao que se convencionou chamar na Geometria de nossos dias de *dimensões euclidianas*. O ponto representa "zero dimensões" (ou o adimensional); a reta representa uma dimensão (comprimento sem largura); o plano é a representação de duas dimensões (comprimento e largura); por fim, ao acrescentar a profundidade (ou altura), temos o espaço com três dimensões.

As construções geométricas e a resolução dos problemas presentes em os *Elementos* deveriam ainda, necessariamente, ser resolvidas, utilizando-se apenas, no máximo, uma régua não graduada e um compasso (EVES, 2011). É importante observar que as construções e demonstrações realizadas por Euclides eram feitas sobre uma região plana (como, por exemplo, uma folha de papel ou o chão de areia). Dessa forma, a análise dos axiomas – dos quatro primeiros, pelo menos – leva, de fato, a aparentes verdades inquestionáveis. Senão vejamos:

Axioma I: Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

Figura 4: *1º Axioma de Euclides*

Fonte: elaborado pela autora

Consideramos relativamente fácil convencer, mesmo a um leigo, que há apenas uma única reta que pode ser traçada com uma régua não graduada e um compasso (este último é dispensável neste caso) que passe pelos pontos A e B (assumamos que A e B sejam pontos, ou seja, existências sem dimensão).

Axioma II: Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

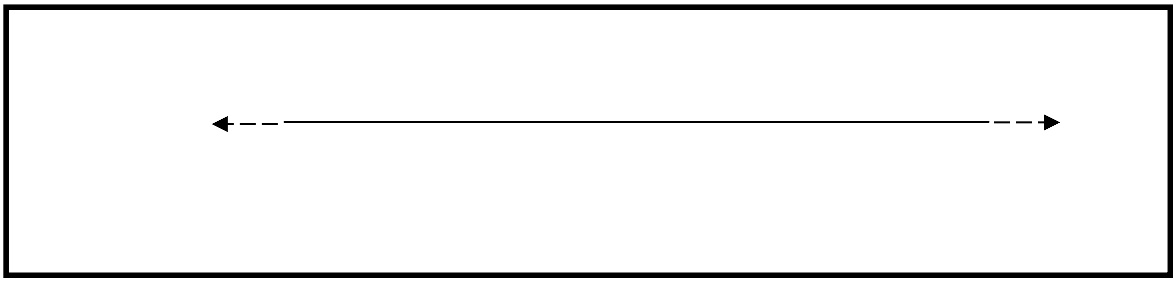


Figura 5: *2º Axioma de Euclides*

Fonte: elaborado pela autora

Este axioma seria uma consequência do primeiro, quando pensamos que uma reta finita nada mais é do que um trecho de uma reta com pontos marcando seu começo e seu fim. Como ficou postulado (como foi posto, determinado, combinado) no axioma I, por esses dois pontos só pode ser traçada, com a régua não graduada, uma única reta, o que implica que esta reta seria o prolongamento da reta *finita* inicial.

Axioma III: Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

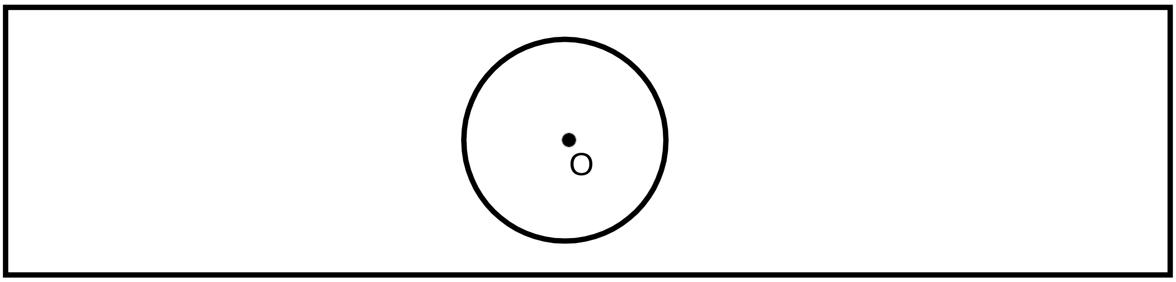


Figura 6: *3º Axioma de Euclides*

Fonte: elaborado pela autora

Neste axioma, dado um ponto O (o centro) e uma distância r – medida com a abertura do compasso – pode-se determinar um raio. Traçando-se o conjunto de pontos, que estão à distância r do ponto central O, determina-se um círculo. A linha traçada é chamada circunferência e a região que a circunferência delimita é chamada círculo.

Axioma IV: Todos os ângulos retos são iguais.

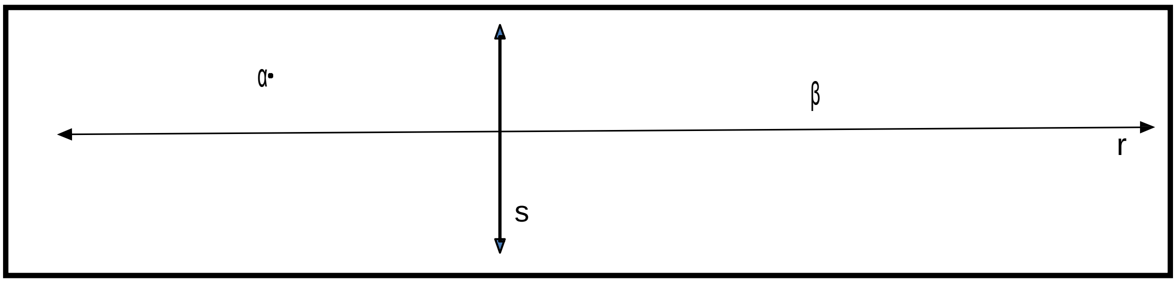


Figura 7: *4º Axioma de Euclides*

Fonte: elaborado pela autora

O ângulo reto é uma das definições apresentadas em os *Elementos*: “quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou” (EUCLIDES, 2009, p. 97). No nosso desenho, a reta s é “alteada” sobre a reta r, de modo que os ângulos α e β sejam iguais. É importante destacar também que, quando Euclides utiliza o termo “iguais”, ele está se referindo à região compreendida pelos contornos da construção. No caso de ângulos retos, verificamos que, pela definição, delimitam ¼ do plano. Como a definição é a mesma, quaisquer ângulos retos dividem os respectivos planos em 4 partes iguais, ou seja, os ângulos são iguais. Em termos numéricos atuais, este axioma é equivalente a definir que todos os ângulos retos possuem 90º.

Por fim, Axioma V: Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

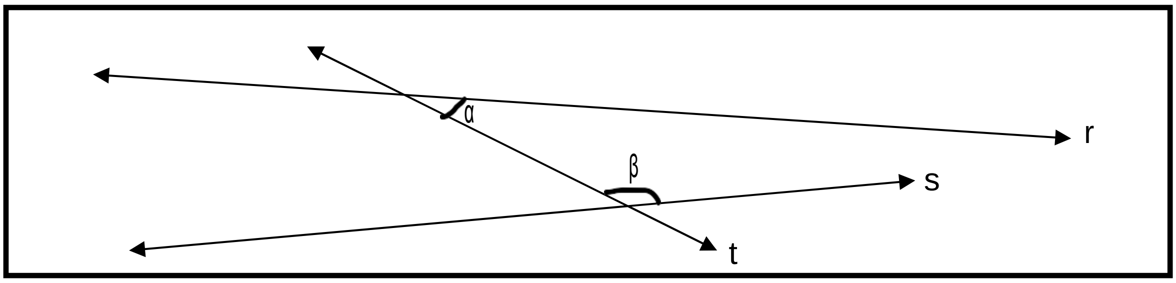


***Figura 8:** 5º Axioma de Euclides - versão 1*

Fonte: elaborado pela autora

Neste axioma nos deteremos um pouco mais. Ele, porém, a princípio, afirma que, dadas as retas r e s, quando traçamos com a régua não graduada a reta t, de modo que t corte r e s, formando os ângulos internos α e β, as retas r e s se encontrarão do lado em que a soma dos ângulos α e β for menor do que “dois retos”, ou seja, menor do que 180º.

Outra forma de enunciar este 5º axioma de Euclides é a seguinte: por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar uma única reta paralela a esta reta. Essas formas nos permitem concluir que, se a soma dos ângulos internos α e β for menor do que 180º, as retas r e s se encontrarão do lado de α e β em relação à reta t (como vemos na Figura 8). Mas se a soma de α e β for maior do que 180º, então r e s se encontrarão do lado oposto de α e β em relação à reta t (conforme indica a Figura 9).

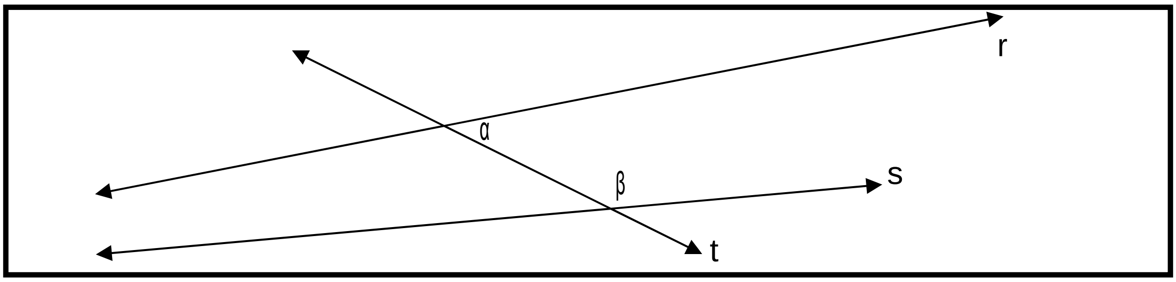
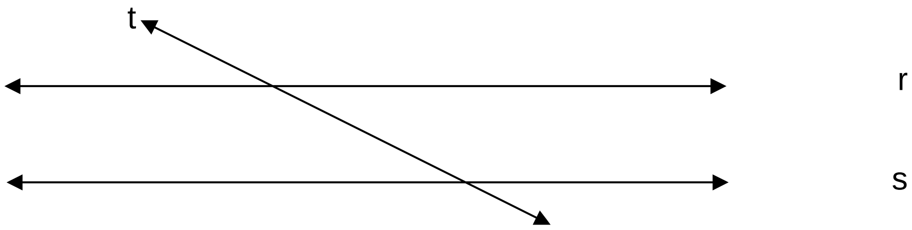


***Figura 9:** 5º Axioma de Euclides - versão 2*

Fonte: elaborado pela autora

Por fim, se a soma de α e β for exatamente igual a 180º, então r e s não se encontrarão, o que as define como sendo *paralelas*.

A *veracidade* deste axioma não é tão imediata quanto as dos quatro anteriores. Para a análise que permite constatar o que Euclides queria que acatássemos podemos verificar como ele definiu duas retas paralelas.



A definição de retas paralelas diz que duas retas r e s são paralelas, se, e somente se, quaisquer dois pontos de s estiverem à mesma distância de r. Assim, se tomarmos o ponto onde t corta s e um outro ponto qualquer sobre s, a distância desses dois pontos até r deve ser a mesma (pois r e s são paralelas). Pelo Axioma I, sabemos que por estes dois pontos passa uma única reta. Então, é inegável que, pelo ponto onde t corta s, só pode passar uma reta paralela à reta dada. Qualquer outra reta, não coincidente com s, que passe pelo ponto onde t corta s, ou estará mais perto de r por um lado ou por outro.

Este pode ser considerado “o axioma da discórdia” e isto, porque, como vimos, um axioma precisa ser uma verdade a princípio indiscutível. Neste caso, porém, a forma complexa do axioma foi justamente o que levou alguns matemáticos a questionar o seu caráter axiomático. Com isso, alguns matemáticos, ainda que reconhecem sua veracidade – como mostramos acima – tentaram assumi-lo como um Teorema e demonstrá-lo usando os outros quatro axiomas. Este foi o contexto em que surgiu um problema: essa proposição axiomática só se mostrava verdadeira em algumas situações específicas (grosso modo, quando a construção era realizada, como Euclides fazia, em uma região plana).

Euclides apenas admitiu a veracidade do axioma e seguiu em frente em um movimento que constitui o campo de conhecimento que chamamos hoje de Geometria Euclidiana. Acontece que a busca por “demonstrar” o 5º axioma – também conhecido como *Postulado das Paralelas* – admitido como um teorema, foi o ponto de partida para o desenvolvimento de outras perspectivas que não podiam ser explicadas tomando por base apenas a Geometria Euclidiana. Foi esta a origem do que chamamos hoje de Geometrias Não-Euclidianas.

Vejamos um exemplo:

Euclides enuncia o 47º teorema da seguinte forma: “nos triângulos retângulos, o quadrado [construído] sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm [formam] o ângulo reto" (EUCLIDES, 2009, p. 132). Podemos verificar que este teorema é o mesmo que passou à história e que conhecemos atualmente como "Teorema de Pitágoras"[14]. Ou seja, afirma que o quadrado construído sobre a hipotenusa (o lado maior – que é sempre oposto ao ângulo reto) de um triângulo retângulo possui área igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre cada um dos outros dois lados – chamados catetos.

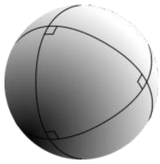
Para a demonstração desse teorema, Euclides precisa remeter ao que foi estabelecido no Postulado das Paralelas – o 5º e "problemático" axioma – de modo que, quando ele verifica a veracidade do Teorema ("de Pitágoras"), essa veracidade só é factual se o contexto da construção for um contexto em que o 5º axioma também seja verdadeiro, isto é, se, por exemplo, a construção estiver sendo realizada em uma região plana.

Isso significa que, se a construção for feita em uma região esférica, por exemplo, tanto o axioma quanto o Teorema de Pitágoras podem não ser verdadeiros. E, de fato, nessas condições, não o são. Se aplicarmos a definição euclidiana de ângulo reto para construir "triângulos retângulos" sobre uma região esférica, a conclusão será a de que tal triângulo pode ter até os três ângulos retos, o que não faz sentido algum na Geometria Euclidiana, já que nesta há um teorema (também demonstrado utilizando-se o 5º axioma) que afirma que a soma dos três ângulos internos de qualquer triângulo, é igual a 180º e três ângulos retos somam 270º.

Com isso, concluímos que, na Geometria Euclidiana, um triângulo pode ter, no máximo *um* ângulo reto – ou maior do que 90º – já que a soma dos outros dois tem que completar 180º.

[14] Gerdes (2011) indica também que os egípcios, na África, conheciam e dominavam as ideias que culminaram no "Teorema de Pitágoras", de modo que essa atribuição a Pitágoras da descoberta e demonstração do referido teorema também pode ser inserida no contexto da problematização que discutimos no capítulo 1 deste mesmo trabalho.

Figura 10: Triângulo construído sobre região esférica com três ângulos retos



Fonte:
https://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria_esférica#/media/Ficheiro:Triangle_trirectangle.png

Diante do exposto, podemos concluir que a chamada Geometria Euclidiana, sozinha, em que pese ser importante e sintetizar um campo do conhecimento de modo revolucionário, não responde às necessidades humanas como um todo. Então, **a Geometria Euclidiana não pode explicar o mundo**, mas apenas uma parte dele, sobretudo aquela parte que foi intencionalmente construída tendo a mesma Geometria Euclidiana como base.

Como poderíamos, por exemplo, aplicar os preceitos da Geometria para resolver situações que têm como superfície de construção o planeta Terra, por exemplo (já que, bom que se diga, o planeta Terra é esférico e não plano!)? Certamente, Euclides não poderia nos acusar de termos necessidade fútil de aplicar o conhecimento para se furtar à resposta sobre a utilidade do que se aprende. Ainda que reconheçamos o valor da Geometria Filosófica (em que o conhecimento vale por si mesmo, por amor, e não por sua aplicabilidade), não há como fugir à demanda de que um dado conhecimento deve buscar explicar de forma plena a realidade na qual está inserido.

Assim, a chamada Geometria Euclidiana explica o mundo ao nosso redor na exata medida em que a construção desse mundo se dá a partir de pontos, linhas (geralmente retas) e planos construídos sobre regiões planas. Quando se precisa superar alguma dessas limitações, a Geometria Euclidiana já não consegue explicar adequadamente os diversos fenômenos e movimentos. Para não restringir o desenvolvimento humano a tais limitações é que se faz necessário compreender também outras Geometrias: as Não-Euclidianas.

Mas quando nossos alunos e alunas chegam às salas de aula de Matemática, para qual (ou quais) Geometrias eles são apresentados? A resposta para tal pergunta, vamos buscar apresentá-la no próximo subitem, analisando o que propõem os documentos curriculares oficiais para as aulas de

Matemática.

2.2 Documentos curriculares oficiais de Matemática e as proposições para o ensino de Geometria.

De modo geral, a Geometria presente nas práticas escolares é a Geometria Euclidiana. Na realidade, tradicionalmente, a Geometria costuma ser negligenciada nas práticas de ensino da Matemática Escolar. De acordo com Pavanello (2009, p. 7), “o gradual abandono do ensino de Geometria, verificado nestas últimas décadas no Brasil, é um fato que tem preocupado bastante os educadores matemáticos brasileiros e que, embora reflita uma tendência geral, é mais evidente nas escolas públicas”. Em 2021, durante palestra intitulada “Abandono do ensino de geometria e o MMM: o que diz a História da Educação Matemática?”[15], realizada na Universidade Federal de Juiz de Fora e disponibilizada no portal YouTube, a professora Maria Celia Leme da Silva, da UNIFESP, evoca a pesquisa de Pavanello (2009) como referência para sustentar que, no contexto do Movimento da Matemática Moderna – MMM[16], o ensino de Geometria era dividido em uma *geometria intuitiva* nas séries iniciais – o antigo *primário* – com um aprofundamento voltado para a introdução à Teoria dos Conjuntos nas séries seguintes – chamadas de *ginásio* – e uma geometria das transformações, como subsídio aos estudos posteriores de grandezas vetoriais.

A professora Maria Celia ainda remete a um dos principais autores de livros didáticos do MMM, Benedito Castrucci, que teria afirmado que o fracasso do Movimento da Matemática Moderna era devido à superficialidade ou negligência quanto ao ensino de Geometria.

Esse movimento de *abandono* do ensino de Geometria que vem se intensificando, segundo Pavanello (2009) e pelo que indica a professora Maria

---

[15] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=tSjSH5iSrCw.

[16] O Movimento da Matemática Moderna – MMM foi o movimento que ganhou força a partir da década de 1960 e das defesas de matemáticos como Felix Klein que entendiam que a Matemática Escolar deveria se aproximar da Matemática Científica, inclusive em relação ao método hipotético-dedutivo como método de ensino, teoria dos conjuntos como fundamento para a construção do conhecimento matemático e rigor demonstrativo como objetivo a ser alcançado. A Matemática Escolar ganha um caráter que, mais tarde, ficou conhecido como “tecnicista”, já que os preceitos eram técnicos e a serem reproduzidos por todos (por ser único, correto, exato).

Celia, deste a segunda metade do século XX, chega aos nossos dias e influencia significativamente textos curriculares oficiais que, ao que parece, resumem o que se compreendia como *Geometria Intuitiva*, ou seja, aquela geometria básica e necessária para ser aplicada de modo direto em situações cotidianas e distribuem tais compreensões ao longo de todos os anos de escolarização.

Notoriamente, tais aspectos só remetem à Geometria Euclidiana, de modo que aqueles aspectos – que mostramos no subitem anterior – que a Geometria Euclidiana não alcança se tornam limitantes do desenvolvimento das pessoas, das possíveis interpretações de mundo e culmina numa separação de duas classes: de um lado aqueles que só compreendem a Geometria Euclidiana e, de outro, aqueles que compreendem ideias relacionadas a Geometrias Não-Euclidianas.

No Brasil, parte das discussões que envolvem o campo do currículo dizem respeito à orientação dos conteúdos a serem ensinados. Os textos curriculares oficiais enfatizam orientações ou normatizações sobre o que deve ser ensinado. Historicamente esses textos oficiais são considerados, de acordo com o tempo em que estão em circulação, como representativos dos conteúdos mínimos a serem ensinados, como parâmetros orientadores de possibilidades de ensino, como basilares representativos de conteúdos comuns que não podem deixar de ser ensinados. Este último é o caso da Base Nacional Comum Curricular.

Ainda que seja importante problematizar as escolhas que terminam por compor documentos curriculares normativos, como a BNCC, não é objetivo deste trabalho realizar esta problematização, mas nos interessa verificar quais Geometrias estão presentes nestes documentos oficiais que, ainda que não sejam documentos voltados à formação de professores, circulam no contexto de suas práticas e, portanto, são influenciadores e influenciados por estas mesmas práticas.

Desde meados da década de 1990, a partir dos Parâmetros Curriculares Oficiais, a organização curricular linear, caracterizada pela apresentação de um rol de conteúdos, vem sendo reorganizada na apresentação de um currículo estruturado na lógica de desenvolvimento de competências e habilidades. A variação semântica e a aproximação de sentidos, no senso comum, destes termos nos obrigam a pensar na sua distinção. A própria BNCC trata de contribuir para esta tarefa quando apresenta a seguinte definição:

> [...] **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), ***habilidades*** (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 8, primeiro grifo no original, segundo grifo nosso)

Como podemos inferir, as habilidades são os conhecimentos ou características necessários para o desenvolvimento ou a demonstração de alguma competência. Por exemplo, se o movimento escolar deseja contribuir para que um sujeito desenvolva a **competência** de resolver problemas os professores devem ensinar na escola conteúdos, técnicas, práticas etc (que são as habilidades) que oportunizem ao aluno o desenvolvimento da competência resolvedora de problemas. Em termos práticos, na cultura escolar brasileira, ao que parece, o conjunto de habilidades acabou assumindo o papel de “conteúdos” a serem ensinados, ainda que, conceitualmente, as habilidades não se restrinjam apenas aos conteúdos.

O que verificamos, a princípio, é que não há, na BNCC, habilidade ou competência específica que indique a necessidade ou importância de conhecermos Geometrias Não-Euclidianas. Na parte do documento voltada ao ensino fundamental, a única competência que se refere explicitamente à Geometria, é aquela que estabelece a necessidade de

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, **Geometria**, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2018, p. 267, grifo nosso)

Essa competência, porém, se articula com a organização do próprio texto da BNCC, que separa as habilidades a serem ensinadas em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Entendemos que a unidade temática “Gandezas e Medidas” trata de evidenciar uma intersecção existente entre as unidades de Números, Álgebra e Geometria, bem como “Probabilidade e Estatística”. Além de reconhecer a importância da Estatística, traz também elementos importantes de Números e de Álgebra, merecendo também o destaque como uma unidade temática específica. Nós, neste texto, no entanto, vamos analisar apenas as habilidades da unidade temática Geometria, por entendermos que são aquelas às quais o professor vai se direcionar quando tiver necessidade de *desenvolver o pensamento geométrico*.

Para o ensino fundamental (com 9 anos de duração), são estabelecidas 53 (cinquenta e três) habilidades referentes à unidade temática de Geometria. Como já indicamos, estão todas contextualizadas pela Geometria Euclidiana. A título de exemplo, destacamos no quadro a seguir três dessas habilidades, escolhidas por se relacionarem com ideias que já apresentamos neste texto – até aqui:

***Quadro 1**: Habilidades Geométricas na BNCC - Ensino Fundamental*

ANO DO E.F.	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
7° Ano	Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero	(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e **estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos**, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
9º Ano	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	(EF09MA13) **Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras**, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

9º Ano	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do Teorema de Pitágoras ou **das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes**.

Fonte: Elaborado pela autora com base na BNCC (BRASIL, 2018, destaques nossos).

Como já indicamos no subitem anterior, 2.1, a soma dos ângulos internos de polígonos (como os triângulos), a veracidade do dito Teorema de Pitágoras, e o que acontece quando retas paralelas são cortadas por uma transversal (também chamada “secante”) depende do contexto em que tais objetos geométricos são tomados.

Na Geometria Euclidiana, a soma dos ângulos internos de triângulos é sempre igual a 180º, o quadrado construído sobre a hipotenusa sempre tem área igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos e os ângulos internos alternados formados; quando duas retas paralelas são cortadas por uma transversal sempre têm a mesma medida.

No entanto, na Geometria Esférica a soma dos ângulos internos de triângulos é sempre **maior que** 180º. Não há, assim, como definir um triângulo retângulo, que se dirá sobre aplicar o Teorema de Pitágoras. De modo similar, nem existem retas paralelas; dessa forma, não há como se falar sobre a proporcionalidade de paralelas cortadas por secantes. Da mesma maneira, na Geometria Hiperbólica a soma dos ângulos internos de triângulos é sempre **menor que** 180º; em um triângulo retângulo o quadrado do lado oposto ao ângulo reto não é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados e, se duas retas paralelas forem cortadas por uma transversal, não haverá necessariamente proporcionalidade entre os segmentos correspondentes.

Sempre é importante destacar que não se faz aqui uma defesa de que, necessariamente, os estudantes aprendam Geometria Esférica e Hiperbólica durante o ensino fundamental. Isso seria conteudista e descabido. No entanto, também é descabido passar por todos os 9 anos de escolarização dita *fundamental* sem ter sequer a noção que foi apresentada por nós no subitem anterior e que, sendo pedagogicamente honesta, evidencia para quem estuda que o que está sendo estudado é um recorte de um movimento humano de produção de conhecimento muito maior e mais complexo.

Quando focamos nossa atenção na BNCC para o ensino médio, poderíamos supor um aprofundamento daquilo que foi estudado durante o ensino fundamental e que pudesse abranger Geometrias Não-Euclidianas. Mas também isso não ocorre. Diferente da organização das habilidades no ensino fundamental, para o ensino médio é feita uma organização por áreas do conhecimento, e Matemática aparece na área de Matemática e suas Tecnologias. Das cindo competências específicas a serem desenvolvidas nessa área do conhecimento, apenas uma (a quarta) cita explicitamente a Geometria: “Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, **geométrico**, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas” (BRASIL, 2018, p. 531).

Sobre as habilidades, são elas 43 (quarenta e três) no total a serem ensinadas continuamente durante os 3 anos de duração do Ensino Médio. Destas, 9 (nove) estão relacionadas a Geometrias, as quais estão apresentadas no Quadro 2, a seguir:

***Quadro 2**: Habilidades da BNCC de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio*

ANO DO E.M.	CÓDIGO DA HABILIDADE	HABILIDADE
1º, 2º, 3º	EM13MAT105	Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (**fractais**, construções civis, obras de arte, entre outras).

1º, 2º, 3º	EM13MAT201	Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
1º, 2º, 3º	EM13MAT307	Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
1º, 2º, 3º	EM13MAT308	Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triangulos em variados contextos

		envolvem triângulos, em variados contextos.
1º, 2º, 3º	EM13MAT309	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
1º, 2º, 3º	EM13MAT504	Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
1º, 2º, 3º	EM13MAT505	Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de Geometria Dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
1º, 2º, 3º	EM13MAT506	Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
1º, 2º, 3º	EM13MAT509	Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em Cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

Fonte: Elaborado pela autora com base na BNCC (BRASIL, 2018, grifo nosso)

Aqui queremos destacar a habilidade EM13MAT105 – primeira linha do Quadro 2. Essa é a única vez em todo o texto da BNCC em que uma ideia relacionada a uma Geometria Não-Euclidiana é explicitamente citada. Em que pese a habilidade estar voltada ao desenvolvimento de um pensamento geométrico euclidiano (transformações geométricas para construir e analisar figuras), é a única vez em que se propõe comparar tal capacidade de construção com um fenômeno geométrico não compreendido na Geometria Euclidiana: os Fractais.

No próximo subitem, 2.3, como já anunciamos, vamos mostrar o que os Fractais são e o porquê de eles superarem a Geometria Euclidiana, o que caracteriza o estudo dos Fractais como estando no contexto das Geometrias Não-Euclidianas. Por hora, acreditamos ser oportuno concluir que dentre 96 habilidades específicas a serem ensinadas no contexto da Educação Matemática Escolar, apenas uma – e ainda assim, parcialmente – está voltada à compreensão de que existem geometrias para além daquela que concebemos a partir das contribuições de Euclides.

Desse modo, culturas em que a Geometria Euclidiana não seja necessariamente a base do pensamento geométrico tendem a ser rotuladas como, nas palavras de Eglash (2005b), *bizarras*.

Já o Currículo do Estado de São Paulo foi publicado em 2019. O texto que trata da área de Matemática tem 72 páginas voltadas para a apresentação curricular do ensino fundamental e médio. A organização curricular dos conteúdos básicos divide-se em três eixos: Números, Geometria e Relações, com orientações sobre os processos de ensino e aprendizagem de tais conteúdos.

A respeito do eixo de Geometria, o documento destaca:

> A GEOMETRIA diz respeito diretamente à percepção de formas e de relações entre elementos de figuras planas e espaciais; à construção e à representação de formas geométricas, existentes ou imaginadas, e à elaboração de concepções de espaço que sirvam de suporte para a compreensão do mundo físico que nos cerca. (SÃO PAULO, 2019, p. 39, destaque no original)

A indicação sobre a necessidade de “compreensão do mundo físico que nos cerca” lança uma expectativa para que outras geometrias possam ter elementos de sua estrutura geral discutidos, como seria o caso, por exemplo, da Geometria Fractal, que também é conhecida como *Geometria da Natureza*, já que descreve e explica fenômenos presentes na natureza que a Geometria Euclidiana não é capaz de explicar. No entanto, tal expectativa não se concretiza pela análise do restante do documento.

A proposta, de modo resumido, consiste em propor uma abordagem articulada entre Geometria Euclidiana e Álgebra, de modo que os estudos abordem aspectos da Geometria Plana, Espacial e Analítica.

> Um ponto a ser destacado é a frequente interpretação de que a Geometria Plana é um assunto do ensino fundamental e as Geometrias Espacial e Analítica são temas do ensino médio, muito comum em diversas propostas curriculares. Na apresentação que aqui se faz dos conteúdos, tal interpretação não está presente, buscando-se entrelaçar continuamente as Geometrias Plana e Espacial, bem como a Álgebra e a Geometria, em uma permanente aproximação com a Geometria Analítica desde a apresentação do plano cartesiano, na primeira metade do ensino fundamental. (SÃO PAULO, 2019, p. 41)

As possíveis associações que envolvem conceitos e ideias não presentes na Geometria Euclidiana não surgem, apesar de haver indicações importantes, de associações possíveis que relacionem áreas como Geometria e Álgebra através da Trigonometria.

> Por exemplo, o número irracional π, associado aos cálculos da circunferência e do círculo, pode e deve ser apresentado nos cursos de Geometria Elementar, assim como deve ser trabalhado no ensino médio, desta vez em contextos associados à Trigonometria, ao Estudo dos Corpos Redondos e aos Conjuntos Numéricos. (SÃO PAULO, 2019, p. 41).

O número π também oportuniza uma relação com a ideia de infinito, importantíssima na Geometria Fractal, como veremos mais adiante. No entanto, o que se verifica, tanto no Currículo do Estado de São Paulo quanto na BNCC, é o que poderíamos chamar de “silêncio” a respeito das Geometrias Não-Euclidianas. Desse modo, se os professores não forem intencionalmente preparados para tratar deste importante aspecto formativo das pessoas, pelo menos para – honestamente – indicar que existem formas e fenômenos que não podem ser explicados e compreendidos apenas com aquilo que compreendemos a partir da Geometria Euclidiana, a formação que tais professores poderão oferecer a seus alunos e alunas será deficitária, incompleta.

Pensando em preencher ainda que parcialmente esta lacuna foi que propusemos um movimento formativo a professores que ensinam ou ensinarão Matemática na educação básica, tendo como ponto de partida a análise e o conhecimento impregnado em elementos da Cultura Africana. De modo particular, destacamos a presença de elementos da Geometria Fractal, que não é Euclidiana.

Mas antes de tratar da apresentação do movimento formativo de professores que realizamos, acreditamos ser importante tecer algumas considerações sobre o que seja a Geometria Fractal, bem como argumentar em favor da presença e importância desses conhecimentos geométricos na Cultura Africana. É essa argumentação que trazemos a seguir, no subitem 2.3.

2.3 Considerações históricas e conceituais da Geometria Fractal.

Segundo Gerdes (2012a, 2012b), a geometria presente no Continente Africano não se restringe ao que chamamos de Geometria Euclidiana. Outras geometrias estão presentes e são muito importantes para a compreensão e organização daquelas sociedades. Vamos destacar, neste texto, a Geometria Fractal.

De acordo com Mandelbrot (1998), citado no livro *Descobrindo a Geometria na Sala de Aula* (BARBOSA, 2005) , os Fractais são objetos matemáticos, da mesma forma que uma circunferência, um quadrado ou um triângulo. Apesar disso os Fractais não são uma forma, mas sim um conceito. Eles não possuem existência concreta, mas muitos fenômenos ao nosso redor podem ser compreendidos e explicados a partir deles, de forma a conseguirmos prever os seus padrões, apreciar sua beleza e intuir sobre outros conceitos complexos da Matemática, como o *infinito*.

Podemos encontrar a Geometria Fractal sendo aplicada nas áreas de Ciências, Tecnologia, Artes e Física dentre outras. Os Fractais estão presentes em cartões fractais tridimensionais, na teoria do caos, na tecnologia digital e de comunicação, nas artes e, principalmente, na natureza. A imagem a seguir é um exemplo de um padrão fractal utilizado artisticamente para compor a estampa de um tecido.

***Figura 11**: Recorte de tecido com Fractais na estampa*

Fonte: Martins (2014)

Mas o que são Fractais? E mais: o que os Fractais têm a ver com a Geometria? Iniciamos nossa apresentação em resposta a tais perguntas voltando nossa atenção novamente ao afã de matemáticos e estudiosos das Histórias das Matemáticas em atribuir paternidade às ideias matemáticas. Nesse sentido, encontramos em Stewart (2019, p. 309) a referência ao francês Benoît Mandelbrot (1924 - 2010) como sendo o “pai dos Fractais”. Ainda segundo Stewart (2019, p. 310), “Mandelbrot era um geômetra natural, com forte intuição visual”. Sendo um jovem judeu vivendo em uma França tomada pelos nazistas durante a segunda guerra mundial, Mandelbrot precisava esconder-se continuamente para não acabar em algum campo de concentração e extermínio de judeus. Isso atrasou seu ingresso em alguma instituição educacional parisiense, o que só foi possível após o fim da guerra. Stewart (2019) narra a seguinte particularidade a respeito do processo seletivo de Mandelbrot na École Normale Supérieure:

> Um de seus professores descobriu que, em meio a todos os candidatos, apenas um respondera a uma questão de Matemática particularmente difícil. Ele adivinhou que teria sido Mandelbrot, e, ao indagar, descobriu que estava certo. O professor confidenciou que ele próprio achara o problema impossível, por causa de uma “integral tripla realmente horrorosa” que residia no coração dos cálculos. Mandelbrot riu. “É muito simples.” Então explicou que a integral era na realidade o volume de uma esfera disfarçada. Caso se usasse o sistema de coordenadas correto, o problema ficava óbvio. E todo mundo sabia a fórmula para o volume da esfera. Isso era tudo. Uma

> vez que se percebia o truque… Mandelbrot estava obviamente certo. Chocado, o professor saiu vagando, murmurando: “Claro, claro.” Por que ele próprio não havia percebido isso? Porque ele vinha pensando simbolicamente, não geometricamente. (STEWART, 2019, p. 309-310)

As práticas de ensino tradicionais de Geometria, via de regra, adotam como estratégia para o ensino de Geometria o que poderíamos chamar de Algebrização da Geometria, ou seja, os processos de ensino buscam interpretar situações geométricas e sintetizá-las em expressões algébricas que, após manipuladas segundo os preceitos da álgebra, retornam valores (quase sempre numéricos) que representam grandezas geométricas.

Por exemplo: ao introduzir o dito *Teorema de Pitágoras* para seus alunos e alunas, professores e professoras geralmente apresentam logo *de cara* a fórmula: $a^2 = b^2 + c^2$, onde a é a hipotenusa (o lado oposto ao ângulo reto) de um triângulo retângulo e b e c são os outros dois lados, que são chamados de catetos. Então apresenta-se uma série de exercícios que consistem em, conhecidos valores numéricos artificialmente atribuídos a dois desses lados, calcular o valor da medida do terceiro lado. Notemos que este tipo de *exercício* não remete à habilidade de aplicar o chamado *Teorema de Pitágoras*, mas sim de treinar a resolução de equações polinomiais de segundo grau incompletas, ou seja, saímos do campo da Geometria para exercitar o desenvolvimento de uma habilidade do campo da Álgebra.

Quando muito, o professor ou a professora sugere aos estudantes que meçam, com auxílio de uma régua graduada, os lados dos triângulos retângulos encontrados para verificarem que *deu certo*, ou seja, que o *Teorema de Pitágoras* de fato permite *calcular* sem precisar *medir* o tamanho de um dos lados do triângulo retângulo quando eu conheço os outros dois.

Da narrativa de Stewart (2019), verificamos que tal tradição é limitadora do desenvolvimento de diferentes formas de pensamento, pois privilegia o pensamento algébrico em detrimento do geométrico. E se, nessa tese, a Álgebra *“dá conta”* de verificar o que precisa ser verificado. Para que, então, *perder tempo* com Geometria? Parece ser essa a premissa por trás do abandono do ensino de Geometria que discutimos no subcapítulo anterior (2.2).

Mandelbrot discordava dessa algebrização. Só problematizamos a indicação de Stewart (2019, p. 310) quanto à indicação de que Mandelbrot seria um “geômetra natural”. Concordar com essa indicação nos levaria ao lugar daqueles que acreditam na existência de certos *dons divinos* que nascem com as pessoas e que aqueles que não foram contemplados com tais *dons* deveriam aceitar e procurar reconhecer quais seriam suas próprias aptidões naturais. Compreendemos e respeitamos aqueles estudiosos e estudiosas que dedicam suas pesquisas para sustentarem teses nesse sentido, como é o caso, segundo nossa compreensão, da Teoria das Inteligências Múltiplas (GARDNER, 1995). Mas não é o lugar de onde falamos.

Coerentemente com a perspectiva teórica e metodológica de nossa pesquisa – a Teoria Histórico-Cultural (THC), que será apresentada no próximo capítulo deste texto – a aprendizagem não se confunde com o desenvolvimento, não são a mesma coisa. Também não é correto, no contexto da THC, dizer que o desenvolvimento antecede a aprendizagem. Isto equivaleria a ideias como “é preciso que os alunos tenham *maturidade* (desenvolvimento) para aprender isso ou aquilo”. Mais uma vez, respeitando estudiosos sérios que conduzem suas pesquisas segundo tais premissas, nos posicionamos para concordar com a ideia presente nas proposições de Vygotsky (2001) que propõe na THC a premissa de que a boa aprendizagem é aquela que precede e impulsiona o desenvolvimento.

Em outras palavras, entendemos que Mandelbrot *desenvolveu* sua *competência* para pensar geometricamente, porque as *aprendizagens* que realizou em seus movimentos de estudo possibilitaram (impulsionaram) este desenvolvimento. Assim, pensar geometricamente não é um privilégio de pessoas que tenham herdado algum dom particular em algum processo de *seleção natural*, mas sim uma competência que qualquer um ou qualquer uma pode desenvolver desde que experimente aprendizagens que impulsionem tal desenvolvimento.

No caso de Mandelbrot, o pensamento geométrico que ele pôde desenvolver estava relacionado ao seu trabalho observando *ruídos* (no sentido de *falhas*) em linhas de comunicação enquanto trabalhava na IBM (STEWART, 2019). Ele pôde perceber essas falhas e foi capaz de relacioná-las a padrões geométricos, mas que não podiam ser compreendidos apenas com os preceitos da Geometria Euclidiana. Estava em curso a formalização de uma Geometria Não-Euclidiana: a Geometria Fractal.

Como vimos no subcapítulo 2.1, Euclides enunciou alguns conceitos primitivos – que não precisavam de definição – e, a partir deles, definiu outros. Usando os conceitos primitivos e as definições, Euclides postulou 5 axiomas e, a partir deles, desenvolveu toda a sua Geometria. Vimos também que, a partir de releituras das premissas euclidianas (ou seja, daquilo que Euclides colocou na base de suas demonstrações) é que surgiram as Geometrias Não-Euclidianas. A origem dessas releituras foi a não aceitação do *Postulado das Paralelas* (ou 5º axioma) como um postulado.

Também destacamos que os três conceitos intuitivos apresentados por Euclides remetem ao ponto (sem dimensão, ou seja, dimensão igual a zero), à linha (ou reta, que tem uma dimensão, ou seja, dimensão igual a um), ao plano (dimensão igual a dois) e espaço (dimensão igual a três).

Assim, as possibilidades de quantidades de dimensões para um objeto geométrico, na Geometria Euclidiana, são elementos do conjunto {0,1, 2, 3}. Ou seja, a quantidade de dimensões possíveis na Geometria Euclidiana é sempre um número inteiro entre zero e três, incluindo estas extremidades. Segundo discorre Mandelbrot, a geometria fractal coloca em discussão que existem objetos geométricos com uma quantidade de dimensões não-inteira. O termo em Latim para *não-inteiro* (quebrado, fracionado) é *fractus*. Eis a origem da ideia de Mandelbrot de chamar a esses objetos de *fractais*.

> Uma das características principais de todo o Objecto Fractal é a sua *dimensão fractal*, que será representada por D. Esta é uma medida do grau de irregularidade e de fragmentação. Um fato muito importante: ao contrário dos números dimensionais correntes, a *dimensão fractal* pode muito bem ser uma fração simples, como ½ ou $^5/_3$, ou mesmo um número irracional, como log 4 / log 3 = 1,2618 ... ou π. Assim, é conveniente dizer, a respeito de certas curvas planas muito irregulares, que a sua *dimensão fractal* se situa entre 1 e 2, a respeito de certas superfícies muito enrugadas e cheias de pregas, que a sua *dimensão fractal* está entre 2 e 3 e, enfim, definir conjuntos de pontos sobre uma linha cuja *dimensão fractal* está entre 0 e 1. (MANDELBROT, 1998, p. 14)

Atualmente, a Geometria Fractal tem sido usada em diversos campos da ciência, como na Tecnologia, na Medicina, na Cartografia etc. A equipe de efeitos especiais do filme Star Trek II, do cineasta estadunidense George

Lucas, narra em vídeo disponível na internet[17], como a Geometria Fractal foi utilizada para criar a primeira *paisagem fractal realista*. De acordo com Dinis (2006, apud FERNANDES, 2007, p. 31), existe uma aplicação da Geometria Fractal para auxiliar no diagnóstico da identificação de alguns tipos de câncer de boca, pois ajuda a medir a tortuosidade da borda em que o tumor se encontra, auxiliando no diagnóstico e no tratamento.

A Geometria Fractal se encaixa em uma perspectiva de que conhecer, compreender e representar o mundo ao nosso redor de modo cada vez mais fidedigno envolve muitos esforços de pessoas nos mais variados campos do conhecimento, inclusive, claro, na Matemática, em um contexto geral, e na Geometria, de modo particular.

A Geometria Euclidiana, no entanto, sozinha, não nos permite compreender em sua plenitude todas as nuances de situações e fenômenos que não foram produzidas (e, portanto, controladas por seus pontos, retas, planos, espaço) pelos seres humanos e que contam com uma complexidade que escapa às rigorosas definições da Geometria Euclidiana. Mandelbrot (1998) refere-se a essa *rebeldia* dos objetos da natureza em relação ao rigor da Geometria Euclidiana com o termo **"caos".**

> A Geometria Fractal é caracterizada por duas escolhas: a escolha de problemas no seio do caos da natureza, uma vez que descrever todo o caos seria uma ambição sem esperança e sem interesse, e a escolha de ferramentas no seio das Matemáticas, pois procurar aplicações das Matemáticas pelo simples fato de serem belas acabou sempre por causar dissabores. Depois de progressivamente amadurecidas, estas duas escolhas criaram algo de novo: entre o domínio do caos desregulado e a ordem excessiva de Euclides existe agora a nova zona da ordem fractal. (MANDELBROT, 1998, p. 18)

Vejamos um exemplo de um problema que, segundo Mandelbrot (1998), a Geometria Fractal se propõe a discutir:

---

[17] Disponível aqui: https://www.youtube.com/watch?v=Tq_sSxDE32c

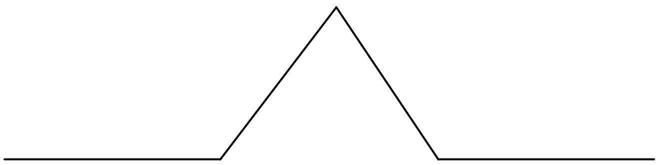
***Quadro 3**: Problema Fractal - A curva de Koch*

1º passo: Pegamos um segmento de reta.

2º passo: Dividimos este segmento em três partes iguais (com o mesmo comprimento)

3º passo: Duplicamos a parte o segmento que ficou no centro

4º passo: Colocamos os dois segmentos que estão no centro de modo que ambos se encontrem numa ponta e encontrem os outros dois segmentos na outra ponta, respectivamente.



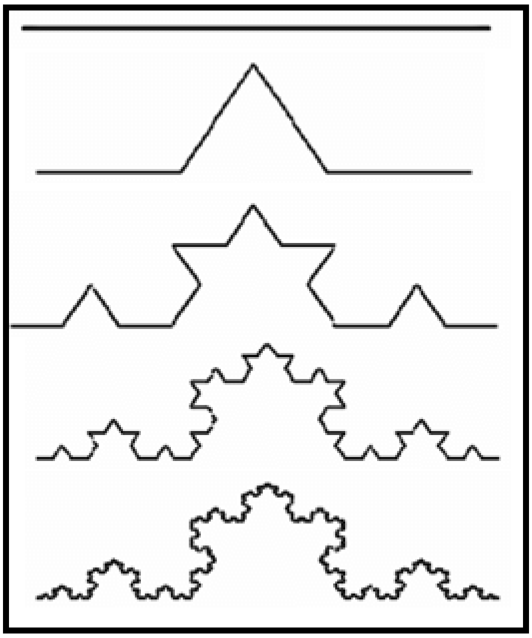
Chamaremos esses 4 passos de *iteração*.

O problema consiste no seguinte: Quais fenômenos geométricos acontecem com esta curva se realizarmos novas iterações para cada segmento **infinitas** vezes?

Fonte: Elaborado pela autora com inspiração da Curva de Koch (EGLASH, 2005a)

A curva que vamos construir com esse processo é chamada curva de Koch, pois foi proposta pela primeira vez (mais um caso de *paternidade* a um objeto matemático) pelo matemático sueco Helge Von Koch. Em busca de resolver o problema, observamos, a princípio, que temos, após a conclusão da primeira iteração 4 (quatro) segmentos. Verificamos também que o comprimento total da linha aumentou e é equivalente a $\frac{4}{3}$ do original, pois no terceiro passo acrescentamos um segmento que equivalia a $\frac{1}{3}$ do original. Além disso, vemos uma figura que *parece* um triângulo, mas que não está *fechado.* A fim de identificar alguns padrões, vamos fazer mais algumas iterações. Esse processo nos remete à seguinte construção:

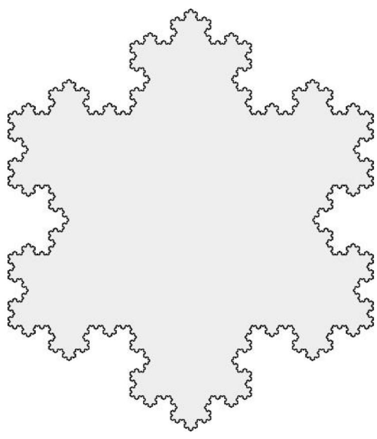
***Figura 12**: Primeiras etapas da construção da curva de Koch*



Fonte: Disponível em https://www.researchgate.net/figure/Figura-03-Primeiras-etapas-da-construcao- da-curva-de-Koch_fig5_315613803

A imagem mostra as primeiras etapas da construção da curva de Koch. Cada etapa fica concluída, quando aplicamos as iterações a todos os segmentos que estavam presentes na etapa anterior. Podemos observar uma "tendência", que decorre do padrão. Temos a sensação de que, se continuarmos, etapa após etapa, indefinidamente, em algum momento a imagem vai se aproximar cada vez mais próxima disto (Figura 13):

***Figura 13**: Curva de Koch "fechada": a ilha de Koch*



Fonte: Disponível em https://pixinpix.wordpress.com/2020/01/07/la-curva-de-koch/

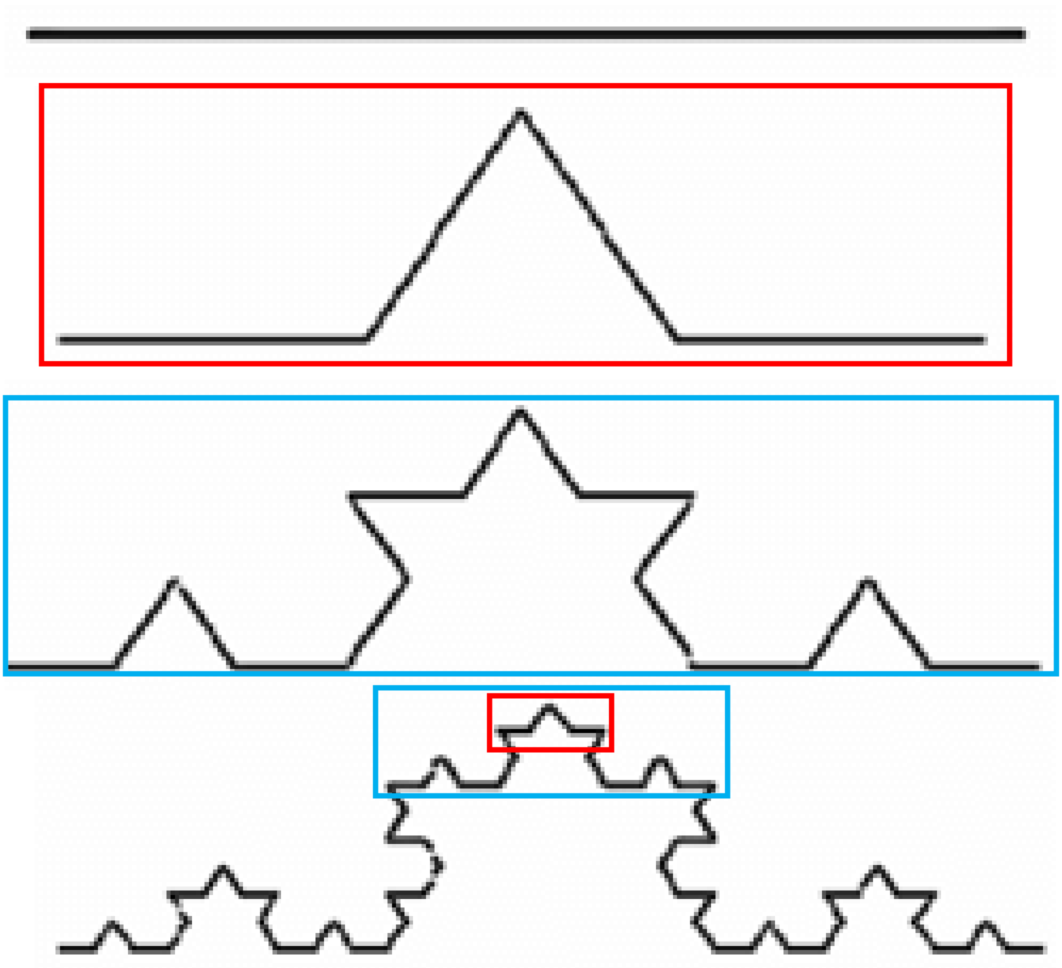
Mas é só impressão. A imagem na Figura 13 chama-se ilha de Koch e é construída aplicando o padrão da curva de Koch aos lados de um triângulo equilátero (que é uma figura com duas dimensões). Na curva de Koch do nosso exemplo, quando notamos que os segmentos nas duas extremidades sempre estarão na horizontal e alinhados, percebemos que essa curva nunca será fechada. No entanto, podemos com isto perceber que a dimensão da curva de Koch é fractal. Vemos que partimos de um segmento de reta (dimensão 1 – comprimento apenas – como na Geometria Euclidiana) e fazemos construções sucessivas aumentando essa dimensão (por isso, a percepção de que, após a primeira etapa, nos aproximamos de um triângulo que possui dimensão 2 – comprimento e largura). Mas, ainda que nos aproximemos cada vez mais, a dimensão nunca será 2, pois a curva nunca fechará. A conclusão é que **a dimensão da curva de Koch é um número entre 1 e 2.** Portanto, é um número não inteiro, um número quebrado... um **fractal**.

E se o problema consistisse em realizar n etapas, sendo n um número natural – ou seja, e se o problema consistisse em realizar um número finito de etapas? Nesse caso, a dimensão seria igual a 1 (comprimento). Seria o que Euclides chamava de linha (sua noção intuitiva para linha). O que caracteriza a Dimensão Fractal é a demanda para que o número de etapas seja **infinito**. Logo, o conceito de *infinito* é fundamental para a compreensão do que caracteriza a Geometria Fractal.

Na Geometria Euclidiana, o conceito de infinito não é discutido com profundidade. No currículo escolar, tão pouco. A BNCC, por exemplo, não indica a necessidade de ensinar habilidades relacionadas à compreensão do conceito de infinito nenhuma vez e o próprio termo “infinito” só é usado uma vez para indicar a necessidade de reconhecer a representação decimal de um número irracional como infinita e não periódica.

Outra observação fundamental que podemos fazer para a compreensão da Geometria Fractal é que em cada etapa podemos observar todas as etapas anteriores. Na imagem a seguir, procuramos mostrar isso:

***Figura 14**: autossemelhança na curva de Koch*



Fonte: Adaptada de https://www.researchgate.net/figure/Figura-03-Primeiras-etapas-da-construcao- da-curva-de-Koch_fig5_315613803

Notemos que, na terceira etapa, é possível identificar a primeira – no quadro vermelho – e a segunda – no quadro azul. O que podemos concluir é que em qualquer etapa é possível identificar construções semelhantes à etapa anterior. Chamamos essa característica de **autossemelhança**. Essa autossemelhança, como vimos, se repete infinitas vezes, o que nos permite afirmar que os Fractais possuem **complexidade infinita**.

A Geometria Fractal é também conhecida como a Geometria da Natureza, porque explica melhor os padrões geométricos verificados na natureza do que a Geometria Euclidiana. As nuvens, um raio, uma montanha são exemplos de formas aparentemente caóticas, mas que podem, como indicou Mandelbrot (1998, p. 18), ser geometricamente estudadas “entre o domínio do caos desregulado e a ordem excessiva de Euclides” na “zona da Ordem Fractal”.

Sendo a *Geometria da Natureza*, é fácil perceber as razões pelas quais povos que fundamentaram sua organização social, tendo por base a própria natureza, podem adotar aspectos da Geometria Fractal como basilares em suas sociedades. É o caso, conforme atesta Eglash (2005b), das sociedades africanas.

> Começamos mostrando que os Fractais Africanos não se devem simplesmente à atividade inconsciente. Em seguida, veremos exemplos em que são desenhos conscientes, mas implícitos, seguidos de exemplos em que os africanos criaram regras explícitas para gerar esses padrões e, finalmente, exemplos de Teoria Abstrata nesses sistemas indígenas de conhecimento. A razão para seguir esse caminho cauteloso pode ser expressa em termos do que o filósofo Karl Popper chamou de “falseabilidade”. Popper ressaltou que todos têm o desejo de confirmar suas teorias favoritas; e, portanto, temos que tomar precauções para não limitar nossa atenção ao sucesso - uma teoria só é boa se você tentar testá-la quanto ao fracasso. Se usarmos apenas exemplos em que o sistema de conhecimento africano correspondeu com sucesso à Geometria Fractal, não saberíamos suas limitações. Existem lacunas nas ações em que a família de teorias e práticas centradas em torno da Geometria Fractal na Matemática de Alta Tecnologia não tem contrapartida na África tradicional. Embora tais lacunas sejam significativas, elas não validam a comparação, mas fornecem as qualificações necessárias para caracterizar com precisão a Geometria Fractal nativa da África. (EGLASH, 2005b, p. 6)

Eglash volta sua atenção para a verificação da presença da Geometria Fractal na Cultura Africana, tomando a precaução de verificar o grau de consciência acerca do reconhecimento dos membros daquela(s) cultura(s) a respeito do que caracteriza os Fractais (a autossemelhança e a complexidade infinita, pelo menos). Nós, ao contrário, considerando nosso interesse de proporcionar estudos de Geometrias no contexto da educação básica – sobretudo a necessidade de formar professores para promover processos formativos similares para que seus alunos e alunas desenvolvam uma educação para as relações étnico-raciais – também nos interessamos pelos contextos em que há elementos da Cultura Africana em que os Fractais estão presentes, ainda que os sujeitos envolvidos com aquele elemento cultural não tenham plena consciência da Natureza Fractal presente. Busquemos explicar um pouco melhor esta ideia.

O cabelo é um dos mais importantes fatores da identidade negra, sobretudo para as mulheres. De acordo com Figueiredo (2008, p. 247),

> O debate em torno do significado da raça, das categorias raciais, da mestiçagem, e da classificação da cor no Brasil é o terreno em que se movem alguns dos textos antropológicos que articulam as categorias gênero e raça. Explorando cada vez mais este tema, podemos entender também como a concepção da raça é diferente para homens e mulheres. Gilliam e Gilliam (1995, p. 533)[18], por exemplo, sugere que o cabelo é o entrelaçamento entre as categorias de gênero e raça e observa que "de todas as características, é o cabelo o que marca a "raça" e o que mais significa para a mulher." Acrescentaria o fato de que também a vivência do racismo é diferente para homens e mulheres. Os homens negros, sobretudo, os jovens negros estão mais expostos à violência física institucionalizada ou não; enquanto as mulheres são mais vulneráveis a outro tipo de violência, não somente aquelas que condicionam a aparência às oportunidades de trabalho (CARNEIRO, 1995)[19], mas, principalmente, as que estão relacionadas às representações sobre o corpo e à construção de padrões de beleza hegemônicos que desconsideram a existência da beleza negra. (FIGUEIREDO, 2008, p. 247)

Figueiredo (2008) ainda indica que

> Visando a dar conta da diversidade de técnicas de manipulação do cabelo, construí uma tipologia em que descrevi tanto as formas e os discursos dos profissionais acerca das suas atividades, quanto o entendimento da identidade negra. Demonstrei que era possível identificar três profissionais distintos: as alisadeiras, as trançadeiras e os profissionais que trabalham com produtos químicos. Dentre estes, eram as trançadeiras que tinham um discurso mais eloquente e assertivo acerca da identidade negra. (FIGUEIREDO, 2008, p. 249)

Com isso, estamos mostrando que, além de o cabelo representar um importante – talvez o principal – elemento de constituição de identidade das pessoas negras, sobretudo as mulheres, o cabelo trançado é o que evoca um discurso mais veemente acerca da identidade e características da beleza da mulher negra. A figura a seguir mostra um padrão de cabelo trançado: tranças nagô. Segundo relata artigo da *Revista Correio Braziliense*, a atrança nagô consiste numa trança rasteira, rente ao couro cabeludo. Este tipo de trança também é citado por Apud Luane Bento, quando ela diz que a comparação de Eglash sobre Padrões Fractais nos cabelos trançados (tranças nagôs) faz parte

---

[18] GILLIAM, Ângela; GILLIAM, Onik'a. Negociando a subjetividade da mulata. In: **Revista Estudos Feministas**, Florianópolis, v. 3, n. 2, p. 479-489, 1995.

[19] CARNEIRO, Suely. Gênero, raça e ascensão social. In: **Revista Estudos Feministas**, Florianópolis, v. 3, n. 2, p. 544-553, 1995.

parte de um modelo metodológico etnomatemático que tem como objetivo destacar elementos matemáticos presentes nas práticas e técnicas culturais dos grupos oprimidos, subalternizados e historicamente dominados.

Figura 15*: Trança Nagô*

Fonte: acervo pessoal (2023)

Uma trança básica consiste no entrelaçamento de alguns fios de tal modo que uns se mantenham presos aos outros com alguma finalidade. Há tranças que têm por objetivo confeccionar cordas, cestos ou mesmo ornar esteticamente o cabelo humano, como é o caso das tranças nagô, como a representada na Figura 15.

É muito pouco provável que a trancista, enquanto realiza o trançado, realize cálculos complexos, ou mesmo que tenha consciência de que seu trabalho está inserido neste ou naquele contexto matemático ou geométrico. Ou seja, não é necessário que a trancista seja matemática, ainda que, eventualmente, ela reconheça seu trabalho como geométrico. De modo geral, ela o reconhece como artístico e estético.

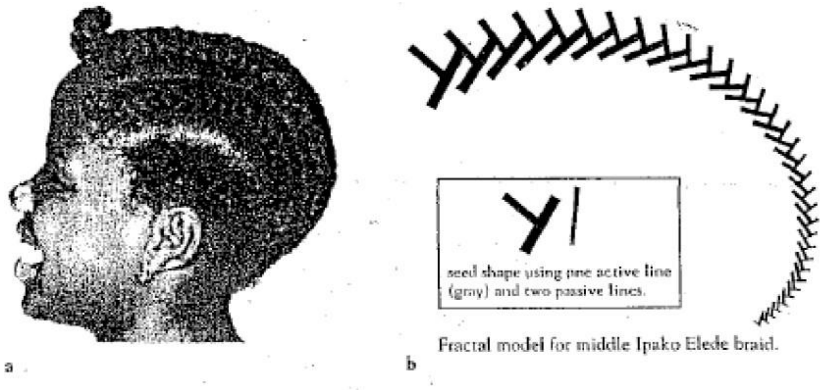
No entanto, notemos que, ao realizar uma trança em uma cabeça humana, a trancista vai, a cada etapa, realizando operações que se repetem tanto quanto for necessário para que os fios a serem entrelaçados – que se assemelham a uma superfície com duas dimensões formadas pelo comprimento do cabelo e a largura do conjunto dos fios – passem a contornar a cabeça – que se aproxima de uma esfera e tem, portanto, na Geometria Euclidiana, três. Com isso, concluímos que as tranças, ao serem feitas ao redor da cabeça, precisam transitar de duas dimensões para três, ou seja, as tranças nagô na cabeça de uma mulher obedecem a uma constituição geométrica que é explicada pela Geometria Fractal.

De fato, quem já tentou embrulhar uma bola utilizando uma folha de papel ou *esticar* uma semiesfera para virar um círculo sabe que, sem a Geometria Fractal, a tarefa de fazer algo que tem dimensão 2 cobrir exatamente algo que tem dimensão 3, ou vice-versa, é impossível. Uma aproximação é possível apenas quando se fazem ajustes. São esses ajustes, realizados aos poucos a cada etapa em que se repetem as iterações que, como vimos, dão origem aos Fractais.

> É possível interpretar mal esses exemplos de mapeamento conforme como sendo o produto de artesãos que são fortemente guiados por formas concretas ao invés de pensamentos abstratos. Mas a escala adaptativa também pode ser vista em exemplos mais abstratos: transformações globais nas quais o próprio espaço é distorcido. Esta é uma operação comum na Geometria Ocidental, sendo o exemplo mais frequente um mapeamento entre o plano e uma esfera [...] um penteado que parece ter um desenho planificado distribuído em uma superfície esférica. [Em] uma ilustração ainda mais abstrata, o inverso do mapeamento anterior — agora passando de esférico para retangular — utilizando três dimensões em vez de duas. (EGLASH, 2005b, p. 83-84)

Nesse processo, ainda que a Dimensão Fractal – entre 2 e 3 – não seja explícita e salte aos olhos de qualquer pessoa sem um olhar geométrico e matemático específico – ou seja, que não seja consciente – a autossemelhança e a percepção de que, para realizar a tarefa de transitar entre uma dimensão e outra, são necessárias infinitas etapas vão ficar evidentes. A trancista sabe que ela deve continuar repetindo o padrão (as iterações) de cada etapa até que seu trabalho esteja concluído. E, ao observá-lo sendo realizado, ela percebe que cada etapa é igual à anterior ligeiramente modificada. Está aí a *complexidade infinita* e a *autossemelhança*.

***Figura 16**: Autossemelhança e complexidade infinitas nos padrões de tranças de cabelo*



Fonte: Eglash (2005a)

Por que, mesmo que a trancista não saiba que ela está trabalhando segundo a Geometria Fractal, as tranças nagôs podem ser importantes para as Práticas de Ensino de Matemática voltadas a uma educação para as relações étnico-raciais? A resposta é: porque as tranças nagô têm história e essa história está relacionada à Cultura Africana.

De acordo com Clemente (2010, p. 6), "na África os penteados sempre foram carregados de grande simbologia. Os penteados indicavam: status, estado civil, identidade étnica, região geográfica, religião, classe social, status dentro da própria comunidade e até detalhes sobre a vida pessoal do indivíduo". Com isso, quando o professor ou a professora de Matemática está diante da necessidade de ensinar – em razão das demandas curriculares tradicionais – elementos de Geometria, como, por exemplo, o estudo da esfera, ele ganha a oportunidade de, simultaneamente,

- Discutir um elemento importante na constituição da identidade da pessoa negra: o cabelo.
- Colocar em prática elementos relacionados a práticas antirracistas: o reconhecimento de elementos de beleza negra e o respeito à identidade negra representada no cabelo.
- Reconhecer que a riqueza presente na Cultura Afro-Brasileira.
- Superar o estudo exclusivo da Geometria Euclidiana.

- Promover uma educação para as relações étnico-raciais com a mediação da Cultura Africana.

Mas, do mesmo modo como o próprio conhecimento geométrico não brota na cabeça de ninguém, como se fosse uma planta, o conhecimento necessário para que o professor e a professora adotem tais práticas em suas aulas de matemática, de modo geral, e de geometria, em particular, é preciso um processo formativo consciente e direcionado para tal objetivo. Caso contrário, o risco maior é o de continuarmos reproduzindo práticas tradicionais que invisibilizam por completo a Cultura Africana e as produções dos povos negros.

Seja evidenciando aquilo que foi produzido conscientemente pelos povos africanos – como propõe e mostra Eglash (2005b) – seja aproveitando oportunidades em contextos distintos e, talvez, involuntários presentes nas artes, dança, arquitetura ou outros aspectos de Cultura Africana, precisamos colocar em evidência, em nossas salas de aula, que os povos negros também são produtores de cultura e conhecimento. É um movimento formativo neste sentido que propusemos a professores e professoras em formação inicial para a docência em Matemática e que passaremos a apresentar adiante.

Antes, porém, de passar à apresentação e à análise de resultados do movimento formativo que propusemos, cabe determo-nos ainda por mais algumas páginas para apresentar aspectos teóricos e metodológicos que envolveram nossa formação e a análise dos dados que produzimos. É a esta apresentação dos fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa que dedicamos o capítulo 3, a seguir.

Capítulo 3 – Aspectos teóricos e metodológicos

Como estamos evidenciando até aqui, este texto tem o objetivo de apresentar os resultados da nossa pesquisa de mestrado. Ela teve como objetivo analisar movimentos de sentido de futuros professores de Matemática, no contexto de ações formativas. Elas, na sua vez, explicitam possibilidades de aprendizagem na organização do ensino de Geometria na educação básica em uma perspectiva étnico-racial e antirracista.

São antirracistas por enfatizar a necessidade de superação de práticas de ensino voltadas à consolidação de um currículo tradicionalmente eurocêntrico, como é aquele prescrito para a Matemática. Étnico-racial por levar em consideração e explicitar a presença de cultura e conhecimentos afrocêntricos como possíveis desencadeadores dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, superando a perspectiva eurocêntrica.

Considerando que a pesquisa se desenvolve no contexto do Programa de Pós-graduação em nível de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do IFSP, em respeito às características do mestrado profissional, buscamos desenvolver um produto educacional que evidenciasse a formação que propomos como tendo potencial para a superação das práticas tradicionalmente eurocêntricas de ensino de Matemática. Tal produto educacional consistiu em um Ciclo de Oficinas, efetivado a partir de uma ação de extensão submetida e aprovada nos termos do edital 2021-PRX_516 (Fluxo contínuo Eventos - Edital de Fluxo de Extensão Contínuo, do Campus São Paulo do IFSP).

Dadas as características da extensão fomentada em articulação com o ensino e a pesquisa no Campus São Paulo do IFSP, o evento, intitulado *Discussões étnico-raciais durante o ensino de geometrias*, abriu inscrições para professores e professoras das redes públicas e privadas da comunidade externa ao IFSP, bem como para estudantes da própria licenciatura em Matemática do Campus São Paulo, em razão da sua condição de futuros professores da educação básica em formação inicial.

Desse modo, o produto educacional, propriamente dito, remete ao movimento de organização do Ciclo de Oficinas: Discussões étnico-raciais durante o ensino de Geometrias, cujos documentos estão apresentados como apêndice ao final deste texto.

Do movimento formativo que efetivamos durante o Ciclo de Oficinas emergiram potenciais análises a respeito dos sentidos dos participantes, das compreensões a respeito da Matemática ensinada nas escolas de educação básica, das dificuldades de professores e professoras para promover atividades didático-pedagógicas antirracistas nas diversas redes em que atuavam os participantes, dentre outros aspectos.

Nós optamos, no entanto, considerando os objetivos mais específicos de nossa pesquisa, os quais remetem a acompanhar o movimento dos sentidos de futuros professores em formação inicial para a docência, por realizar um recorte dentre os sujeitos participantes do Ciclo. Os recortados teriam o perfil de serem estudantes da licenciatura em Matemática – estarem, portanto, em formação inicial para a docência – e terem demonstrado movimentos de sentidos que pudessem ser considerados indícios de superação de práticas eurocêntricas em favor de ações afrocêntricas. Esses participantes, que são os sujeitos da nossa análise, serão melhor apresentados e apresentadas mais adiante, ainda neste capítulo 3.

Antes de tal apresentação, cumpre, contudo, destacar ainda mais alguns aspectos do nosso movimento metodológico. O arcabouço teórico metodológico que adotamos remete aos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural – THC. Esta, na sua vez, tem como fundamento metodológico o Materialismo Histórico Dialético – MHD e isso porque entendemos que as condições de organização do mundo à nossa volta são materiais e os modos de ser e estar nesse mundo são históricos.

Concordamos com o professor, advogado, intelectual e Ministro dos Direitos Humanos do Governo Federal, a partir de 2023, Sílvio Almeida (2019, p. 36), quando afirma em sua obra *Racismo Estrutural*, que "por ser processo estrutural, o racismo é também processo histórico. Desse modo, não se pode compreender o racismo apenas como derivação automática dos sistemas econômico e político. A especificidade da dinâmica estrutural do racismo está ligada às peculiaridades de cada formação social". Assim, entendemos que o MHD, tal qual apresentado por Karl Marx, seja o método propício para a realização da análise que realizamos a partir dos movimentos materializados dos sujeitos das nossas ações formativas.

A décima primeira tese de Marx (1845) sobre Feuerbach anuncia que "os filósofos têm apenas interpretado o mundo de maneiras diferentes; a questão, porém, é transformá-lo". Em outras palavras, podemos inferir que, de acordo com Marx, não basta apontarmos para os problemas que identificamos quando analisamos o mundo. É preciso promover ações para superar tais situações que identificamos como problemáticas. Em particular, no nosso caso, entendemos que é problemática a exclusividade das práticas de ensino realizadas em uma perspectiva eurocêntrica (que destaca exclusivamente a Geometria Euclidiana como representante única do pensamento geométrico) e devem ser superadas em benefício do desenvolvimento das pessoas para o reconhecimento da importância de todos os povos nos processos de produção humana de cultura e conhecimento.

A superação – termo que já utilizamos diversas vezes, neste texto, até aqui, e precisaremos utilizar outras vezes – é um conceito que está além da compreensão do senso comum e que remete à ideia de "deixar para trás". A superação ocorre na emergência da síntese, que, na perspectiva dialética marxista, é a *superação* da unidade contraditória entre *tese* e *antítese*. A síntese guarda a essência de ambas em um movimento explicado pela lógica dialética.

Destacando o reconhecimento, especificamente, das produções dos povos africanos e de pessoas negras, entendemos ser coerente buscar, na concepção metodológica proposta por Marx, modos de não apenas compreender o problema do racismo impregnado nas estruturas dos sistemas educacionais (que são parte da sociedade), como já evidenciamos nos capítulos anteriores, mas também de modificar os contextos estruturais que sustentam a problemática identificada. É por essa razão que se dá nossa opção pelo Materialismo Histórico-Dialético, que é a caixa de ferramentas que Marx propõe como forma de identificar unidades contraditórias (teses e antíteses) bem como movimentos de superação e produção de sínteses.

De acordo com Pires (1997),

> O Método Dialético que desenvolveu Marx, o método Materialista Histórico-Dialético, é método de interpretação da realidade, visão de mundo e práxis. A reinterpretação da dialética de Hegel (colocada por Marx de cabeça para baixo), diz respeito, principalmente, à materialidade e à concreticidade. Para Marx, Hegel trata a dialética

> idealmente, no plano do espírito, das ideias, enquanto o mundo dos homens exige sua materialização. (PIRES, 1997, p. 86)

A ideia fundamental para a compreensão do Método Materialista Histórico-Dialético é a premissa segundo a qual é necessário materializar os movimentos a fim de compreendê-los e atuar sobre eles, modificando-os e sendo modificados por eles, dialeticamente. Essa premissa pressupõe, por sua vez, um movimento que se desenvolve à medida em que percebemos a atuação dos seres humanos sobre o mundo e deste sobre os seres humanos ao longo do tempo, ou seja, pressupõe um movimento histórico. Juntando essas ideias, temos a necessidade de materialização dos movimentos históricos que mostram como, ao mesmo tempo, as pessoas agem para modificar o mundo e são por ele modificadas (Dialética). Daí, grosso modo, a ideia geral do que vem a ser o Materialismo Histórico-Dialético.

Outra ideia fundamental para a compreensão do método é o conceito de *práxis*. Novamente de acordo com Pires (1997, p. 86),

> o conceito de práxis de Marx pode ser entendido como *prática articulada à teoria*, prática desenvolvida com e através de abstrações do pensamento, como busca de compreensão mais consistente e consequente da atividade prática – é prática eivada de teoria". Ou seja, na perspectiva do Materialismo Histórico-Dialético não há como distinguir claramente o que seja *teoria* e *prática* isoladamente. Ambas formam, dialeticamente, uma unidade: a práxis. (os destaques em itálicos são nossos)

O conceito de práxis é fundamental nas práticas educacionais, sobretudo as de Matemática. O fato se dá, porque é tradicional já, na nossa cultura escolar, que os professores e as professoras de Matemática recebam uma formação mais próxima de um Materialismo Hegeliano, em que as ideias matemáticas existem independentemente dos humanos – em uma perspectiva *idealista* – e que são acessadas por meio da observação e contemplação da realidade dada *a priori*, criada pela natureza, pelas divindades. Essa etapa constituiria a teoria (Teoria vem de *theos*, que, por sua vez, quer dizer "deus"). Depois da contemplação, da observação viria a materialização, a partir das ações e do trabalho humano (Prática vem do grego *praktiké*, algo como "trazido para a realidade").

A força revolucionária do Materialismo Dialético reside na superação de que as coisas são aquilo que a consciência do homem determina que elas sejam (tese), como propunham idealistas, como também de que as coisas são o que são independentemente do que o homem possa pensar a respeito delas (antítese), como defendiam materialistas tradicionais à época, para o reconhecimento de que as coisas são essencialmente representações materiais da cultura humana, historicamente constituída e da cultura acumulada que se reproduzem na consciência do homem que delas se apropria e é por elas apropriado (síntese).

O Materialismo Histórico-Dialético, enquanto método, retira a ênfase da análise superficial de sujeitos ou de produtos finais, como fins em si mesmos, para direcionar as investigações à compreensão dos processos cultural e historicamente constituídos. Essa convicção traz consigo a constatação de que o cerne do Método Histórico-Cultural, como uma abordagem materialista dialética, é o desenvolvimento da psique em relação à apropriação da experiência humana acumulada, que, por sua vez, se dá a partir de um processo mediado intencional e conscientemente.

Parece ser essa a perspectiva metodológica que sustenta o movimento *definição-demonstrações-propriedades-exercícios-problemas*[20] que se verifica tradicionalmente nas aulas de Matemática. Senão vejamos: o professor ou a professora apresentam a definição daquilo que vão ensinar, que é *coletado* por ele ou por ela do vasto campo do conhecimento matemático (o tal *reino das ideias*). Algumas vezes, o professor ou professora realiza a demonstração que visa a concluir, pela observação (contemplação), a veracidade da definição já apresentada, mas também é comum encontrar práticas em que professores e professoras apresentam a definição que deve ser aceita como verdadeira, *pela fé* ou pela *autoridade* de algum matemático com inteligência superior que empresta seu nome ao que está em estudo (como Teorema *de Pitágoras*, Geometria *de Euclides*, fórmula *de Bháskara* etc.). Depois, o professor ou professora apresentam as propriedades decorrentes da definição, resolvem alguns exercícios de aplicação da definição ou de alguma propriedade e apresentam outros exercícios similares a serem resolvidos por estudantes (o que até aqui seria *a teoria*). Como ponto de chegada, o professor ou professora apresentam problemas que envolvem a aplicação direta da definição ou

---

[20] Problemas de aplicação direta de ideias matemáticas.

propriedades em alguma situação supostamente da realidade. Estes fatos, na sua vez, seriam (serão) *cobrados* na avaliação, geralmente adotando exclusivamente o instrumento *prova* (o que seria *a prática*).

Na proposta formativa que apresentamos, buscamos materializar um movimento que tivesse a Cultura Africana – e não as definições geométricas – como ponto de partida, passando para a análise reflexiva acerca dos elementos geométricos envolvidos a fim de compreender conceitos como a complexidade infinita e a autossemelhança que, como indicamos anteriormente, no subcapítulo 2.3, são fundamentais para o reconhecimento da importância de Geometrias Não-Euclidianas, como a Geometria Fractal. Assim, as teorias sobre Geometrias e Cultura Antirracista vão subsidiando a construção (prática) de um conhecimento propriamente escolar, constituindo assim uma práxis. Essa práxis coloca em xeque o movimento tradicional e permite superar contradições, como a disparidade entre o discurso sobre a importância da promoção de uma educação para as relações étnico-raciais e as práticas tradicionais eurocêntricas no ensino de Geometria.

Entendemos que há contradição entre discurso antirracista presente nos contextos educacionais e modos de organização do currículo e das práticas pedagógicas voltadas ao ensino, sobretudo, ao da Matemática. Nosso percurso metodológico consistiu, portanto, em materializar situações de formação de professores de Matemática em que estejam em pauta a organização do ensino de Geometrias, tendo a Cultura Antirracista como elemento desencadeador. Desse movimento formativo fizemos o recorte de sujeitos, como indicamos nos parágrafos anteriores, cujos movimentos dos sentidos a respeito da organização do ensino voltado para o desenvolvimento da Cultura Antirracista serão analisados adiante, no capítulo 4.

Já, para a análise dos resultados do movimento formativo, ainda no contexto do Materialismo Histórico-Dialético, recorremos aos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural (VYGOTSKY, 2001) para definir e analisar a aproximação entre sentidos pessoais dos licenciandos, em formação inicial para a docência, e os significados sociais impregnados nas práticas de ensino de Geometria. A compreensão teórica destes pressupostos está sintetizada a seguir, no subcapítulo 3.1.

3.1 Pressupostos da Teoria Histórico-Cultural.

Neste subcapítulo serão discutidos construtos teóricos que subsidiarão nossa análise do movimento formativo. Devem ser discutidos os conceitos de sentido pessoal, significado social, gênese histórica, analiticidade e fossilização, dentre outros que precisarem ser apresentados. Os principais referenciais teóricos para a escrita serão Vygotsky (2001) e Leontiev (1989). Tais pesquisadores têm suas origens e seus contextos de pesquisa na antiga União dos Países Socialistas Soviéticos – URSS. A opção pelas ideias de tais pesquisadores está coerente com a opção metodológica pelo MHD, apresentada na introdução deste capítulo 3.

Segundo Virgens (2019), o primeiro princípio da Teoria Histórico-Cultural, de acordo com Vygotsky (1991), remete à superação da análise de um objeto pela análise de um processo. Para isso, Vygotsky (1991) defende a necessidade de uma análise a partir de uma exposição dinâmica dos principais pontos constituintes da história dos processos. Com isso, a proposta vygotskiana passa pela necessária reprodução do movimento que culmina na produção histórica do conceito. Nesse sentido, é importante destacar que não se trata, necessariamente, da reprodução da história factual, mas de promover um movimento em que a essência dos processos históricos esteja em evidência.

No caso da aprendizagem da Matemática, reconhecemos um movimento histórico que coloca em destaque o estudo dos conhecimentos (objetos) da Geometria Euclidiana. O que fizemos foi retirar a ênfase das influências da cultura eurocentrica, e dar visão à Cultura Africana, propondo movimentos desencadeados por elementos de uma Cultura Afrocêntrica que nos permitiram analisar os processos de apropriação (e construção) de tais conhecimentos.

Ainda na esfera de Virgens (2019), o segundo princípio da THC remete à prática de explicar em contrapartida as perspectivas descritivas, ou seja, enfatiza a necessidade de superar processos analíticos que tendem a descrever características superficiais do fenômeno, sensoriais, em benefício de uma análise explicativa do fenômeno, como um todo. Essa análise explicativa pressupõe, conforme Vygotsky (1991), uma compreensão genotípica[21] do fenômeno, superando uma compreensão fenotípica (descrição do fenômeno).

No nosso caso, organizamos a formação de modo a colocar em perspectiva fenômenos que tivessem embutidos em si o conceito matemático-geométrico em estudo (como as noções de infinito ou de autossemelhança) de modo que se pudesse desencadear um movimento de compreensão e formação do conceito (sua origem) e não sua compreensão a partir de uma apresentação previa.

Por fim, o terceiro princípio apresentado por Vygotsky é a necessidade de superação "comportamento fossilizado". A ideia é a de que.

> [...] em Psicologia, defrontamo-nos frequentemente com processos que esmaeceram ao longo do tempo, isto é, processos que passaram por um estágio bastante longo do desenvolvimento histórico e tornaram-se fossilizados. Essas formas fossilizadas de comportamento são mais facilmente observadas nos assim chamados processos psicológicos automatizados ou mecanizados, os quais, dadas as suas origens remotas, estão agora sendo repetidos pela enésima vez e tornaram-se mecanizados. Eles perderam sua aparência original, e a sua aparência externa nada nos diz sobre a sua natureza interna. Seu caráter automático cria grandes dificuldades para a análise psicológica. (VYGOTSKY, 1991, p. 45)

No nosso caso, a busca pela superação do comportamento fossilizado se deu ao reconhecer que as práticas de ensino de Matemática que enfatizam a apresentação dos conteúdos matemáticos, em geral, e geométricos, em particular, a partir de uma perspectiva eurocêntrica são justamente o que Vygotsky descreve como comportamento fossilizado, já que é admitido como "adequado", *a priori*, sem questionamentos ou justificativas.

Tanto durante a exposição dos elementos necessários à compreensão do contexto da nossa pesquisa, que realizamos nos dois primeiros capítulos anteriores, como para a compreensão de nossa análise no próximo capítulo deste texto, dois conceitos são utilizados e precisam ser definidos, considerando serem conceitos bem definidos na THC e com possíveis variações semânticas no senso comum. Trata-se dos conceitos de sentidos e significados.

Vygotsky (2001) defende que as relações entre o pensamento e a

---

[21] Composição com os termos “gene”, que remete a origem, nascimento, e “tipo”, ou seja, Abordagem do tipo que remete à origem do fenômeno.

linguagem se materializam na palavra, já que as interações sociais estabelecem, histórica e culturalmente, um sistema formado por símbolos, os quais são sintetizados pelas palavras. Em outros termos, as interações sociais que relacionam palavra (linguagem) e aquilo que pensamos quando ouvimos, lemos ou nos relacionamos com tais palavras é que conferem a estas palavras o que chamamos de **significados**. Para Vygotsky (2001, p. 398), "a palavra desprovida de significado não é palavra, é um som vazio".

Dessa forma, por significado, devemos compreender as ideias que foram sendo impregnadas nas palavras histórica, espacial e culturalmente. Por exemplo, ao ler neste texto a palavra Geometria, ela veio impregnada de ideias que foram sendo construídas ao longo do tempo e no contexto de diversas culturas. Essas ideias se relacionam com as formas das coisas, com as representações dessas formas, com as possibilidades de construir essas formas, com os materiais concretos que possibilitarão desenhar em um papel essas formas etc. Tudo isso (e mais) constitui o **significado** que compreendemos e que está impregnado na palavra *Geometria*.

Acontece que o significado, concordando com Vygotsky (2001), é social e coletivo, já que é histórico e cultural. Ou seja, o significado impregnado na palavra não é aquilo que cada sujeito pensa dele. É aquilo que se construiu ao longo do tempo e que se sintetizou naquela palavra. Sendo assim, uma palavra pode ter um significado em um contexto social e cultural e outro significado em outro contexto. Pensemos, por exemplo, uma certa raiz – que serve de alimento para as pessoas e que é muito apreciada por comunidades indígenas no Brasil – é chamada de "mandioca" em alguns lugares do país, mas é conhecida apenas como "macaxeira" em outros. Também há lugares, sobretudo no Nordeste do país, onde o termo que designa a mesma iguaria é "aipim". Possivelmente, ao dizer "maxaxeira" ou "aipim" na região da cidade de São Paulo, onde a raiz é conhecida como "mandioca", haverá espanto e dificuldade de compreensão a respeito do *significado* do que se está dizendo.

Essa dificuldade decorre do par dialético do significado: o sentido. O conceito de **sentido** é fruto das experiências pessoais de cada sujeito no contexto da mesma cultura, durante o processo de significação. Dessa forma, de acordo com Vygotsky (2001), o sentido é "mais amplo" do que o significado, pois engloba todos os fatos psicológicos a que a palavra nos remete, a partir de nossas experiências. No caso do exemplo sobre a palavra “mandioca”, cada sujeito compreende seu significado construído historicamente em sua cultura, mas também no âmbito pessoal, a partir de suas experiências. A palavra “mandioca” remete a fatos psicológicos distintos em cada sujeito, que podem englobar o significado social historicamente constituído, mas o supera, resumindo as experiências de cada sujeito, que são, obviamente, distintas entre si. “Mandioca” pode incluir vivências afetivas, por exemplo, de modo que, ao ouvir a palavra, o sujeito pode se recordar de um ente querido ou de um momento especial em que a raiz estava disponível em alguma refeição.

A soma desses fatos psicológicos despertados em cada um é o que Vygotsky (2001) compreende como *sentido pessoal* que é “uma formação dinâmica, fluida, complexa, que tem várias zonas de estabilidade variada. O significado é apenas uma dessas zonas do sentido que a palavra adquire no contexto de algum discurso e, ademais, uma zona mais estável, uniforme e exata” (VYGOTSKY, 2001, p. 465).

Na perspectiva da THC, os movimentos formativos que desenvolvemos têm o potencial de aproximar os sentidos dos sujeitos em formação de significados sociais que desejamos. Especificamente, nos interessamos em relativizar a exclusividade que leva os significados impregnados na Geometria produzida em um contexto apenas europeu – um movimento que, inclusive, agrega ao termo “Geometria” o adjetivo “Euclidiana” – para aproximar os sentidos dos sujeitos e produzir significados em que a Geometria é compreendida em um contexto de produção humana que engloba, também, muitos aspectos das Culturas Afrocentradas.

Apresentados esses importantes conceitos da nossa análise, tratamos, a seguir, de apresentar, de modo geral, o movimento formativo que realizamos.

3.2 Apresentação do movimento formativo e metodologia de análise

Neste subcapítulo, apresentaremos a proposta do ciclo de debates e palestras que compuseram o movimento formativo que realizamos com os licenciandos. O Cilco de Oficinas foi realizado, conforme descrito na introdução deste capítulo, como um evento de extensão do Campus São Paulo do IFSP, do qual participaram diversos educadores das redes municipal e estadual de educação de São Paulo. Todavia, como também já indicamos, foram destacados os movimentos dos estudantes e das estudantes da Licenciatura em Matemática do Campus São Paulo. Os movimentos dos sentidos desses estudantes é que serão objeto da análise apresentada no capítulo 4.

Os sujeitos cujos movimentos foram analisados formam um grupo com quatro integrantes que são os que mais se destacaram nas oficinas. Dois são estudantes negros, um do sexo feminino e um do masculino. Há também dois estudantes brancos: um do sexo masculino e outro do feminino. A indicação da identidade racial desses sujeitos está considerando exclusivamente a autodeclaração dos mesmos. Destas oficinas também participaram professores de Matemática, História e Pedagogos; porém, estávamos na época da pandemia e, depois período de férias. Por isso, esses educadores na atividade não permanceram.Já os estudantes da licenciatura foram aqueles, dentre os participantes, cujos movimentos dos sentidos mais se aproximaram da proposta de superação de práticas tradicionais de ensino de Geometrias em favor de organizações do ensino nas quais as práticas pedagógicas se voltassem para o desenvolvimento das Relações Étnico-Raciais e enfatizassem uma Cultura Afrocêntrica e comprometida com perspectivas antirracistas.

A cada participante, considerando a importância de resguardar sua privacidade e identidade, foi atribuido um pseudônimo. Alfa e Gama são as alcunhas atribuídas às duas mulheres cujos movimentos dos sentidos foram analisados durante a pesquisa, enquanto Beta e Delta são os pseudônimos atribuídos aos dois participantes do sexo masculino.

Alfa, que estava na condição de concluinte do curso de licenciatura, é uma mulher branca cujos sentidos pessoais iniciais apontaram na direção do reconhecimento de gozar de privilégios sociais decorrentes de sua branquitude, bem como do contraste contraditório em relação à sua condição de mulher. Manifestou dúvidas em relação ao autorreconhecimento de sua condição de professora em processo de formação. Indicou por vezes que ser responsável pela educação de outras pessoas seria muita responsabilidade. Por outro lado, indicou em suas falas iniciais que reconhecia o caráter eurocentrado do Conhecimento Matemático ensinado majoritariamente nas escolas e que queria buscar meios de complementar sua formação para estar pronta para superar essa característica do curriculo escolar em favor de Perspectivas mais Afrocentradas. A seguir, há um recorte da apresentação de Alfa, de onde pudemos inferir seus sentidos pessoais iniciais. Antes, porém, afirmamos que as oficinas foram pensadas para que ocorressem em forma síncrona, pois estávamos no período da pandemia. Foi, por isto, oferecido questionário pelo Google Forms e os encontros ocorreram via Google me.

> Acredito que, desta vez, eu estou no último ano do curso de Matemática, Licenciatura em Matemática... de uns tempos para cá eu entrei em um curso de extensão no IFSP que é para imigrantes e a partir deste curso eu comecei a estudar Pedagogia Decolonial e são essas questões que na aula de História dizem que os bandeirantes e os jesuítas eram pessoas legais... eu aprendi isso no meu ensino médio e depois que eu entrei no IF com algumas aulas... mas depois que eu entrei nesse curso de extensão eu aprendi que eu só conhecia uma parte da história e então eu comecei tendo contato com alguns professores, como o professor [nome do professor], e o professor [nome de outro professor] e outros que são professores que nos levam a ter um olhar mais crítico... o que eu achava que já tinha, mas não tinha... então, eu me interessei, porque eu quero aprender sobre esse assunto também... é isso, eu acho que, infelizmente, a nossa educação, a Educação no Brasil é pautada na educação que os jesuítas vieram aqui e colonizaram os indígenas... que é uma educação eurocêntrica e branca; então, também como mulher... porque na própria Licenciatura em Matemática eu só ouvi falar de matemáticos brancos, né? È isso, gente. Eu quero aprender também sobre Relações Étnico-Raciais... (ALFA, Encontro I, 2021)

Beta é um homem negro que já possui uma graduação como Bacharel em Matemática e optou por não fazer um curso curto[22] para obter o grau de licenciado também. No curso de Licenciatura em Matemática em que está matriculado, Beta se encontava, à época da formação, no 6º semestre[23]. A primeira graduação de Beta foi em uma instituição privada e ele afirmava que queria complementar, em suas palavras, adequadamente sua formação para a docência, razão pela qual optou pelo curso de Licenciatura em Matemática, completo e em uma instituição pública. Em razão de seu lugar de homem negro, Beta mostrou-se bastante interessado e envolvido com a temática do ensino e aprendizagem de Geometria e com a educação para as Relações Étnico-Raciais, tendo inclusive compartilhado e indicado leituras para os

[22] No Brasil, existe uma linha formativa reconhecida, associada à ideia de “complementação pedagógica” que é direcionada a bacharéis e tecnólogos como complementação de suas formações iniciais para que obtenham também o grau de licenciados. Essa modalidade formativa é regulada pela Resolução nº 2, de 1º de julho de 2015, do Ministério da Educação – MEC, que substituiu a Resolução também numerada com o número 2, em 1997, razão pela qual essa modalidade formativa ficou popularmente conhecida no meio acadêmico como “Formação Pedagógica R2”. A duração média desses cursos varia de 6 meses e 1 ano.

[23] O curso de Licenciatura em Matemática do IFSP tem um total de 8 semestres previstos.

colegas durante alguns momentos da formação. A seguir, também um recorte da apresentação de Beta:

> Eu sou aluno da Licenciatura, [...] ah, a minha formação, eu já tenho uma formação, já fiz Bacharelado em Matemática, mas estou agora estudando a Licenciatura em Matemática. Deixa eu ver a 3 perguntas... ah, o nível de apreço por Geometria... Nossa... Muito me agrada sabe. Geometria era quando entrei na faculdade pela 1a vez; Geometria era meu ponto fraco; não sabia nada de Geometri; acabo pensando que ainda não sei na verdade; a gente teve uma aula hoje dos níveis de conhecimento de Vanziler; lá, e eu descobri que estou no nível mais baixo possível, mas toda a minha experiência acadêmica e profissional contando as participações em projetos voluntários (eu já participei de 2). Eu sempre atuei na área da Geometria; sempre fui específico, porque eles têm a tendência de ser para Álgebra e Geometría; eu fui para Geometria; nem foi imposto; foi por escolha mesmo e eu acabei gostando. Quando a gente faz a relação da Geometria com Conhecimentos Africanos e “etino raciais”; esqueci a palavra; não lembro agora, mas é muito bacana, porque a gente conhece os outros tipos de Geometria; a gente consegue passar para o aluno que não existe somente a Geometria de Euclides; existem outras; isto muito me agrada e, conforme a gente vai estudando esse tipo de Geometria, a gente vai conhecendo as características do Continente Africano, né? A gente vai conhecendo a Hisória da África e não fica apegado... Ah, o Continente Africano é aquele que sofre com seca, com fome; então, a gente vai desconstruindo essa imagem, pois é descolonizando... Eu tinha até um livro aqui muito bom; era de uma das professoras da UFBA que fala da descolonização e da implementação da lei 10639-03 e aquele livro tipo abrir porta de conhecimento para mim dentro deste campo; então, muito me agrada as expectativas; está a mil viu. (BETA, Encontro I, 2021)

Gama é uma jovem[24] mulher negra que, à época da formação, havia acabado de ultrapassar a primeira metade do curso de Licenciatura. Também indicou estar bastante interessada, envolvida e já familiarizada com a temática da educação para as Relações Étnico-Raciais, indicando inclusive o desenvolvimento de um projeto de iniciação científica envolvendo o reconhecimento de produções de conhecimento matemático por povos africanos. Ela também indicou estar inserida em um contexto familiar em que as Lutas Antirracistas e as Temáticas Étnico-Raciais são centrais para as formas de organização, com pais engajados no movimento negro. Fez questão de declarar ser fã das ideias defendidas por Malcon X[25]. A seguir, temos parte da auto-apresentação de Gama.

---

[24] Todos os participantes do recorte estão na faixa etária de 20 a 25 anos.

[25] Malcon X foi um importante ativista negro estadunidense, defensor do Nacionalismo Negro nos Estados Unidos. Fundou a Organização para a Unidade Afro-Americana e foi brutalmente assassinado, em 1965, por causa das ideias revolucionárias que defendia.

> Boa noite, meu nome é Beta e eu faço Licenciatura em Matemática [...] Eu gosto bastante de Geometria bastante mesmo... mas só conhecia a Geometria Euclidiana, né? Ah, e como eu sou aluna do Professor [nome do professor] em História da Matemática, quando o professor explicou a Construção do Triângulo [de Sierspinski]... foi, assim, uma coisa que, aqui na minha cabeça, assim (faz um gesto de afastar as mãos sobre a cabeça, sugerindo "expansão"), porque eu não sabia que existia outros tipos Geometria, né?... Então quando eu ouvi que ia ter uma oficina sobre este assunto, nossa... foi uma alegria... então minha expectativa está demais para este tema. E eu também, faz bastante tempo, que trabalho com este tema, étnico-raciais (sic), né?... Eu não sabia que poderia voltar isso para a parte da Matemática... então para mim foi uma revelação assim... estou bem feliz de estar participando (GAMA, Encontro I, 2021)

Delta é um homem negro, da mesma turma de Beta. Manifestou o reconhecimento da importância de buscar desenvolver uma educação voltada para as relações étnico-raciais e seu entendimento de que a formação alcançada na graduação somente não atendia a tal atuação. Junto com Beta, indicaram já estarem atuando em salas de aula da educação básica, como professores de Matemática com aulas atribuídas na Rede Pública Estadual de São Paulo.

> Meu nome é [Delta]; eu faço parte do IFSP; sou da turma do [Beta] e da [nome de outra colega] e sou aluno do Professor [nome do professor]; também sou licenciando da Matemática e, quando o professor enviou a proposta das oficinas no grupo, eu me interessei bastante, porque é uma temática importante para mim justamente por causa da cultura que a gente consegue envolver dentro da Matemática.

Passamos a apresentar agora a organização geral do movimento formativo. A primeira oficina foi intitulada *"Superando a Geometria Euclidiana: autossemelhança e complexidade infinita"*. Ela teve como objetivo geral desenvolver situações desencadeadoras de aprendizagem com potencial para superar lacunas da Geometria Euclidiana em relação aos conceitos de infinito e iterações sucessivas (autossemelhança).

A segunda oficina, intitulada *"Generalizações a partir do triângulo de Sierpinski"*. Ela teve como objetivo desenvolver situações que colocassem em movimento o reconhecimento, a análise e a modelação algébrica de padrões que envolvessem os conceitos de autossemelhança e complexidade infinita. Para isso, utilizamos problemas desencadeadores relacionados ao Fractal conhecido como "triângulo de Sierpinski", que é um Fractal com dimensão de aproximadamente 1,6 (não inteira, o que está além da compreensão possível na Geometria Euclidiana), a partir de discussões desencadeadas a partir do tecido de Kentê, que é um tipo de tecido africano, cujas estampas remetem a valores importantes para as sociedades em geral e que possuem uma matriz africana representada naquele tipo de tecido.

Foram discutidos elementos do estudo do triângulo que relacionam compreensões euclidianas (através das comparações entre áreas de triângulos equiláteros e análises de componentes geométricas euclidianas) até o reconhecimento de que a complexidade infinita se relaciona com a necessidade de superação da Geometria Euclidiana.

Por sua vez, a terceira oficina foi intitulada *“Reconhecendo a autossemelhança e a complexidade infinita na estratégia vencedora da Torre de Hanói”*. Esta teve como objetivo colocar em discussão a possibilidade de atrelar práticas tradicionais (e até eurocêntricas) com o reconhecimento e a compreensão de aspectos importantes da Cultura Africana. A Torre de Hanói é um jogo bastante conhecido entre professores de Matemática, pois a estratégia vencedora é uma aplicação direta de uma função exponencial. Como o comportamento exponencial (e seu inverso, logaritmo) são padrões que modelam muitos fenômenos na natureza e a Geometria Fractal também está presente na geometrização da natureza, em maior frequência até que a Geometria Euclidiana, os debates remeteram a essa presença da Geometria Fractal na compreensão da realidade "natural" (decorrente de fenômenos naturais) a partir de um exemplo particular de modelagem do jogo Torre de Hanói. Nessa oficina, as Relações Étnico-Raciais são tratadas transversalmente e têm como contexto a presença das funções exponenciais na Cultura Africana.

Já na quarta oficina, que chamamos de *“Autossemelhança e complexidade infinita em Fractais Africanos”*, buscamos conversar especificamente sobre as ideias de autossemelhança e complexidade infinita, discutidas nos encontros anteriores, e sua relação com os Fractais reconhecidos na Arte, na Moda, na Arquitetura e Cultura Geral de Povos Africanos. A principal referência mediadora do debate foi a obra "African Fractals: modern computing and indigenous design", de autoria do pesquisador estadunidense de Fractais, Ron Eglash (2005b).

Por fim, a quinta e última oficina, intitulada *“Produção do conhecimento geométrico no Continente Africano: influências histórico-culturais invisibilizadas”*, realizamos o debate de encerramento do ciclo com foco nas discussões que pudessem remeter à superação da exclusividade de práticas eurocêntricas nas atividades de ensino, como é o caso, por exemplo, da Geometria Euclidiana, tratando da compreensão histórico cultural de superação que remete ao reconhecimento da importância de culturas diversas e de que tais culturas influenciam diretamente os processos de aprendizagem.

Torna-se importante destacar que todos os encontros foram realizados remotamente, via ferramenta de webconferência, de modo síncrono, em razão dos protocolos de segurança para contenção da Pandemia de COVID-19. Os dados foram coletados e analisados por meio da gravação das webconferências e transcrição dos encontros, com autorização dos participantes, bem como por meio dos registros de realização das atividades realizadas durante os encontros.

Capítulo 4: A formação de professores para os estudos envolvendo a Geometria Fractal com ênfase no reconhecimento de aspectos da cultura africana.

Este capítulo apresenta a análise que realizamos dos movimentos dos sentidos dos quatro sujeitos participantes do movimento formativo, escolhidos de acordo com os critérios apresentados no capítulo 3 e que giram em torno da nossa interpretação, caso a caso, das aproximações entre os sentidos pessoais dos sujeitos e os significados sociais a respeito de Geometrias e Relações Étnico-Raciais no ensino de Matemática, especialmente a Geometria Fractal e a Cultura Africana.

Considerando, conforme indica Caraça (1951), a impossibilidade de capturar e apresentar aquilo que é universal, precisamos realizar um recorte que possa reproduzir os movimentos dos sentidos dos sujeitos, de modo que o conceito de *isolado* surge como uma importante categogia metodológica capaz de apresentar aquilo que é essencial na relação entre realidade e apresentação. O *isolado* é definido por Caraça como sendo “uma secção da realidade, nela recortada arbitrariamente” (CARAÇA, 1989, p. 112), a qual sintetiza um conjunto de situações que representem a totalidade da realidade estudada.

> Na impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo, o observador recorta, destaca dessa totalidade um conjunto de seres e fatos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados. A um tal conjunto daremos o nome de *isolado* (CARAÇA, 1989, p. 112. O destaque é nosso).

Cada um dos *isolados* pode ser subdividido em categorias, que denominamos *episódios*, concordando com Moura (2000) quando indica que episódios são momentos da formação que evidenciam as contradições que podem promover a aprendizagem do conceito em estudo.

Em nossa análise, aqui apresentada, destacamos dois *isolados*, tendo o primeiro dois episódios e o segundo, um episódio. O primeiro *isolado* diz respeito à conscientização a respeito da necessidade de, considerando a importância de promover uma educação matemática voltada para o desenvolvimento das Relações Étnico-Raciais, superar o estudo exclusivo da chamada Geometria Euclidiana em favor do desenvolvimento de uma Geometria mais histórica em que as contribuições de povos africanos na gênese do conhecimento geométrico são evidentes e reconhecidas.

4.1 Isolado 1: Conceitos de Geometrias Não-Euclidianas a partir da Cultura Africana.

Como indicamos no capítulo 1 deste texto, consideramos, a exemplo dos referenciais lá apresentados, como Eglash (2005b), que a exclusividade da presença da Geometria Euclidiana nos currículos escolares é um exemplo do eurocentrismo impregnado em nossa cultura escolar e deve, em uma perspectiva que reconhece os processos de escolarização como desenvolvedores de humanização, ser superado. Superar a Geometria Euclidiana implica desenvolver, a despeito do que indicam os documentos curriculares, como a BNCC e o Currículo Paulista, conforme indicamos no subitem 2.2, aprendizagens de Geometria que envolvem conceitos que não foram considerados plenamente para o desenvolvimento da Geometria na forma como Euclides sintetizou em os *Elementos*.

Neste primeiro *isolado*, destacamos, portanto, dois episódios em que os sentidos dos licenciandos estiveram em movimento em relação a conceitos importantes para o desenvolvimento da Geometria Fractal – Não-Euclidiana, como indicamos no subitem 2.3: o conceito de infinito e de autossemelhança. O conceito de infinito está em discussão no Episódio 1: ao infinito e além, apresentado no subitem 4.1.1, e o Episódio 2: padrões repetições e autossemelhança, o qual será apresentado mais adiante, no subitem 4.1.2.

4.1.1 Episódio 1: ao infinito e além

O conceito de infinito também está presente na Geometria Euclidiana. Mas não é essencial e se limita à noção intuitiva que temos quando dizemos, por exemplo, que uma reta é *infinita*. O infinito compreendido como um conceito que confere *significado* a algo, como uma forma geométrica, é uma ideia que não está presente na Geometria Euclidiana, mas é fundamental para a compreensão da Geometria Fractal e de como essa geometria ajuda a compreender o mundo à nossa volta.

Em nossa primeira oficina, *"Superando a Geometria Euclidiana: autossemelhança e complexidade infinita"*, apresentamos um vídeo que trata das relações entre Artes e Formas, disponível no YouTube[26]. O vídeo trata, dentre outras coisas, da proporção áurea, ou proporção de ouro. Após assistirem ao vídeo, os participantes foram subdivididos em dois grupos, nos quais deveriam discutir algumas questões orientadoras e trazer os resultados das discussões depois para o grupo completo. O objetivo era provocar reflexões que pudessem remeter, mesmo no contexto de estudos da Geometria Euclidiana, a necessidades a respeito de conceitos de Geometrias não Euclidianas. No caso particular, a respeito do conceito de infinito.

A partir das respostas deles para as perguntas[27], foi apresentado um problema que consistia em relacionar a ideia de que a construção do pentágono e de suas diagonais permite observar um padrão repetitivo: a construção de um pentagrama.

***Figura 17**: Pentágono e Pentagrama*

Fonte: elaborado pela autora e utilizado na oficina 1

A construção do pentagrama foi proposta, utilizando-se o software GeoGebra, em sua versão on-line e gratuita[28]. Em razão do uso do software, os elementos da construção podem ser movimentados, medidos e manipulados de diversas formas. A mediação, então, permitiu o reconhecimento da presença da proporção áurea entre os trechos dos segmentos presentes na figura, tal e qual havia sido mostrado no vídeo. Após a construção surgiu a seguinte colocação de Alfa:

> Nossa... estou aqui pensando... tinha tantas formas de eu aprender Geometria na faculdade, né? E eu aprendi daquele jeito chato... olha

[26] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=LElAAI41InI
[27] As perguntas buscavam aferir sentidos pessoais iniciais e estão apresentadas nos apêndices em que disponibilizamos a proposta de organização da oficina.

[28] https://www.geogebra.org/?lang=pt

> que interessante, eu nunca tinha pensado nessa proporção no pentágono (sic)... eu lembro que construí pentágonos na aula de Construções Geométricas, mas nunca tinham me falado que dentro do pentágono, se eu traçar as diagonais, encontro outro pentágono e que posso repetir isso para *sempre* [...] (ALFA, Encontro 1, 2021)

A adoção do termo *sempre* por Alfa é o primeiro indício de sentidos relacionados ao conceito de infinito. Sabemos que não é uma indicação literal, ou seja, não se espera que alguém repita o procedimento eternamente para verificar que, na próxima iteração, novamente se verificará a existência de um pentágono formado pela intersecção das diagonais de um pentágono maior. No entanto a *confiança* de que isso acontecerá movimenta os sentidos de Alfa, que indica explicitamente que já havia realizado a construção e reconhecia pentágonos no contexto da Geometria Euclidiana. O sentido se movimenta na direção de um significado diferente do sentido de infinito apontado por Alfa anteriormente, no momento das apresentações e sentidos pessoais iniciais, quando ela indicou uma noção mais próxima daquela de senso comum, que compreende infinito como aquilo que *não tem fim*.

Agora Alfa indica que compreende infinito como algo que *sempre* vai acontecer, mesmo que esteja geometricamente limitado por uma região finita. Em outras palavras, Alfa está indicando que, apesar de o pentágono ter fim – ser uma forma geométrica com área limitada – ela contém o infinito dentro de si e permite reconhecer esse infinito por meio de uma construção geométrica que dialoga com aquela Geometria que geralmente é ensinada nas escolas.

A conscientização a respeito dessa noção começa a ficar evidente a partir da colocação subsequente de Beta. A pesquisadora realiza a seguinte pergunta: “isso sempre acontece? Isso de termos o polígono grande reproduzido no centro da figura...” (Pesquisadora, Encontro 1, 2021). Beta responde a essa questão dizendo: “sempre não... com o quadrado não funciona” (Beta, Encontro 1, 2021). A discussão segue por um tempo a partir da hipótese levantada pelos próprios participantes de que, talvez, o quadrado (na verdade, os quadriláteros) fosse a única excessão. Beta, então, insiste que, mesmo que o quadrado seja a única excessão, a resposta para a pergunta da “professora” (a pesquisadora) tem que ser não, porque, em suas palavras: “mas a professora perguntou se *sempre* [dando ênfase ao termo mudando a entonação] acontece”.

Com isso, Beta chamou a atenção do grupo à palavra *sempre*. Naquele contexto, ela sintetizava o significado construído historicamente e relacionado ao conceito matemático de infinito. Para poder sustentar o “sempre”, a regra tem que valer para todos os casos. Aqui, diferentemente do sentido indiciado por Alfa – de que o infinito pode estar limitado em uma região finita, afastando-se da ideia de algo que “não acaba” – Beta destaca uma compreensão de que, ao se expandir um *padrão* indefinidamente, se essa expansão não retorna *sempre* às mesmas características observadas, não se pode realizar a generalização. Assim, a reflexão a respeito do infinito mostrou-se, para Beta, em diálogo com o conceito matemático de generalização, tão importante em diversos campos da Matemática, como a própria Geometria (inclusive a Euclidiana), mas também na Álgebra.

Já na terceira oficina, *“Reconhecendo a autossemelhança e a complexidade infinita na estratégia vencedora da Torre de Hanói”*, um outro sentido de infinito permeou as discussões. A Torre de Hanói é um jogo para um jogador que consiste em movimentar todos os discos de uma torre para outra, seguindo duas regras básicas: um disco jamais pode ficar sobre outro que tenha diâmetro maior que o seu próprio; e só é permitido movimentar um disco por vez. A origem do jogo é uma referência à capital vietnamita, onde o jogo teria surgido, e está atrelada a uma lenda vinculada ao bramanismo, religião praticada na Índia. O jogo foi adotado nas oficinas como exemplo de epistemicídio (CARNEIRO, 2005) decorrente do eurocentrismo, já que, de modo recorrente, a Torre de Hanói é um jogo que remete a um dos matemáticos que a estudaram, o francês Edouard Lucas. Nessa oficina, também adotamos um jogo em tabuleiro Mancala, considerado o “xadrez africano” (PEREIRA e CUNHA JR., 2016). O mancala remete a uma família de jogos africanos baseados na semeadura, em que os competidores seguem as regras do jogo a partir de uma premissa relacionada à ideia de semear as sementes no solo durante as plantações.

Foi no contexto das discussões a respeito do Mancala que Delta destacou um movimento de sentidos importante em relação ao significado de infinito. O jogo proposto inicia-se com 4 (quatro) sementes em cada cava (as “casas” do tabuleiro). Após os participantes jogarem em tabuleiros on-line, foi, então, proposto um problema em uma adaptação do jogo. Se semearmos apenas no nosso campo, de modo que comecemos sempre pela primeira cava com sementes e, ao chegar à última, voltamos à primeira, indefinidamente. Será possível prever quantas sementes haverá em alguma cava após certo número de jogadas? E quantas sementes haverá na 6ª cava na milésima jogada?".

A repetição desse comando, remete à seguinte sequência (se iniciarmos a semeadura sempre pela primeira cava com sementes)[29]:

444444; 055554; 106665; 016665; 007665; 111876; 021876; 002976; 000'10'86; 2211'10'8; 0321'10'8; 0032'11'8; 0003'12'9; 1000'13''10'; 0100'13''10'; 0010'13''10'; 0001'13''10'; 0000'14''10'; 32222'13'; 03332'13'; 00443'13'; 10054'14'; 01054'14'; 00154'14'; 00064'14'; 11115'15'; 02115'15'; 00225'15'; 00036'15'; 10007'16'; 01007'16'; 00107'16'; 00017'16'; 00008'16'; 21111'18'; 02211'18'; 00321'18'; 00032'19'; 10003'20'; 01003'20'; 00103'20'; 00013'20'; 00004'20'; 11100'21'; 02100'21'; 00210'21'; 00021'21'; 00002'22'; 10000'23'; 01000'23'; 00100'23'; 00010'23'; 00001'23'; 00000'24'...

Podemos notar que a próxima jogada dessa sequência distribuirá todas as 24 sementes que estão concentradas na última cava, igualmente, entre todas as cavas. Com isso, a configuração seguinte voltará a ser igual à inicial em que cada cava possui 4 sementes. Depois de muita discussão em grupo e após alguns ensaios com tabuleiro, Delta disse:

> [...] então, professor, eu achei um padrão... olha só aqui, oh... se você repetir sempre desse jeito, chega uma hora que começa a repetir... oh... se eu começo por aqui [apontando com o mouse para a primeira cava] vou jogar nas seguintes... vai deixar essa [apontando a cava onde iniciou o movimento] vazia e colocar uma a mais nas outras e assim segue... depois pego as daqui [primeira cava com sementes, segunda do tabuleiro] e fica zero... é como se eu fosse empurrando as sementes para a última cava... vai ter uma hora que aqui [apontando a primeira cava novamente] vai ter 4 de novo, e assim para todas as outras. Então, eu posso saber qualquer quantidade a partir dessas primeiras. (DELTA, Encontro 3, 2021)

De fato, são 54 sequências inéditas e uma repetição na 55ª. Isso quer dizer que as configurações para a jogada 1 é igual à configuração para a jogada 55, assim como para a 110, a 165, a 220... e assim por diante. Quantos grupos de 55 cabem em 1000? Cabem 18, completos... O resto dessa divisão

---

[29] Os números representam a quantidade de sementes em cada cava. Os valores entre aspas simples e destacados em vermelho, remetem a quantidades representadas por dois algarismos na mesma cava.

(1000 por 55) é 10, logo, a configuração na milésima jogada é idêntica à da décima jogada, ou seja: 2211’10’8. Com isso, pode-se perguntar qual a quantidade de sementes em qualquer cava, nessa milésima rodada.

O sentido de Delta remeteu à ideia de repetição de padrões em diálogo direto com os sentidos já indiciados por Alfa e Beta anteriormente, e em superação à ideia inicial de que infinito é o que não acaba, já que está mais próxima daquela ideia, já percebida por Alfa, de um conceito de infinito relacionado a um padrão que se repete para *sempre*.

A percepção de Delta também dialoga diretamente com outro conceito que é importante nos estudos da Geometria Fractal: a autossemelhança, como veremos a seguir.

4.1.2 Episódio 2: padrões, repetições e autossemelhança

Como vimos no subitem 2.3, a autossemelhança está diretamente relacionada à ideia de repetição de padrões e ao conceito de infinito. De modo bastante sintético, a autossemelhança remete à repetição de certa característica em um processo recursivo. Lembramos que um processo recursivo é aquele em que cada evento é igual ao anterior, podendo variar em algum aspecto. Por exemplo: no caso do pentágono construído na oficina 1, ao traçar as diagonais encontramos outro pentágono, idêntico ao anterior em forma, mas com medidas proporcionais. Se traçarmos as diagonais deste outro triângulo, obteremos outro, novamente idêntico em forma, mas com lados proporcionais a este último. Todavia, podemos estabelecer relação de proporcionalidade também em relação ao primeiro. A autossemelhança é a possibilidade de estabelecermos relação de identidade entre qualquer etapa de um processo recursivo e a primeira (ou primeiras - finitas) etapa.

Retomemos à cena em que Delta percebe o padrão no jogo realizado no tabuleiro de Mancala. O que Delta fez ali foi perceber um padrão de repetição *finito* em um processo que pode se repetir infinitamente. Ao afirmar que “eu posso saber qualquer quantidade a partir dessas primeiras” (DELTA, Encontro 3, 2021), ele dá indícios de um movimento dos sentidos que remetem à constituição do conceito de autossemelhança, ou seja, cada conjunto de 54 movimentos é semelhante ao primeiro. São semelhantes entre si. São autossemelhantes.

A síntese a respeito do conceito de autossemelhança, realizado ao final da terceira oficina (a que tratou da Torre de Hanói e do Mancala) foi posta em movimento novamente no encontro seguinte, o quarto, intitulado *“Autossemelhança e complexidade infinita em Fractais Africanos”*. Foi realizada neste encontro uma oficina que destacava a reprodução artesanal de elementos da Arte e da Cultura Africana sintetizados em pulseiras e tecidos. Nesse encontro, os participantes foram convidados a produzir uma pulseira em um contexto de artesanato e reconhecimento de estampas relacionadas a Culturas Africanas. A produção consistia na construção de um *tear* simples, utilizando-se papelão, e no entrelaçamento de fios. No mesmo contexto, também houve conversas a respeito das tranças, que são, como já indicamos neste texto, no subitem 3.2, muito importantes na constituição da identidade negra e na cultura africana. A relação diz respeito à constatação de que os entrelaçamentos de fios realizados no tear se aproximam sensivelmente dos entrelaçamentos que são realizados na confecção de tranças.

Foi nesse contexto que Gama identificou a presença da autossemelhança. Ela afirma:

> Eu notei aqui aquela ideia que a gente viu na aula passada... autossemelhança.. eu acho que era o nome, né? Oh... porque as formas ficam se repetindo... eu acho que é porque o movimento é circular e forma uma sequência que vai se repetindo *também*... (GAMA, Encontro 4, 2021)

Quando Gama usa o termo “também”, ela está fazendo referência à constatação de Delta, no encontro anterior, de que as sequências de quantidades de sementes no Mancala se repetem. No caso do trançado da pulseira, como o tear tem a forma circular e tem marcações em volta, ao realizar o trançado[30], as sequências numéricas obtidas se repetem de tempos em tempos, ou seja, a complexidade infinita está presente e dá origem à autossemelhança. Gama percebe e manifesta-se atribuindo relação entre esses dois conceitos, dando indícios de um movimento de seus sentidos pessoais na direção de um significado em que o conceito de infinito dá origem a outras ideias e conceitos complexos, como a autossemelhança.

Gama já tinha dado um indício de movimento de sentidos em direção à compreensão do conceito de autossemelhança na oficina 2, *“Generalizações a*

[30] As imagens do tear e instruções de trançado estão disponíveis nos apêndices deste trabalho.

partir do triângulo de Sierpinski". Naquela oficina, buscamos relacionar padrões reconheciodos em estampas de tecidos africanos com formas geométricas, em especial o triângulo de Sierpinski. A oficina foi desenvolvida em torno de algumas discussões a partir da observação do tecido de Kentê.

> Kente é o tecido mais apreciado entre todos os têxteis africanos, adotado mundialmente em toda a diáspora desde os anos sessenta, como símbolo de panafricanismo e identidade afrocêntrica. Além disso, continua a ter a mesma importância na vida cultural dos Axantes, seus criadores. A história do Kente está mesclada com a do Império Axante e sua corte real baseada em Kumasi, dentro da zona florestal de Gana. Um dos primeiros relatos da seda real dos Axantes data de 1730 quando um homem foi enviado para a corte do rei Opukuware por um comerciante Dinamarquês notando que o rei usava tafetá de seda e tecidos de várias cores. O artista distinguiu lã, fios de seda, e algodão. (ZEIGER, 2012, s/p.)

***Figura 18**: Tecido Kentê*

Fonte: http://caludio-zeiger.blogspot.com/2012/03/o-tecido-kente-dos-axantes-de-gana.html

Após a leitura do texto que apresentava o contexto histórico e cultural relacionado ao tecido, a pesquisadora realizou algumas provocações a respeito das observações dos sujeitos ao analisar uma imagem do tecido. Gama indicou então que conhecia um problema tradicional que consiste em contar a quantidade de triângulos que se pode "ver" na figura:

> Tem uma questão de Matemática que traz uma figura quase igual a essa. É uma questão que fala pra contar os triângulos que podemos ver... é uma pegadinha, na verdade, né? Porque muita gente não enxerga todos os triângulos porque tem uns dentro dos outros... aí a pessoa se perde... (GAMA, Encontro 2, 2021)

Entendemos que seja um indício inicial da ideia de autossemelhança, a indicação da dificuldade decorrente da existência de "uns [triângulos] dentro dos outros". A dificuldade atribuída por Gama, de modo genérico, "às pessoas" decorre justamente da omissão, que geralmente ocorre nos currículos escolares, em relação aos estudos de processos recorrentes, infinito e, principalmente nesse caso, autossemelhança.

Considerando esse entendimento – de que os sentidos dos participantes e das participantes estaria se movimentando em direção ao significado social de autossemelhança – são apresentados aos participantes dois recortes do tecido Kentê, dessa vez indicando duas partes em que se verificam padrões geométricos baseados em triângulos.

***Figura 19**: Padrões triangulares no tecido Kentê*

Fonte: Recorte da imagem do tecido de Kentê

A pesquisadora, então, propõe uma análise dos recortes a fim de verificar o reconhecimento do padrão triangular, de modo a denotar que tal padrão possa remeter às ideias de autossemelhança e complexidade infinita. A proposta é que cada um apresente o protocolo de construção (passo a passo da construção geométrica) de um dos dois padrões propostos na Figura 19.

> Eu dei três coisas: o compasso, a régua e o lápis... tá?... então você pensa que vai escrever uma carta para um amigo... "olha amigo: eu tenho um papel... eu tenho compasso... régua e o lápis... e olha, amigo, para eu desenhar este padrão eu tenho que fazer [o quê?]… (PESQUISADORA, Encontro 2, 2021)

Diante desta proposta, os participantes começaram a discutir em pequenos subgrupos e trouxeram algumas considerações, das quais destacamos as seguintes:

> O primeiro eu não dei conta de descrever porque, por mais que você falou que é triângulo, eu não consegui... eu tentei pedindo para a pessoa desenhar a margem da folha... e tentei dividir a folha na metade... eu não consegui pensar no uso do compasso! Então, eu não consegui... porque parece que tem um **padrão** até dá a distância do amarelo com o vermelho... então, eu não consegui mesmo. Aí, na segunda, eu fiz assim... eu vou ler porque está um pouco confuso...

> eu falei para ele pegar uma folha A4 e colocá-la na vertical e fazer uma base de 1 cm em baixo e de 3 cm em cima, ai agora colocar a folha na horizontal e desenhar quadriláteros na diagonal... tipo assim [mostrando a folha para a câmera]... fazer uma diagonal na frente da folha e agora fazer quadriláteros que se encontre nesta diagonal... e depois terminar de preencher a folha... eu falei assim: agora que você já fez o quadrilátero, dívida ele de uma maneira que forme 2 triângulos e observe que os vértices de cada triângulo deverão se encontrar com o triângulo vizinho, ou seja, cada triângulo terá em cada vértice uma conexão com outro triângulo e por fim se possível colorir... e é isso. (ALFA, Encontro 2, 2021)

A pesquisadora, buscando verificar a compreensão sobre a alternância entre triângulos que caracteriza o padrão, indagou: “só uma perguntinha: colorir seria de uma vez só?” (PESQUISADORA, Encontro 2, 2021). Ao que Alfa responde:

> Ah não... [por isso] eu falei: “se possível”. É porque eu não consegui pensar em uma palavra [melhor para descrever a alternância], mas eu pensei: “cada um [triângulo] uma cor... eu coloquei preto, verde e amarelo... que é (sic) as cores que estão... é tipo um triângulo de uma cor, o outro de outra, um triângulo de uma cor o outro de outra, um triângulo de uma cor o outro de outra [e assim por diante]. (ALFA, Encontro 2, 2021)

De fato, a resposta de Alfa à indagação da pesquisadora é um indício de que ela percebeu o padrão presente na figura e, ainda que não dominasse o protocolo para a construção dos triângulos, ela pôde perceber que este padrão deveria ser reproduzido indefinidamente para a produção da estampa. A discussão volta-se então para a primeira estampa (à esquerda na Figura 19):

> É... o do esquerdo eu tive também bastante dificuldade de escrever, né? Então... eu acabei, na verdade... a carta foi bem curta eu só falei que são vários triângulos isósceles um dentro do outro e colorido de dentro para fora e alternando primeiro vermelho depois amarelo até preencher toda a folha... éh éh éh... também descrevi que parece que são pequenos retângulos que formam os triângulos... [continua fazendo a descrição sobre a estampa à direita]. (DELTA, Encontro 2, 2021)

De maneira similar, Gama destaca o seguinte:

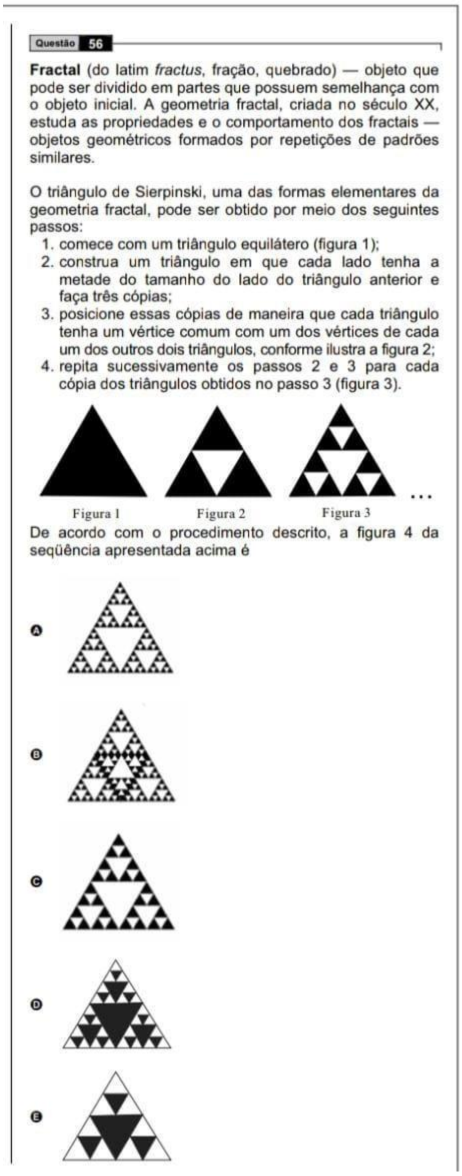
> Eu vou falar o que eu pensei: na primeira imagem [à esquerda] se a gente pensar em triângulos... tipo: estava vendo este triangulozinho menor... amarelo... parece que tem um triângulo menor, dentro dele... aí você divide a base dele em três retângulos... seria: 2 retângulos amarelos e um vermelho no meio... e assim por diante... tipo: retângulos onde o lado e a base tenha as mesmas medidas – eu estou considerando que esses quadradinhos amarelos tenham a mesma medida – aí vai diminuindo... começa com três triângulos na base, depois dois, um e vai diminuindo... e o padrão seria mais ou

menos esse: eu teria um triângulo maior vermelho e começa com um... deixa eu ver... 3 retângulos vermelhos e um amarelo nesta ordem... [segue seu relato tratando da figura à direita]. (GAMA, Encontro 2, 2021)

Nas considerações de Delta e de Gama, vai ficando evidente que os sentidos pessoais deles vão se aproximando, assim como o de Alfa, como indicamos anteriormente, dos significados sociais de autossemelhança e complexidade infinita a partir das observações mediadas do tecido Kentê. Seria então razoável concluir que o contexto da análise da Arte Africana sintetizada no tecido suscitou um movimento que colocou em evidência necessidades ligadas ao pensamento geométrico – para além da importância de reconhecer e apresentar protocolos de construção, o que constitui algumas das habilidades presentes na BNCC – mas que culminam na compreensão de ideias que superam a própria Geometria Euclidiana.

A fim de verificar a aproximação entre os sentidos pessoais dos participantes e os significados sociais relacionados à Geometria Fractal, após a síntese que formalizou no grupo os conceitos de autossemelhança e complexidade infinita, propusemos a comparação entre dois movimentos de aprendizagem possíveis: um que se aproximasse do percurso que havíamos acabado de percorrer, a partir do tecido Kentê, e outro tradicional em que o professor apresenta a definição de autossemelhança e complexidade infinita e propõe a resolução de exercícios, dentre eles uma questão do ENEM (BRASIL, 2008b) que foi também apresentada aos participantes e está reproduzida na figura a seguir.

***Figura 20**: Triângulo de Sierpinski em questão do ENEM*



Questão 56

Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

Figura 1 Figura 2 Figura 3 ...

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da seqüência apresentada acima é

A

B

C

D

E

Fonte: BRASIL (2008b) (ENEM)

O protocolo de construção do triângulo de Sierpinski está descrito na questão. O objetivo, no nosso movimento formativo, era o de que os participantes percebessem a semelhança entre o triângulo de Sierpinski e a estampa da direita do tecido de Kentê. Essa semelhança remete justamente ao fato de que o protocolo de construção de ambas conceitua a autossemelhança e a complexidade infinita. No caso do triângulo de Sierpinski a discussão se dá no reconhecimento da Dimensão Fractal dado o triângulo construído – cada “retirada” de triângulo faz a área total tender a zero (o que ocorre apenas em linhas, ou seja, formas de dimensão 1), mas o triângulo (dimensão 2) nunca terá dimensão 1, o que indica que a dimensão do triângulo de Sierpinski (com infinitas retiradas) é um número entre 1 e 2 (sabemos que é próximo de 1,6), o que não é compreendido no contexto da Geometria Euclidiana.

Os participantes realizaram esta discussão a partir do tecido Kentê, o que garantiu que a autossemelhança e a complexidade infinita fossem percebidas, e não dadas a priori. Com isso, a ideia de que as retiradas de triângulos são equivalentes a um recorte no triângulo de Sierpinski e que infinitas retiradas fazem a área do triângulo tender a zero são consequências da análise. Nesse contexto, a compreensão da Dimensão Fractal se tornou mais próxima da realidade dos participantes do que a apresentação direta da definição e protocolos de construção, o que era nosso objetivo.

Pudemos perceber, a partir da colocação dos sujeitos durante os encontros, que o conceito de autossemelhança foi sendo apropriado por eles em um processo que podemos classificar como *significativo*, ou seja, em que os sentidos que eles próprios foram atribuindo ao que estavam vivenciando foram se aproximando dos significados sociais e humanos que foram, historicamente, sendo atribuídos aos conceitos.

4.1.3 Síntese do Isolado 1

O Isolado 1 pode ser sintetizado pela superação da contradição entre a ênfase e a exclusividade, verificada nos currículos, das práticas de ensino relacionadas à Geometria Euclidiana e o reconhecimento da importância de se conhecer, para compreender e atuar no mundo, outros conceitos mais ligados a Geometrias Não-Euclidianas. Essa superação fica potencializada quando trazemos para o contexto dos estudos elementos da Cultura Africana que, à primeira vista, em análises superficiais, podem nem ter relação com conceitos geométricos, mas o aprofundamento mostra estreita relação, sobretudo com os conceitos de infinito e de autossemelhança.

Especificamente, os movimentos dos sentidos dos estudantes da Licenciatura analisados nos mostram que, mesmo em contextos iniciados por estudos pertencentes a princípio à Geometria Euclidiana, a mediação pode promover reflexões das quais emergem os conceitos de complexidade infinita e de autossemelhança. O que verificamos é que os sentidos iniciais dos sujeitos da pesquisa, bastante próximos a princípio dos significados produzidos no contexto dos estudos eurocêntricos da Geometria Euclidiana, começam a se movimentar na direção de se aproximarem de significados produzidos em uma Cultura Antirracista, especialmente em um contexto afrocêntrico, em que as ideias de autossemelhança e infinito são mais evidentes do que no contexto da Geometria Euclidiana.

Concluímos, considerando o que mostramos no Isolado 1, que, a partir da proposta de enfatizar elementos da Cultura Africana para estudos de Geometria, desencadeiam-se necessidades que levam os sujeitos a aproximar seus sentidos pessoais iniciais de significados sociais mais abrangentes do que seja a Geometria. Nesse processo, os conceitos de complexidade infinita e de autossemelhança são apropriados de forma mais profunda e complexa em suas relações com o mundo, em um movimento que chamamos de *significação*, pois produz resultados *significativos*, ou seja, resultados em que os sentidos dos sujeitos estão muito próximos dos significados sociais.

4.2 Isolado 2: sentidos e significados produzidos a partir da Cultura Africana

Como indicamos no capítulo 2, os documentos curriculares da educação básica, de modo geral, e de Matemática, em particular, estão estruturados em uma perspectiva eurocêntrica. Com isso, geramos um conflito – uma contradição entre o discurso que diz reconhecer a importância e até a obrigatoriedade dos estudos da História e da Cultura Africana e as práticas de ensino que enfatizam as Produções Eurocêntricas e até excluem ou relativizam a importância das Produções não Européias, especialmente as Africanas, no contexto do racismo estrutural.

Considerando este cenário, verificamos movimentos de sentidos dos sujeitos da nossa pesquisa que se direcionaram à superação dessa contradição, em favor de uma formação que desenvolve compreensões matemáticas e potencializa a apropriação de conhecimentos em uma Perspectiva Afrocêntrica, Antirracista e Humanizadora. Enquanto no Isolado 1 focamos na verificação das potencialidades da Cultura Africana como desencadeadora de movimentos que tendem a superar as limitações da Geometria Euclidiana, neste isolado abrimos um pouco o leque para mostrar como tal perspectiva – que enfatiza a Cultura Africana – pode promover mudanças de sentidos sobre as práticas de ensino de Matemática para o desenvolvimento das Relações Étnico-Raciais e o combate ao racismo.

4.2.1 Episódio 1: por que não aprendi desse jeito?

Neste episódio, destacamos indícios de movimentos de sentidos dos sujeitos quando passam a questionar as formas pelas quais a Matemática lhes foi apresentada e a razão pelas quais as produções não europeias e, mais propriamente, as africanas são apresentadas como tal enquanto as produções europeias são, geralmente, explicitadas como criações dos europeus.

A primeira cena decorre de uma provocação da pesquisadora a respeito do discurso de que a Geometria Euclidiana explicaria o mundo. No contexto das discussões a partir dessa provocação, já no primeiro encontro, Beta traz a seguinte consideração:

> [...] a BNCC enfoca tanto a Geometria Euclidiana que não dá a devida relevância à Geometria Não-Euclidiana e, às vezes, nem cita... eu lembro que tem uma habilidade do ensino médio que fala dos Fractais, mas é só para dizer que tá lá, mas é interessante a gente analisar que a Geometria Euclidiana é limitada, sabe?... não resolve os problemas do cotidiano. Um exemplo que nosso grupo trouxe foi o GPS, que a distância entre dois pontos no globo, nas esferas, entre dois países não vai ser uma reta vai ser um arco... então... tipo isso... é importante trazer para o aluno, sabe? (Beta, Encontro 1, 2021)

Ainda no contexto da mesma discussão, Alfa complementa:

> [...] eu também acho que a Geometria Euclidiana... ela está limitada a formas perfeitas... tipo, na Geometria Não-Euclidiana no exemplo de um triângulo, né? que quando foge da soma de 180 graus dos ângulos, então, a gente tem essa ideia da Geometria Euclidiana das formas sempre presentes no nosso dia a dia na natureza, mas sempre perfeitas em linhas retas... éh, eu também dei um exemplo da linha do equador, que a gente não consegue traçar no globo terrestre [uma linha] paralela à linha do equador e... enfim, acho que é isso. (Alfa, Encontro 1, 2021)

Entendemos que tais considerações, apresentadas já no início do movimento formativo, são importantes indícios de sentidos pessoais iniciais de Alfa e Beta, bem como de Gama apresentados a seguir, a respeito de a Geometria ser suficiente, ainda que seja necessária, para compreender geometricamente o mundo ao nosso redor. Gama diz depois de provocada por um questionamento da pesquisadora:

> [...] eu ia falar o que eu li... das vilas, éh, no norte de algum país... é da África, acho que talvez seja Moçambique ou Angola... eu posso estar bem errada, gente, desculpa... mas tem as vilas que elas têm uma relação de geometria não euclidiana, né? A construção delas é muito bonita... assim, bem diferente [das nossas]... éh, eu vou até mandar um link aqui [no chat] para vocês... para vocês verem as fotos... só para vocês verem que é uma construção humana e não é aqui... do homem branco, né?... é uma coisa muito antiga, né? E muito bonita. (GAMA, Encontro 1, 2021)

Ao acessar o link compartilhado por Gama nessa ocasião, somos levados a uma página que trata da Matemática no Continente Africano, onde encontramos uma imagem aérea de um povoado em Labbezanga, no Mali, país localizado na África ocidental.

***Figura 21**: Povoado em Labbezanga – Mali*

Fonte: Disponível em https://www.matematicaefacil.com.br/2016/07/matematica-continente-africano-fractais.html. Acesso em 03/08/2021.

Os sentidos iniciais dos sujeitos dão indícios de compreensões, segundo as quais a Geometria Euclidiana por si só não é suficiente para explicar o mundo à nossa volta, bem como denunciar que, apesar disso, a ênfase dos currículos de Matemática recai sobre essa Geometria limitante das formas de estar e atuar no mundo.

Já na oficina 2, que já discutimos em parte no subitem 4.1.2, na qual tratamos de generalizações no triângulo de Sierpinski desencadeadas a partir das discussões a partir de reflexões sobre o tecido de Kentê. A partir da observação de uma imagem de um tecido, Beta fez a seguinte consideração:

> Éh... eu vejo a organização... Essa questão das cores que a Alfa levantou, né?... Que chama a atenção... mas você vê uma simetria uma organização. É tudo muito organizadinho... tudo lindo de se ver...

> dá impressão que é algo que já foi pensado antes... foi arquitetado antes, teve toda uma problemática levantada anterior... então acho bem interessante. (BETA, Encontro 2, 2021)

Gama também apresenta suas considerações:

> [...] éh, tem uma parte do tecido ali que é verde, amarela e preta que são as cores principais da bandeira da África [do Sul] e ela tem, tipo uma forma meio que padrão... padronizada... tipo: você consegue perceber como funciona [o padrão]. (GAMA, Encontro 2, 2021)

Importante destacar que as cores foram o primeiro elemento do tecido Kentê que chamou a atenção dos participantes. Gama, no entanto, foi além e indicou a percepção de um padrão que indicaria "como funciona". Com isso, ela parece estar indicando que o padrão percebido seria relevante para a compreensão e reprodução do padrão geométrico presente no tecido.

Essa indicação corrobora a indicação de Beta que indica também a percepção de um padrão, percepção esta sintetizada no termo "organizadinho", quando indica sua compreensão de que há necessidade de um planejamento para a confecção do tecido, mas indica também a percepção de um padrão que, se repetido indefinidamente, reproduz a estampa identificada.

Nesse contexto, podemos verificar que o movimento dos sentidos pessoais dos licenciandos se aproxima, novamente, do conceito de autossemelhança. Mas, mais do que isso, as relações que os sujeitos – professores em processo de formação inicial, lembremos – vão estabelecendo movimenta seus sentidos na direção de uma análise de um importante elemento da Cultura Afrocêntrica: a Arte.

As relações que estão sendo sugeridas mostram o reconhecimento de que a composição artística presente no tecido não é aleatória ou casuística, mas intencional e harmônica em torno de uma composição padronizada e geométrica. Mas não da Geometria tradicional – a Euclidiana – mas de uma Geometria da qual emergem novos conceitos e novas aprendizagens, para além daquelas verificadas imediatamente.

Mais adiante no movimento formativo, já no quarto encontro, enquanto discutia-se já de posse de compreensões significavas a respeito do que seria a autossemelhança e a complexidade infinita, Alfa apresenta um sutil questionamento, mas que revela para nossa pesquisa um movimento de sentidos fundamental. Ela pergunta – à pesquisadora, mas também aos demais colegas do grupo: “por que não aprendemos na faculdade desse jeito?”.

Essa questão é reveladora de um sentido que não apenas questiona o eurocentrismo verificado nas práticas de ensino de Geometria na educação básica, mas que também coloca em movimento a necessidade de mudanças nessas práticas em favor de propostas formativas que enalteçam a Cultura Africana e Afrodiaspórica e isso, porque a pergunta é feita em um contexto de discussão de práticas de ensino que tratam não apenas de Geometria, mas de quem produz e onde a Geometria está presente.

Provocada pela pergunta, a pesquisadora devolve o questionamento, indagando como foi a aprendizagem de que Alfa se queixa, ao que ela responde:

> Ah, do jeito desinteressante de sempre, sabe?... cheio de fórmulas... e de regras... ah, sei lá, sabe?... a gente faz aqui umas coisas bacanas, que se faz no dia a dia na África... bonitas... lá as tranças são parte deles... tipo, na prática... e sem se preocupar com fórmulas... mas a gente pode ver a geometria que tem e usar na escola... mas por que a gente não usa?... eu acho que se fosse assim na faculdade a gente entenderia melhor e poderia ensinar melhor para os alunos. (ALFA, Encontro 4, 2021)

Os sentidos de Alfa indicam uma compreensão de que as práticas de ensino que ela vivenciou não atendem à necessidade dela de dialogar com movimentos em que a Matemática é construída, significada, e não apresentada como algo pronto. Essa compreensão é importante, porque indicia que a cultura escolar de tratar a Matemática em uma perspectiva eurocêntrica é potencialmente nociva para o desenvolvimento de uma formação humanizadora em que o conhecimento é produzido em diversos conceitos e culturas.

Uma indicação de Gama que vai ao encontro desse sentido manifestado por Alfa ocorre no contexto do encontro 3, quando discutíamos as sequências numéricas no tabuleiro de Mancala:

> [...] mas se a gente não colocar a cultura africana, que nem tem nos jogos, éh, para (sic) a sala de aula, os alunos nunca vão saber... se a gente fica ensinando só fórmulas e coisas prontas... que nunca vai aparecer na vida deles... aí eles nunca vão saber que tem matemática em outros lugares, como na África... por isso que eu acho que os jogos são importantes... e o Mancala também [é importante]... por causa disso. (GAMA, Encontro 3, 2021)

Mais uma vez, a ideia de que a Cultura Africana precisa estar presente nas práticas escolares em um processo de significação do conhecimento, ou seja, em movimentos nos quais os sentidos de quem aprende se aproximem de significados produzidos pela humanidade e já apropriados por quem ensina.

4.2.2 Síntese do Isolado 2

Como síntese deste Isolado 2, entendemos que os sentidos dos sujeitos da pesquisa se movimentaram em direação a um significado no qual o contexto da produção do conhecimento é humano e não apenas europeu. Os sujeitos manifestaram compreensões que colocam em cheque as formas como os conhecimentos matemáticos são ensinados e até como são propostos nos currículos, enfatizando a necessidade de superar tais práticas, de modo que a Perspectiva Afrocêntrica se configura como uma importantíssima forma de fazer essa mudança.

Ao questionar as formas como as práticas de ensino de Matemática são efetivadas, segundo suas próprias compreensões, os sujeitos da pesquisa – futuros professores e professoras de Matemática em formação inicial para a docência – dão indícios de que poderão realizar em suas práticas futuras ações e atividades que tendem a superar a exclusividade eurocêntrica verificada no currículo de Matemática, em favor de práticas de ensino voltadas para o desenvolvimento das Relações Étnico-Raciais e com potencialidade para a superação do racismo que se configura nas práticas epistemicidas que verificamos em nossos estudos.

Conclusão

Neste trabalho buscamos mostrar a importância de superar práticas de ensino de Matemática que estão pautadas em uma premissa que retira de povos não europeus, como os povos africanos, seu protagonismo nos processos de produção de cultura e conhecimento matemático. As práticas tradicionais de ensino de Matemática e as premissas impregnadas nos documentos curriculares oficiais tendem a depositar em personagens históricos e povos europeus, exclusivamente, todos os créditos pela suposta criação da Matemática que ensinamos nas escolas. É essa cultura escolar que colocamos em discussão em nossa pesquisa e que, aproximando nossa análise das ideias de Carneiro (2005), chamamos de epistemicídio, defendendo a necessidade de sua superação em todos os aspectos da educação escolar, mas em especial aqui durante a formação inicial de professores e professoras de Matemática.

Deparamo-nos com aspectos que nos levam à necessidade de superação da exclusividade da aprendizagem da Geometria Euclidiana nas práticas escolares, da tradição da organização axiomática e eurocêntrica do currículo de Matemática, enquanto apontamos para diversos elementos da Cultura Africana e Afrodiaspórica que estão presentes no currículo escolar. Evidenciamos, no decorrer da análise que realizamos, quais podem ser as contribuições de professoras e professores de Matemática para a construção de uma Educação Antirracista a partir das práticas de ensino de Matemática. O Brasil é um país fora da África cuja população é, em sua maioria, formada por descendentes de africanos, o quais têm suas histórias marcadas pela escravização de seus antepassados, pelas lutas em busca de liberdade, de identidade e de equidade. Essas lutas já alcançaram vitórias, mas ainda há longas batalhas a travar. Algumas dessas batalhas estão certamente no contexto da educação, como um todo, e da Educação Matemática, em particular.

Provocamos a materialização de movimentos formativos para professores e professoras em formação inicial para a docência de Matemática. A formação objetivou (alcançou) importantes discussões a respeito da Geometria atribuída ao grego (europeu) Euclides e de como ela pode ser limitante das formas de compreender e atuar no mundo, sobretudo quando é apresentada como tal a professores em processos formativos.

Demonstramos neste trabalho que a Geometria de Euclides, sozinha, não explica o mundo, mas apenas uma parte dele, sobretudo aquela parte que foi intencionalmente construída tendo a Geometria Euclidiana como base, o que remete à exclusividade do eurocentrismo, que estamos denunciando, presente na cultura escolar de modo geral e na Educação Matemática em particular. A superação da contradição entre o discurso e as práticas escolares pode ser alcançada com movimentos formativos nos quais professores, estudantes e demais atores envolvidos nos processos educacionais se comprometam com a valorização do conhecimento produzido por toda a humanidade e não apenas por uma parte dela.

Verificamos também que a formação de professores em uma perspectiva eurocêntrica potencializa a manutenção do *status quo*, em que a Matemática é compreendida como “a ciência dos inteligentes” e é mostrada como uma produção de seres iluminados que são reproduzidos no imaginário popular sempre como homens, europeus e brancos.

Para apontar para as limitações da Geometria Euclidiana optamos por um recorte que colocou em evidência uma Geometria Não-Euclidiana, que é a Geometria Fractal. Especificamente, destacamos os conceitos de infinito e de autossemelhança. Ainda que a ideia geral de infinito esteja presente também na Geometria Euclidiana, o que verificamos foram sentidos iniciais bastante próximos de uma ideia limitada de que infinito seria aquilo “que não tem fim” e que prejudica a compreensão de outros fenômenos e conceitos na Matemática. Se, por exemplo, dizemos que uma reta é *infinita*, é fato que ela não tem fim, mas em termos conceituais, quais são as implicações disso, ou seja, qual o *significado* que está impregnado no termo *infinito* que faz com que a ideia de *algo sem fim* não seja suficiente para compreender adequadamente o conceito de reta – ainda que tal conceito tenha sido apresentado por Euclides como sendo *intuitivo*?

O infinito compreendido como um conceito que confere *significado* a algo, como uma forma geométrica, é uma ideia que não está presente na Geometria Euclidiana, mas é fundamental para a compreensão do mundo, como também da Geometria Fractal e de como essa Geometria ajuda a compreender o mundo à nossa volta. A Geometria Fractal está bastante presente em representações organizacionais, artísticas, arquitetônicas e culturais de povos africanos, enquanto povos ocidentais, europeus ou colonizados pelos europeus, depositam suas estruturas fundamentais, sua arquitetura, sua cultura geométrica na perspectiva que passou à história sob a alcunha de *euclidianas.* Ao promover processos formativos que enaltecem a Geometria Fractal *no contexto da Cultura Africana e Afrodiaspórica*, estamos materializando possíveis sínteses que colocam em evidência a produção de matemáticas para além daquela produzida na Europa. Ao adotarmos uma perspectiva afrocêntrica, por meio das propriedades da Geometria Fractal em elementos da Cultura Africana, estamos contribuindo para a constituição de uma cultura *antiepistemicida* e *antirracista*.

Finalizando este trabalho com resultados obtidos no ciclo de oficinas, alcançamos percepção de que os sentidos dos licenciandos se movimentaram em direção à compreensão sobre a importância de promover uma Educação Matemática voltada ao desenvolvimento das Relações Étnico-Raciais e comprometida com formações antirracistas e humanizadoras. Nossa convicção de que tal objetivo foi alcançado pode ser sintetizada nos movimentos dos sentidos dos quatro sujeitos de nossa pesquisa.

Os sentidos iniciais de Alfa, reconhecidos a partir de indícios presentes nas suas manifestações nos primeiros encontros, apontam para uma compreensão de que a Geometria era reconhecida por ela como sendo – em suas palavras – *desinteressante, chata*. Essa compreensão se devia, principalmente à abordagem axiomática, cheia de regras e com uma estrutura lógica que não movimentava seus sentidos na direção dos significados daquilo que ela mesma estava fazendo. Esses sentidos iniciais nos permitem verificar que os movimentos formativos que Alfa experimentou, durante a educação básica e mesmo na graduação, culminaram em uma formação que, no Materialismo Histórico Dialético, podemos classificar como *alienada*, ou seja, ela estava afastada da – alheia à – propriedade intelectual daquilo que ela mesma produzia.

A superação da alienação só pode se ocorrer por meio da conscientização deste estado alienado. Alfa encontra essa conscietização e dá indício a novo movimento quando afirma que “tinha tantas formas de eu aprender Geometria na faculdade, né? E eu aprendi daquele jeito chato”. O movimento dos sentidos de Alfa em direção a significados que retiram da Geometria o que ela mesma definiu como “chatice” é desencadeado por situações que colocaram em destaque o conceito de infinito, que vai deixando de ser uma ideia apenas intuitiva (algo que não tem fim) e vai passando a incorporar outros sentidos, como aconteceu quando ela percebeu que, apesar de a área do pentagrama ser finita, havia “dentro” dele *infinitos* pentagramas semelhantes ao primeiro. Quando reconhece a autossemelhança e a complexidade infinita, Alfa reconhece que a Geometria que esteve presente em sua formação pregressa não dava conta das diversas compreensões de mundo que podem se apresentar a cada pessoa. Sua formação foi, portanto, *limitante* da formação integral do ser.

Quando Alfa afirma sua crença de que “se fosse assim na faculdade [com formações que valorizem a produção do conhecimento, inclusive em um contexto afrocêntrico], a gente entenderia tudo melhor e poderia ensinar melhor para os alunos”, ela dá indícios de sentidos finais segundo os quais a formação da qual participou no ciclo de oficinas movimentaram seus sentidos, que saíram de uma compreensão de que a Geometria seria *chata* e *desinteressante* em direção a sentidos segundo os quais suas práticas como professora de Matemática devem ser *significativas* para os estudantes, ou seja, terão a preocupação central de aproximar sentidos de significados e não de meramente apresentar as produções feitas por outros – como Euclides – para os alunos reproduzirem.

Por sua vez, Beta dá indícios de sentidos pessoais iniciais que dialogam com o reconhecimento a respeito da importância da presença da Cultura Africana e Afro-Brasileira nas práticas de ensino e afirma estar em busca, justamente, de alcançar melhores formas de fazer isso. Considerando a formação pregressa de Beta, ele já chega na formação de posse de conhecimentos sobre Geometria Euclidiana. Os movimentos dos sentidos de Beta parecem apontar na direção da aproximação entre o conhecimento teórico sobre Geometria e o conhecimento da Geometria em contextos mais gerais, aproximando-se de significados que reconhecem a Geometria Euclidiana como subconjunto de um conjunto maior.

Ao reconhecer que a Geometria Fractal também contribui para a compreensão do mundo e da Cultura, em especial a Africana, Beta passa a questionar – e se questionar – sobre as razões pelas quais os textos curriculares oficiais, como a BNCC, enfatizam tanto a Geometria Euclidiana, em detrimento de outras Geometrias Não-Euclidianas.

Ao que tudo indica, o movimento dos sentidos de Beta aponta na direção do reconhecimento da potencialidade de Geometrias Não-Euclidianas, sobretudo a Geometria Fractal, através dos conceitos de infinito e de autossemelhança, como elo capaz de estabelecer a ligação entre os conceitos estudados na escola, daquilo que representa um dos objetivos do processo de escolarização que é compreender e atuar sobre o mundo. Nesse reconhecimento, Beta assume a necessidade de destacar a produção não europeia do conhecimento matemático que parece satisfazer sua necessidade inicial de encontrar formas de organizar suas futuras práticas de ensino em favor de compreensões mais abrangentes do conhecimento e que valorizem as produções humanas, sobretudo as de povos não europeus.

Já Gama tem sentidos iniciais que apontam para uma limitação de seus conhecimentos determinada pela Geometria Euclidiana. Ela indicou, desde o início de nosso ciclo de oficinas, estar afeita aos estudos relacionados às Relações Étnico-Raciais e ser militante antirracista. Com esse perfil, Gama contribuiu sensivelmente para o desenvolvimento do ciclo de oficinas e manifestou indícios de movimentos de sentidos que apontam para o reconhecimento das potencialidades de conceitos, como a autossemelhança, para o desenvolvimento das práticas de ensino de Matemáticas em um Contexto Afrocêntrico, o que dialoga com os estudos que ela já vinha desenvolvendo.

Por fim, Delta dá indícios de um importante movimento de sentidos pessoais iniciais que apontam para a relação entre aspectos de sua formação que ele compreendia desde o início como importantes, mas que tratavam de modo dissociado. Delta indicou que reconhecia a importância dos estudos de Geometria – ele já estava atuando como professor da educação básica à época das oficinas – e também a importância da cultura "dentro" das aulas de Matemática. Todavia, essa cultura, pelo que pudemos inferir, era, a princípio, uma cultura eurocêntrica, em uma dimensão que parece estar relacionada aos sentidos, segundo os quais a Matemática deve ter contextos de aplicação "fora" da escola. A ideia era a de que, ao trazer "cultura" de "fora" da escola para “dentro” das aulas de Matemática, os alunos poderiam perceber que a Matemática está presente, de fato, em seus cotidianos, reconheceriam sua importância e passariam a se interessar por ela.

Esses sentidos se movimentam a partir de suas reflexões com os jogos, sobretudo o Mancala. Ao reconhecer os padrões presentes nos processos de resolução do Problema proposto, Delta não apenas encontra a solução, como também uma relação entre o contexto – que envolvia um elemento da Cultura Africana – e o conceito.

A superação reside no reconhecimento, por parte de Delta, de que tal reconhecimento não decorreu simplesmente da aplicação de seus conhecimentos previos sobre padrões, mas da reflexão em torno da necessidade presente no Problema, que colocou em diálogo uma situação concreta e o conceito em estudo. E, estando o contexto em diálogo com a Cultura Africana, ele passou a compreender de modo diferente o papel da cultura nas aulas de Matemática, passando de uma compreensão da cultura como oportunidade de aplicação do que já foi aprendido para a compreensão de que a cultura é elemento desencadeador da aprendizagem.

Concluímos este trabalho de pesquisa certos de que a Cultura Africana deve estar presente no cotidiano escolar como um todo, e nas aulas de matemática em particular. A partir do reconhecimento de tal possibilidade, emerge a tese de que, ao adotar práticas de ensino que tenham a Cultura Africana como elemento desencadeador – e não de mera aplicação – os professores e professoras de Matemática podem contribuir com a formação de uma sociedade mais justa, voltada para o estabelecimento e consolidação das Relações Étnico-Raciais em benefício de uma Educação Descolonizada e Antirracista.

Referências

ADICHIE, Chimamanda Ngozi. **O perigo de uma história única**. São Paulo: Companhia das Letras, 2019. 64 p.

ALMEIDA, Silvio. **Racismo estrutural**. São Paulo: Pólen, 2019. 264 p.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a geometria Fractal - para a sala de aula.** 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005

BICUDO, Irineu. **Introdução da obra Os Elementos.** In: EUCLIDES. Os elementos. São Paulo: editora Unesp, 2009. pp. 15-96.

BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática.** v. 3, 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

BRASIL. **Lei nº 11.645 de 10 março de 2008**. Disponível em: <http://presrepublica.jusbrasil.com.br/legislacao/93966/lei-11645-08.html>. Acesso em 30 de novembro de 2022.

BRASIL. **Lei nº 3.353 de 13 maio de 1888**. Disponível em: < https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/lim/lim3353.htm>. Acesso em 30 de novembro de 2022.

BRASIL. **Lei nº 9.394 de 20 dezembro de 1996**. Disponível em: < https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em 30 de novembro de 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).** 2008b.

BRASIL. **Lei n° 10.639 de 9 de janeiro de 2003**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/l10.639.htm>. Acesso em: 21 nov. 2022.

BRASIL. **Lei n° 12.288 de 20 de julho de 2010**. Disponível em: < https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2010/lei/l12288.htm>. Acesso em: 21 nov. 2022.

BRASIL. **Lei n° 12.711 de 29 de agosto de 2012**. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2012/lei/l12711.htm>. Acesso em: 21 nov. 2022.

CALDAS, Alan. **Valentia e linhagem: uma história da capoeira.** Curitiba: editora Appris, 2018. 229 p.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da matemática.** Lisboa: Fotogravura Nacional, 1951.

CARNEIRO, Aparecida Sueli. **A Construção do outro como não-ser como fundamento do ser**. 2005. 339 f. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. São Paulo, 2005.

CLEMENTE, Aline Ferraz. **Trança afro – a cultura do cabelo subalterno.** Trabalho de Conclusão de Curso (Projetos Culturais e Organização de Eventos). Universidade de São Paulo – USP (Escola de Comunicação e Artes): São Paulo, 2010. Disponível em: < http://celacc.eca.usp.br/sites/default/files/media/tcc/247-754-1-SM.pdf>. Acesso em 24 de fevereiro de 2022.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática da teoria à prática.** Papirus, São Paulo, 1996.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Sociedade, cultura, matemática e seu ensino, Educação e Pesquisa**. v. 31, n. 1, p. 99-120, São Paulo. 2005.

EGLASH, Ron. **African fractals: modern computing and indigenous design.** New Brunswick: Rutgers University Press, 2005b.

EGLASH, Ron. **Fractais africanos**. In: Scientific American Brasil - edição especial Etnomatemática. nº 11. São Paulo: Duetto Editorial, 2005a. pp. 66-67.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução e introdução: Irineu Bicudo. São Paulo: editora Unesp, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: editora UNICAMP, 2011.

FERNANDES, Jaqueline Aparecida. **Fractais: uma nova visão da Matemática.** Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Centro Universitário de Lavras (UNILAVRAS): Minas Gerais, 2017. Disponível em: < http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/MonografiaFractais.pdf>. Acesso em 24 de fevereiro de 2022.

FIGUEIREDO, Ângela. **Dialogando com os estudos de gênero e raça no**

Brasil. In: Sansone. L. ; Pinho, O. A. (orgs). *Raça: novas perspectivas antropológicas.* 2 ed. rev. Salvador: Associação Brasileira de Antropologia (EDUFBA), 2008. pp. 237-255.

FREIRE, Paulo. **Educação como prática da liberdade**. 17.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979.

GARDNER, Howard. **Inteligências Múltiplas: a teoria na prática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

GERDES, Paulus. **Etnogeometria: Cultura e o despertar do pensamento geométrico**. Belo Horizonte (Brasil), Boane (Moçambique): Instituto Superior de Tecnologias e de Gestão (ISTEG), 2012b.

GERDES, Paulus. **Ideias matemáticas originárias da África e a educação matemática no Brasil**. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife, UFPE, 2012a.

GERDES, Paulus. **Pitágoras africano: um estudo em cultura e educação matemática.** Centro moçambicano de pesquisa Etnomatemática. Maputo, 2011

GERDES, Paulus. **Vivendo a matemática: desenhos da África**. 3ª ed. São Paulo: Scipione, 1997. 64 p.

HALL, Stuart. **Da diáspora: identidades e mediações culturais**. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2003.

HAWKING, S. W. **Uma breve história do tempo: do "big bang" aos buracos negros**. Lisboa: Gradiva, 1994.

HUME, D. Of National Characters. In: Hume. D. **Essays: Moral, Political and Literary.** London: Green and Co., 1875.

KANT, I. **Observações sobre o sentimento do belo e do sublime**. Campinas: Papyrus, 1993.

LEAL, Rhaiane das Graças Mendonça. **Nacionalismo Militante: uma análise da correspondência de Monteiro Lobato e Arthur Neiva (1918-1942)**. Dissertação (Mestrado em História das Ciências e da Saúde). Fundação Oswaldo Cruz: Rio de Janeiro, 2020.

LEME DA SILVA, Maria Celia. **Abandono do ensino de geometria e o MMM: o que diz a História da educação matemática?**, 25 de fevereiro de 2021. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=tSjSH5iSrCw>. Acesso em 24 de fevereiro de 2022.

LEONTIEV, Alexei. **O desenvolvimento do psiquismo.** Lisboa: Horizonte, 1978. pp: 261-284.

LOBATO, M. **Carta a Sergio Buarque.** 1944. Disponível em: <https://ungareia.wordpress.com/2019/07/24/em-carta-inedita-monteiro-lobato-expoe-seu-racismo-a-machado-de-assis/>. Acesso em 20 de fevereiro de 2022.

LOVIS, Karla Aparecida; FRANCO, Valdeni Soliani. **As concepções de geometrias-não euclidianas de um grupo de professores de matemática da Educação Básica.** Bolema, Rio Claro, v.29, n.51, p.369-388, 2015.

MANDELBROT, Benoit. **Objectos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão** (Panorama da linguagem fractal). Lisboa: 1998. 298p.

MANDELBROT, Benoit. **Os Fractais e o Puzzle "Torre de Hanói"**. In: SANTOS, C. P.; NETO, J. P.; SILVA, J. N. *Coleção Jogos com História*. Lisboa: Edimpresa, 2007.

MARTINS, Edna. **Linguagem visual e panos africanos: uma abordagem gráfica a partir de estampas.** 2014. 163 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Arquitetura, Artes e Comunicação, 2014.

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides: a história da geometria das linhas paralelas ao hiperespaço.** São Paulo: Geração Editorial, 2004.

MOORE, Carlos. **Racismo e sociedade: novas bases epistemológicas para entender o racismo.** Belo Horizonte: Mazza edições, 2007.

MOURA, Manoel Oriosvaldo. **Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem.** Diálogo Educacional, Curitiba, v. 10, n. 29, pp. 205-229, jan-abr. 2010.

MOURA, Manoel Oriosvaldo. **O educador matemático na coletividade de formação: uma experiência com a escola pública.** Tese (Livre Docência em Metodologia do Ensino de matemática) – Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, São Paulo. 2000.

MUNANGA, Kabengele. **Origens africanas do Brasil contemporâneo.** São Paulo: Gaudi Editorial, 2012,92p.

OLIVEIRA, Josivaldo Pires de; LEAL, Luiz Augusto Pinheiro. **Capoeira, identidade e gênero : ensaios sobre a história social da capoeira no Brasil**. Salvador: EDUFBA, 2009.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências.** Zetetiké, Campinas, ano I, n.1, p.7-17. 2009.

PEREIRA, Rinaldo Pevidor; CUNHA JÚNIOR, Henrique. **Mancala: o jogo**

africano no ensino da matemática. Curitiba: Appris, 2016.

PINHEIRO, Bárbara Carine Soares. **História Preta das Coisas:** 50 invenções científico-tecnológicas de pessoas negras. São Paulo: Martins Fontes, 2021.

PINHEIRO, Bárbara Carine Soares; OLIVEIRA, Roberto Dalmo Varallo Lima de. **Divulgação... de qual ciência? Diálogos com epistemologias emergentes**. In: ROCHA, M. B. ; OLIVEIRA, R. D. V. L. (orgs). Divulgação científica: textos e contextos. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

PIRES, Marília Freitas de Campos. **O materialismo histórico-dialético e a Educação.** In: Revista Interface: Comunicação, Saúde, Educação. Botucatu (UNESP), 1997. Disponível em: < https://www.scielo.br/j/icse/a/RCh4LmpxDzXrLk6wfR4dmSD/?lang=pt>. Acesso em 22 de novembro de 2022.

PONTE, João Pedro da. Práticas profissionais dos Professores de Matemática. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa: 2014.

RIBEIRO, Djamila. **Lugar de fala.** São Paulo: Pólen, 2019.112 p.

SANTOS, Boaventura de Sousa; ARAÚJO, Sara; BAUMGARTEN, Maíra. **As Epistemologias do Sul num mundo fora do mapa.** Sociologias, Porto Alegre, ano 18, N° 43, set/dez. 2016, pp. 14-23. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/soc/a/Y3Fh6D3ywMCFym4wMFVdzsq/?format=pdf&lang=pt>. Acessado em 14 mar. 2022

SANTOS, Josenildo dos; AVELAR, Everton dos Santos; SANTOS, Daniela Batista; MAGALHÃES, André Ricardo. **Matemática na Capoeira: construindo movimentos corporais e figuras geométricas.** In: VII Congresso Ibero-americano de Educação Matemática. Montevideo, CIBEM: 2013.

SANTOS, Luana Cristina da Silva; VIRGENS, Wellington Pereira das. **A matemática é negra: aspectos da identidade africana na origem do conhecimento matemático.** In: Revista Em Favor de Igualdade Racial, Rio Branco (AC), v. 3 n. 3, p. 122-138, jun./dez. 2020.

SÃO PAULO. Centro de Mídias do estado de São Paulo. **7º ano EF – Educação Física: lutas do Brasil: a capoeira**. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=ivxcKyyod58>. Acesso em 20 de novembro de 2022.

SÃO PAULO. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista**. SEDUC/Undime-SP. São Paulo: SEDUC/SP, 2019.

SCHWARCZ, L. K. M. **O espetáculo das raças: cientistas, instituições e questão racial no Brasil**: 1870-1930. São Paulo: Companhia das Letras ,

1993
SHIVA, Vandana. **Biopirataria: a pilhagem da natureza e do conhecimento.** Petrópolis: Vozes, 2004.

STEIN, Mary Kay; SMITH, Margaret Schwan. **Mathematical Task as a framework for reflection: from research to practice**. In: Mathematics Teaching in the Middle Scholl. v. 3, n. 4. Reston, 1998. pp. 268-275

STEWART, Ian. **Desbravadores da matemática: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2019. 394p.

VIANA, Marcelo. **À Gazeta, Viana questiona 'descolonização da matemática'**. Instituto Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2021. Disponível em: <https://impa.br/noticias/a-gazeta-do-povo-viana-questiona-descolonizacao-da-matematica/>. Acesso em 22 de novembro de 2022.

VIRGENS, Wellington Pereira das. **Problemas Desencadeadores de Aprendizagem na organização do ensino: sentidos em movimento na formação de professores de matemática.** 2019. 281f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo. 2019.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. **A construção do pensamento e da linguagem.** São Paulo, SP: Martins Fontes, 2001.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. **A formação social da mente.** São Paulo: Martins Fontes, 1991.

ZEIGER, Cláudio. **O tecido Kente dos Axantes de Gana.** 2012. Disponível em: <http://claudio-zeiger.blogspot.com/2012/03/o-tecido-kente-dos-axantes-de-

Anexos

Texto 1: O tecido Kente dos ashanti

BEVILACQUA, Juliana Ribeiro da Silva. **O Tecido Kente dos Ashanti**. São Paulo: Museu Afro Brasil, 2012. Disponível em: <http://www.museuafrobrasil.org.br/docs/default-source/publicações/o-tecido-kente-dos-ashanti.pdf>. Acesso em 04 de janeiro de 2023.

Os ashanti são os mais conhecidos dentre os povos akan de Gana, na região ocidental da África. Eles ocupam uma grande área do centro-sul do país e estão organizados numa confederação de estados; cada estado é dirigido por um chefe supremo que, na sua vez, está subordinado ao rei (ashantehene).

Além de serem conhecidos pela produção de joias em ouro, esses povos são também admirados por sua tecelagem, que acreditam ter aprendido com especialistas da atual Costa do Marfim há séculos. O mais famoso tecido produzido pelos ashanti é o chamado *Kente*, um termo que advém da palavra fante *kenten*, que significa cesta. Historicamente, o tecido kente era um símbolo da realeza.

Durante séculos, foi a figura do rei (ashantehene) quem controlou a sua produção e utilização, até este adquirir, ao longo do tempo, um uso mais generalizado. Viajantes que estiveram no reino Ashanti observaram que havia uma diferenciação hierárquica entre membros da corte, através do tipo de roupa e de tecido, bem como o hábito de enterrar os chefes utilizando esses panos, tradição, aliás, ainda viva nos dias de hoje.

Além de sua utilização como vestimenta, o tecido kente também aparece em muitas outras importantes formas de regalia entre os ashanti, incluindo tambores, escudos e guarda-sóis. Os variados motivos geométricos presentes nesses tecidos são produzidos tanto em algodão quanto em seda. Alguns padrões são feitos exclusivamente para homenagear pessoas socialmente importantes como governantes, reis, rainhas, artistas e suas famílias, entre outros.

Outros padrões se referem a plantas, animais ou objetos cotidianos, bem como a temas como riqueza, paz e bem-estar. Finalmente, outros motivos são baseados em algum evento ou ocasião particular. No que diz respeito às cores, a azul, a verde, a amarela, a vermelha e a magenta são típicas dos tecidos usados pelos homens. Já as mulheres usam tecidos menores, mas com um padrão geométrico que se assemelha ao masculino.

O tecido kente ficou conhecido em outras partes do mundo através da figura do presidente Kwame Nkrumah, que governou Gana entre 1957 e 1966 e contribuiu para tornar o tecido símbolo da identidade pan-africana. Atualmente, releituras contemporâneas utilizando esse tipo de pano podem ser encontradas numa infinidade de modelos de chapéus, bolsas, roupas, dentre outros artigos.

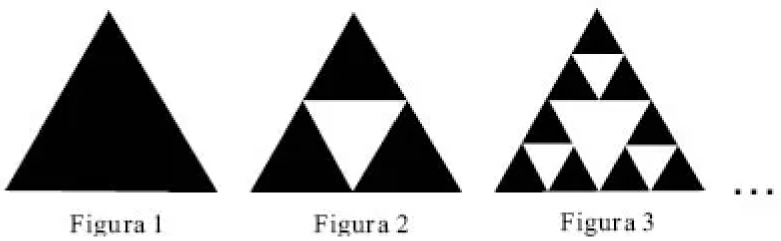
Texto 2: Questão do ENEM sobre oTriângulo de Sierspinski

Fonte: BRASIL. ENEM 2008.

Fractal (do latim fractus, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

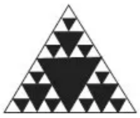


De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da seqüência apresentada acima é

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

Ⓔ 

Texto 3: A Torre de Hanói: história e lenda

MANOEL, Luís Ricardo da Silva. Torre de Hanói. In: IBILCE (Unesp). Sem data. Disponível em: < https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/torre_de_hanoi.pdf>. Acesso em 04 de janeiro de 2023.

A torre de Hanói, também conhecida por torre de bramanismo ou quebra-cabeças do fim do mundo, foi inventada e vendida como brinquedo, no ano de 1883, pelo matemático francês Edouard Lucas. Segundo ele, o jogo que era popular na China e no Japão veio do Vietnã.

O matemático foi inspirado por uma lenda Hindu, a qual falava de um templo em Benares, cidade Santa da Índia, onde existia uma torre sagrada do bramanismo, cuja função era melhorar a disciplina mental dos jovens monges.

De acordo com a lenda, no grande templo de Benares, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há uma placa de bronze sobre a qual estão fixadas três hastes de diamante.

Em uma dessas hastes, o deus Brama, no momento da criação do mundo, colocou 64 discos de ouro puro, de forma que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os outros decrescendo até chegar ao topo.

A atribuição que os monges receberam foi de transferir a torre formada pelos discos, de uma haste para outra, usando a terceira como auxiliar com as restrições de movimentar um disco por vez e de nunca colocar um disco maior sobre um menor.

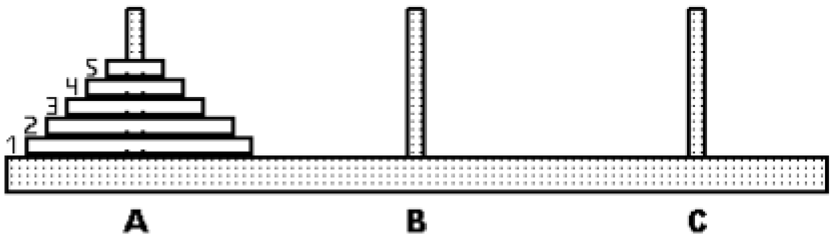
Os monges deveriam trabalhar com eficiência noite e dia e, quando terminassem o trabalho, o templo seria transformado em pó e o mundo acabaria. O desaparecimento do mundo pode ser discutido mas não há dúvida quanto ao desmoronamento do templo, maiores detalhes veja o final do texto.

O jogo e proposta de atividades com a Torre de Hanói Primeiramente deixamos a criança em contato com o jogo para que se familiarizem com as peças, com o jeito de encaixar os discos, isto é, deixamos os alunos brincarem livremente. Depois de feito isto e de ter contado a história do jogo, introduzimos as regras do jogo para os alunos.

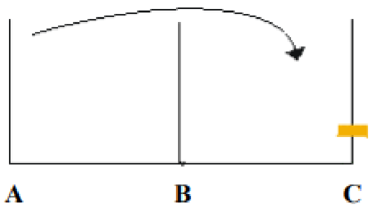
Então passamos a acompanhar o desenvolvimento do jogo segundo as regras propostas. Para facilitar o trabalho podemos solicitar que os alunos tentem transferir um disco da haste A para a haste C; depois dois discos e assim por diante segundo as regras, até um limite de, por exemplo, seis discos.

Depois que dominarem os movimentos que devem ser feitos, podemos indagar se eles sabem quantos movimentos fizeram para transferir a torre de uma haste para outra, e se essa é a quantidade mínima de movimentos. Também podemos perguntar se há alguma estratégia de movimentação dos discos para obter essa quantidade mínima de movimentos.

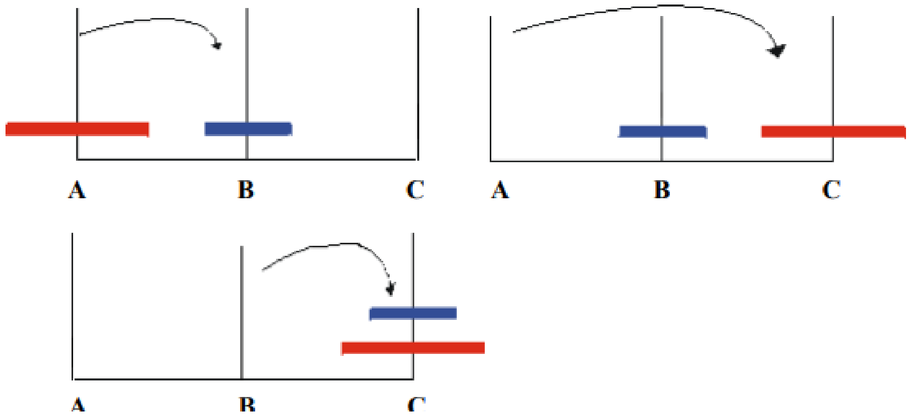
O jogo consiste em uma base de madeira onde estão firmados madeira, de diâmetros diferentes, furados no centro. Vamos chamar de A, B e C, as três hastes, conforme a figura.



No começo do jogo os discos estão todos enfiados na haste A, em ordem decrescente de tamanho, com o menor disco acima de todos. O objetivo é mover todos os discos, de A para C, obedecendo às seguintes regras: 1)Somente um disco pode ser posto de cada vez. 2)Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor. Primeiramente deixamos os alunos em contato com o jogo para que se familiarizem com as peças, com o jeito de encaixar os discos, isto é, deixamos os alunos brincarem livremente. Depois de feito isto e de ter contado a história do jogo, introduzimos as regras do jogo para os alunos. Então passamos a acompanhar o desenvolvimento do jogo segundo as regras propostas. Para facilitar o trabalho podemos solicitar que os alunos tentem transferir um disco da haste A para a haste C; depois dois discos e assim por diante segundo as regras, até um limite de, por exemplo, seis discos. Depois que dominarem os movimentos que devem ser feitos, podemos indagar se eles sabem quantos movimentos fizeram para transferir a torre de uma haste para outra, e se essa é a quantidade mínima de movimentos. Também podemos perguntar se há alguma estratégia de movimentação dos discos para obter essa quantidade mínima de movimentos. Observe que a solução só é possível quando n>1, usando a haste B como intermediária. Para solucionar problema proposto - qual o número mínimo de movimentos que precisaremos fazer para alcançar o objetivo? - se o jogo só tivesse um disco, seria fácil movê-lo (segundo as regras!) de A para C. Para isso precisamos de apenas um movimento. Vejamos a figura



Vamos considerar o caso de dois discos. Movemos o disco menor para **B**; o segundo para **C** e depois o menor de **B** para **C**: acabou. Fizemos três movimentos. Vejamos as figuras.



Consideremos agora um caso geral com n discos. Vamos imaginar que os discos tenham sido numerados de cima para baixo: 1,2,...,n. O menor disco é o 1, e o maior é o n . Para remover o disco n é preciso tirar todos de cima, ou seja, tirar todos os $n-1$ discos que estão acima dele, lembrando-se que queremos mover os discos todos para a haste C, e o disco n é o que deve ficar mais embaixo nesta haste. Então é preferível colocar os outros discos na haste B, ou seja, devemos mover os $n-1$ discos menores, de A para B um de cada vez respeitando as regras. Feito isso removemos o disco n para a haste C. Agora, para mover os $n-1$ discos para C, só é possível se for repetindo o jogo, de modo a passar todos os discos (um a um) de B para C. Podemos observar que temos que fazer o jogo com $n-1$ discos duas vezes: primeiro movemos os $n-1$ discos de A para B (usando C como intermediário). Isto descobre o disco n . Movemos então n para C. Agora jogamos com os $n-1$ discos mais uma vez: de B para C, usando A como intermediário e com isto empilhamos todos em C sem violar as regras. Vamos então verificar qual é o número mínimo de movimentos. Para facilitar, vamos dizer que o número mínimo de movimentos necessários para completar o jogo de n discos é T (n). Como não há como chegar ao disco n sem mover os n −1 de cima, então o número de movimentos que fizemos para isto é T (n −1). Como movemos os n −1 para a haste B, a haste C está livre, logo podemos mover o disco n para C, ou seja, o número de movimentos desde o começo do jogo é de T (n −1) +1. Então, falta mover os n −1 discos de B para C, para ficarem em cima do disco n , ou seja, o número mínimo de movimentos para fazer isto é T (n −1). Logo desde o começo do jogo fizemos T (n −1) +1+ T(n −1) = 2T (n −1) +1 movimentos. Pelo que vimos na análise do jogo, mostramos que não é possível fazer um número menor de movimentos, então T (n) é o menor número de movimentos para completar o jogo de n discos, ou seja T (n) = 2T(n −1) +1. Já vimos que T (1) = 1. Logo, T (2) = 2T(1) +1 = 3., T (3) = 7 , T (4) = 15 , T (5) = 31, T (6) = 63 . Por meio de tentativas, descobrimos que para um disco o número de movimentos é apenas um, colocando o disco direto na haste C. Para dois discos é 3 se começarmos na haste B ou 6 se começarmos na haste C. Para três discos é 7 se começarmos na haste C ou 14 se começarmos na haste B. Repetindo o processo para 4,5,...,n discos, podemos observar que se o número inicial de discos da torre inicial for ímpar, o primeiro disco da torre deverá ser colocado, inicialmente, na haste C e, se o número inicial de discos da torre for par, o primeiro disco da torre deverá ser colocado, inicialmente, na haste B.

Texto 4: Como as tranças de origem afro entrelaçam o passado e presente sendo um meio de resistência para as mulheres negras

ROLIM, Maria Rita. Tranças: além da estética uma forma de sobrevivência. In: Em Pauta – Notícias (UFPEL). Disponível em: < https://wp.ufpel.edu.br/empauta/trancas-alem-da-estetica-uma-forma-de-sobrevivencia/>. Acesso em 04 de janeiro de 2023.

As tranças de cultura africana, carregam uma bagagem ancestral muito forte, já foram utilizadas como ferramenta de sobrevivência durante o período da escravidão, e hoje em dia ainda continuam trazendo o significado de sobrevivência, mas como forma de economia para muitas pessoas negras. Esse tipo de penteado, além dos significados que carregam consigo, para as mulheres negras são forma de proteção e aceitação diante o impacto direto com o racismo estrutural presente na sociedade, interferindo na sua autoestima, segurança e identidade.

"As tranças acabam tento um papel muito importante na resistência negra contra a escravidão. Muitas vezes o cabelo era trançado como um mapa com caminhos para os quilombos, assim como sementes para serem plantadas eram tranças junto do cabelo para serem levadas aos quilombos. Dessa forma, a trança acaba tendo um papel importante tanto para a resistência e sobrevivência das nossas negritudes, quanto da nossa gente." afirma Joyce Silva Cardoso, 25 anos, formada em História Bacharel.

Com a chegada dos africanos de forma forçada ao Brasil eles trazem consigo tradições e costumes de suas terras, o historiador Marcelo Studinski relata que: "Os africanos estão, trazem tradição dos seus territórios das localidades em África, seja no atual Benim, do atual Nigéria, do atual Angola, Moçambique ou Guiné- Bissau que são de onde vieram e partiram essas etnias, que foram transmigrados". Os costumes foram sendo passados de geração em geração, as tranças em sua terra de origem tinha diversos significados como: posição social, status, etnia e crença. De diversas localidades da África, hoje são herança de uma cultura que resistiu para sobreviver.

Tipos de Tranças
RELAÇÃO COM AS CIDADES DE ORIGEM

Tranças Nagô

Assim como o nome o penteado descende da cultura do povo Nagô(Iorubá), levaram essa tradição em sua diáspora,

e como memórias dos ancestrais,traziam nas tranças esse significado.

Dreads

Do antigo Egito até ser popularizado pelos "rastas" na Jamaica, os dreads são um sinônimo de resistência.

Afro Bantu

Assim como as tranças Nagô, o penteado afro Bantu são uma a herança da África subsaariana, carregam consigo significado de realeza.

Box Braids

Sendo em sua origem chamadas de tranças soltas ou básicas,assim como os dreads tiveram origem na africa e no antigo Egito.

Infográfico utilizando dados históricos: produção Maria Rita Rolim /Em Pauta

Hoje em dia, fazer tranças além de transmitir o conhecimento ancestral também é uma forma de renda para muitas pessoas negras, os trancistas como são chamadas quem trabalha especificamente fazendo tranças, é uma profissão que vem crescendo cada dia mais. Para Daniele de Souza, jovem de 18 anos que trabalha a dois anos com penteados afro, sua admiração ao olhar sua tia trançando despertou sua vontade de aprender e logo depois viu a oportunidade de trabalho: “Minha tia faz tranças então ela me ensinou muita coisa, ela fazia em mim e nas minhas primas e eu comecei a ter interesse em aprender e eu aprendi a “trança básica” digamos assim com ela. Eu vi que eu tinha talento para fazer isso, e aí eu comecei a ver isso como uma forma de trabalho e de ganhar dinheiro, trabalhar de fato com isso e isso aconteceu por volta de 2019, e foi no finzinho mais ou menos do ano que eu comecei a aprender outras técnicas de tranças.”

Foto: Daniele de Souza/ Divulgação @dani_afrobrainds

A linha tênue entre o entrelaçar das tranças do cabelo e o sentimento como autocuidado e a reconstrução da autoestima de pessoas racializadas é uma das principais missões de um trancista, que junto com seu trabalho carrega a essência de um passado de muita coragem. “Eu amo trabalhar com tranças pois junto com o penteado trazemos um grande aprendizado e também nos reportamos para um passado não muito distante onde as tranças eram utilizadas pelos nossos antepassados de diversas formas. Hoje muitos usam tranças pela estética mas antigamente a trança era literalmente um meio de fuga da escravidão, pois ao trancar os cabelo uns dos outros os negros e negras traçavam caminhos para a liberdade.” relata Mari Helena Santos, 28 anos, trancista do espaço Los Santos Hair.

Foto: Divulgação Mari Helena Santos

Thauany Vergara, de 23 anos, proprietária do Dandara Tranças e Dreads não imaginava se tornar trancista até ter a necessidade de traçar seu próprio cabelo durante o processo de transição capilar, que é um dos motivadores da muitas mulheres e pessoas pretas recorrerem as tranças afro. A transição ocorre quando se deixa de passar química para alisar o cabelo como: progressivas, botox e relaxamentos. “Eu tenho cabelo natural a mais de 8 anos e na época não era muito aceito, não era tanta gente que tinha um cabelo crespo, então quando eu decidi entrar na transição capilar eu nem lembrava qual era o jeito do meu cabelo, se ele era crespo ou se era cacheado, eu só tinha foto minha muito pequena, eu alisar o cabelo desde muito cedo quando me deparei com cabelo crespo tipo 4C seu já me apavorei” relata. O processo de transição capilar afeta muito a autoestima das mulheres negras, pois, o cabelo fica sem forma definida por conta da falta da química e as tranças entram como suporte neste momento.

Foto: Thauny Vergara/ Divulgação @dandara_trancasedreads

O imagético das composições da cultura afro estão sempre mudando em relação ao olhar da sociedade, movimentos como *Black Power* e agora recentemente *Black Lives Matter* trazem a necessidade de olhar para as pessoas negras e as consequências que o racismo na sociedade provoca. A historiadora Joyce explica que “No que tange questões relacionada as negritudes, historicamente o sujeito negro é colocado na sociedade como o outro, mas outro no sentido de não pertencimento, assim, suas características e questões que envolvem a complexidade da existência também. Nesse sentido, tanto as tranças, quanto outras formas de usar o cabelo, são associadas a sentidos negativos”.

Com essas mudanças do olhar e a própria apropriação da cultura pelas pessoas negras em suas comunidades, gerando tendências e movimento no mercado, temos o surgimento da apropriação cultural, que no conceito da antropologia e se refere ao momento em que alguns elementos específicos de uma determinada cultura são adotados por pessoas ou um grupo cultural diferente. Para Thauany não importa qual penteado, pode ser uma trança nagô, uma box braids ou um dread, ela tenta sempre levar consciência do significado as tranças possuem para a cultura afro “minhas clientes elas vão estar levando para fora um ato, que elas valorizem isso, eu tento conversar quando é em relação a pessoas brancas, mas agora, quer fazer faz mas a pessoa tem que entender que não é muito mais que estética”.

Nos dias de hoje, devido à pandemia de Covid-19, que já levou mais de 500 mil vítimas. Para a execução de atividades econômicas em geral, é necessário os devidos cuidados com a higiene e para não haver contaminação, para muitas pessoas continuarem trabalhando, principalmente para a população que não tem direito a quarentena. Daniele relata sua preocupação: “Atualmente trançar é meu único meio de renda, porém, como vocês devem saber o meio da beleza ele de certa forma sofreu um pouco com a função da pandemia, por que as pessoas não se arrumam para ficar em casa por exemplo, então o meu número de clientes diminuiu em função disso, que é super entendível por que é um valor para colocar as tranças e as vezes é um valor que a pessoa não tem, mas no momento é meu único meio de trabalho.”

Texto 5: Os jogos em tabuleiro Mancala

BRASIL. UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Jogo Mancala – Material do estudante. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/mathematic/wp-content/uploads/2021/07/MANCALA_-Estudante.pdf>. Acesso em 04 de janeiro de 2023.

ORIGEM DO JOGO

Mancala é um jogo de tabuleiro de origem africana, também conhecido como o Xadrez do Oriente.

O jogo está relacionado ao ato de semear e colher as sementes na terra. Ainda hoje, o jogo é bastante explorado em muitos países recebendo terminologias diferentes de acordo com local onde é jogado.

Por exemplo, no Sudão, Gâmbia, Senegal e Haiti o jogo é conhecido como Wari; na Costa do Marfim, Filipinas e Ilhas Sonda o jogo é denominado de Bailé e no Brasil, os escravos que o trouxeram o chamavam de Adi. O jogo pode ser explorado com alunos em qualquer etapa da Educação Básica, especialmente do sexto ano do Ensino Fundamental, quando são trabalhados conceitos como sistema de numeração decimal e resolução de expressões aritméticas.

Mancala é um jogo de tabuleiro que tem como proposta desenvolver o raciocínio lógico e estratégico do jogador, por meio da construção de táticas, para que o depósito de sementes seja cada vez maior (ZUIN, 2015).

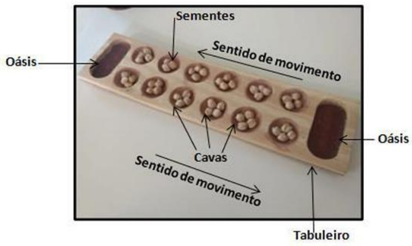
OBJETIVO DO JOGO:

Capturar o maior número de sementes.

MATERIAL

- Um tabuleiro composto por 12 cavas menores (6 para cada jogador), 2 cavas maiores (Kalha ou Oásis) um para cada jogador, conforme Figu ra 1.

Figura 1: Modelo de tabuleiro Mancala, sementes e sentido de movimento.



Fonte: FREITAS (2019), p. 22.

- 48 sementes compartilhadas.

REGRAS

● Partida para 2 jogadores.

● O jogo inicia quando cada componente da dupla, sentados à frente do tabuleiro, colocam 4 sementes em cada uma das cavas do tabuleiro. As cavas menores pertencerão ao jogador situado mais próximo do tabuleiro. O Oásis (cava maior) será o da direita do jogador.

- Cabe a dupla definir quem irá iniciar a primeira jogada. O primeiro a jogar deverá escolher uma das 6 cavas pequenas de seu território e retirar as 4 sementes semeando-as uma a uma nas cavas subsequentes no sentido antihorário.
- Sempre que passar pelo seu Oásis o jogador deve depositar uma semente e continuar a distribuí-las nas cavas pequenas do oponente, mas nunca no Oásis do adversário. Se a última semente que o jogador semeou for no próprio Oásis, o jogador pode jogar novamente.
- Quando estiver distribuindo as sementes e a última semente cair em uma cava de seu domínio e esta estiver vazia, o jogador poderá capturar todas as sementes da cava pertencente ao adversário localizada em frente a esta cava, junto com sua semente e deverá colocá-las em seu Oásis.
- O fim do jogo ocorre quando um dos jogadores não tiver sementes em suas casas para distribuir.
- Vence o jogador que obtiver maior número de sementes em seu Oásis. Se houver sementes em suas cavas, estas serão contabilizadas.

LINK DO JOGO ONLINE: https://mancala.playdrift.com

LINK EXPLICATIVO DO JOGO: https://youtu.be/T4_jZYeer9s

REFERÊNCIAS:

FREITAS, E. L. V.. Os valores civilizatórios afro-brasileiros e o jogo Mancala. Porto Alegre, 2019.

ZUIN, E.S.L.; SANT'ANA, N.A.S.. Produzindo aproximações da cultura africana com a matemática escolar: a utilização do jogo Mancala. Minas Gerais, 2015.

Apêndices

Apêndice 1: Termo de consentimento livre e esclarecido

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

ENCiMA IFSP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
PESQUISA DE MESTRADO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título da Pesquisa: Discussões étnico-raciais durante o ensino de geometrias.

Nome dos Pesquisadores: Wellington Pereira das Virgens

1. Da natureza da pesquisa

Caro(a) participante,

O(a) Sr.(a) está sendo convidado(a) a participar da pesquisa intitulada "Discussões étnico-raciais durante o ensino de geometrias" que tem como finalidade mediar um processo de formação inicial docente com vistas à investigação sobre as possibilidades de desenvolver uma educação antirracista, voltada ao desenvolvimento das relações étnico-raciais, durante as aulas de matemática, especialmente as de geometria, sob arcabouço teórico-metodológico da teoria histórico-cultural.

2. Dos participantes da pesquisa:

Participarão da pesquisa, voluntariamente, 3 (três) participantes inscritos e atuantes no Ciclo de Palestras e Oficinas intitulado "Discussões étnico-raciais durante o ensino de geometrias", realizado remotamente junto ao IFSP, câmpus São Paulo, como ação extensionista.

***3.* Do envolvimento na pesquisa:**

Ao participar deste estudo o(a) Sr.(a) concorda que o pesquisador responsável, supra identificado, bem como sua equipe de pesquisadores, possa coletar e analisar dados referentes à maneira como a já referida teoria de aprendizagem pode contribuir para a constituição de uma práxis docente em pról de uma educação humanizadora. O(a) Sr.(a) tem liberdade de se recusar a participar e ainda se recusar a continuar participando em qualquer momento da pesquisa, sem qualquer prejuízo para o Sr.(a). Sempre que precisar, poderá pedir mais informações sobre a pesquisa através do telefone do pesquisador do projeto ou do grupo de aplicativo para smartphone (conhecido como "Wathsapp"), especialmente constituído para este fim, e, se necessário através dos contatos institucionais tanto da Comissão de Ética em Pesquisa da Faculdade de Educação do Instituto Federal de São Paulo.

***4.* Sobre a participação na pesquisa:**

Se o Sr.(a) consentir em participar da pesquisa, deverá participar dos debates acerca da teoria referenciada, que ocorrerão durante o "Ciclo de palestras e debates" já citado. Importante ressaltar que a participação ou não na pesquisa são absolutamente independentes da avaliação e certificação no Ciclo de Palestras e Debates, de modo que seu eventual não consentimento em participar não acarretará prejuízo algum.

***5.* Dos possíveis Riscos e desconforto:**

A participação nesta pesquisa não traz complicações legais. Considerando as características do Sr.(a) de professor em processo de formação inicial, é possível que venha a sentir algum desconforto durante as atividades relacionadas à organização de práticas de ensino, situação essa que buscaremos minimizar durante a preparação do plano de atividades. Os procedimentos adotados nesta pesquisa obedecem aos Critérios da Ética em Pesquisa com Seres Humanos conforme Resolução nº. 466/2012 e nenhum dos procedimentos usados oferece riscos à sua dignidade.

***6.* Da confidencialidade:**

Todas as informações coletadas neste estudo são estritamente confidenciais. Somente o pesquisador e a co-pesquisadora de sua equipe, Prof.ª. Lucilene Cândido Rocha, mestrando do Programa de pós-graduação em ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de São Paulo, terão conhecimento dos dados. Para a publicidade dos resultados, em quaisquer eventos, periódicos ou textos, serão atrelados aos dados apenas pseudônimos de modo que o(a) Sr.(a) não será identificado.

***7.* Dos Benefícios:**

Ao participar desta pesquisa o(a) Sr.(a) terá como benefício direto a apropriação de possibilidades de trabalho docente que reconheça e valorize e potencialize movimentos educacionais antirracistas no contexto de qualquer disciplina do currículo escolar da educação básica e da própria matemática. Também participará de um processo de formação inicial de professores de matemática comprometido com práticas antirracistas e equitativas em que a matemática é compreendida como produção humana cujo conhecimento é direito de

1

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

ENCIMA IFSP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
PESQUISA DE MESTRADO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

todos e todas. Seus futuros alunos negros e negras terão mais probabilidade de sentirem-se representados nos processos de produção do conhecimento matemático e geométrico, bem como poderão com maior probabilidade perceber a matemática como produto de um processo produtivo do qual os antepassados deles antepassados também participaram e participam ativamente.

8. Do pagamento:

O Sr.(a) não terá nenhum tipo de despesa financeira para participar desta pesquisa, bem como nada será pago por sua participação.

9. Do compromisso:

O pesquisador compromete-se a esclarecer qualquer eventual dúvida que o participante possa ter em qualquer fase da pesquisa ou mesmo depois de finalizada a mesma, por meio de seu correio eletrônico no endereço wellington.virgens@ifsp.edu.br ou por telefone através do número celular (11) 96776-1082, inclusive por meio de mensagens por meio de aplicativos de troca de mensagens instantâneas para smartphone (conhecido como "Wathsapp"). Em caso de dúvidas sobre a ética em pesquisa o participante poderá, ainda, contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) na Rua Pedro Vicente, 625 – Canindé - São Paulo - CEP: 01109-010, inclusive pelo telefone (11) 3775-4665 ou pelo e-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br.

Este documento será impresso em 2 (duas) vias de igual teor, uma das quais será entregue ao participante da pesquisa.

Após estes esclarecimentos, solicitamos o seu consentimento de forma livre para participar desta pesquisa. Portanto preencha, por favor, os itens que se seguem.

Obs.: Não assine esse termo se ainda tiver dúvida a respeito.

Consentimento Livre e Esclarecido

Eu, Paula Hellen de Almeida Pinto, prontuário SP 1375202, participante do Ciclo de Oficinas e Palestras "Discussões étnico-raciais durante o ensino de geometrias" do IFSP, declaro, por meio desta, meu aceite em participar da pesquisa intitulada "Discussões étnico-raciais durante o ensino de geometrias", coordenada pelo pesquisador Wellington Pereira das Virgens, cujo objetivo principal é mediar um processo de formação inicial docente com vistas à investigação sobre as possibilidades de desenvolver uma educação antirracista, voltada ao desenvolvimento das relações étnico-raciais, durante as aulas de matemática, especialmente as de geometria, sob arcabouço teórico-metodológico da teoria histórico-cultural. Declaro ainda que fui devidamente orientado acerca dos preceitos éticos que nortearão a referida pesquisa e minha ciência quanto aos riscos à publicidade dos resultados obtidos após a conclusão dos trabalhos.

Dados do Participante:

Nome:

Prontuário:

Pseudônimo:

Apêndice 2: Produto Educacional: Organização das oficinas Ciclo de debate

Justificativa

Discriminação e desigualdade são temas sempre atuais na sociedade. O reconhecimento da importância da questão do combate ao preconceito e ao racismo, à discriminação e redução das desigualdades está presente no Brasil.

Um dos pilares da sociedade responsável pelo processo de formação ideológica da cultura da exclusão é a educação, pois a escola contribui com grande parcela na formação do homem e da mulher, os quais são marcados pela desigualdade social do país.

Nesta oficina discorremos por meio de uma abordagem qualitativa a fim de analisar dados obtidos por meio da observação das dificuldades apresentadas pelos docentes de matemática em trabalhar a geometria fractal no cotidiano escolar, contexto longe da geometria estudada no cotidiano escolar e ressaltar a importância desta geometria na África.

Segundo Gerdes (2012a), a valorização educacional da cultura da família da criança, da zona, do país e do continente tornará o aluno mais confiante nas suas capacidades e alguém mais confiante em si próprio e na sua cultura aprenderá mais facilmente no Brasil após várias lutas dos militantes negros surgi a Lei 10.639/03, que exige o ensino da História da África no Brasil, mesmo assim ainda há pouco subsídios aos professores para trabalhar este tema nas aulas de matemática.

> [...] é muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que não são estranhas. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. (D'AMBRÓSIO, 2009)

A fim de mudar a matemática morta, é de suma importância a formação de professores pois as maneiras que os professores trabalham as tarefas em sala de aula podem influenciar diretamente na captação da aprendizagem dos alunos como discorre Stein & Smith (1998).

Segundo ressalta Pontes, o ensino de matemática nem sempre são baseadas em tarefas, más as tarefas são de suma importância no papel ativo do aluno e na sua aprendizagem. Existem tarefas cuja principal finalidade é apoiar a aprendizagem, outras que servem para verificar o que aluno aprendeu (tarefas para avaliação), outras, ainda, que servem para compreender de modo aprofundado as capacidades, processos de pensamento e dificuldades dos alunos e deixa claro que tarefa não é atividade.

Como considera D'Ambrosio (2009), o processo de gerar conhecimento como ação é enriquecido pelo intercâmbio com outros, imersos no mesmo processo, por meio do que chamamos de comunicação". Deste modo, oportunizar aos catedráticos o estudo desta fonte de ensino, é quebrar paradigmas, é fornecer análise de outro olhar para a matemática, é aprender novos modelos quer seja de metodologia, quer seja de conhecimento de mundo.

Procedimento

Pensando na aprendizagem das propriedades da geometria fractal que são a autossemelhança, a complexidade infinita e a sua dimensão,foi elaborado algumas atividades para ressaltar estas propriedades abaixo segue a descriçao das atividades:

Oficina 1: Ressaltando o pentágono

O pentagrama é composto de um pentágono regular e cinco triângulos isósceles côngruos, tal que a razão entre o lado do triângulo e sua base (lado do pentágono) é o número de ouro, o pentagrama também foi usado como emblema da escola pitagórica.

Fonte: Elaborado pelos autores

Objetivo: Sensibilizar os educadores para que percebam que existem outras possibilidades de trabalhar a geometria.

Material: software Geogebra

Estratégia:

-Demonstrar o pentágono regular desenhado com régua e compasso

-Pedir para os educadores traçar as diagonais do pentágono

Chamar atenção para o pentagrama que exibe dentro no Pentágono-Indagar com os professores os infinitos pentágonos que podem formar.

-Orientar aos educadores assistirem https://youtu.be/g8oqgrVhA_8 (Donald no País da Matemática e O Número de Ouro)

-Citar alguma curiosidade sobre a geometria, e principalmente determinada informação sobre a geometria fractal.

-As informações percebidas nesta oficina deverão ser deixadas na plataforma

Oficina 2: Conhecendo o Triângulo de Sierpinski

Objetivo: Construir o conceito de fractal por meio do triangulo de Sierpinski

Material: software Geogebra, folha sulfite, lápis, tesoura, compasso, régua

Estratégia:

Construção de um triangulo com régua e compasso

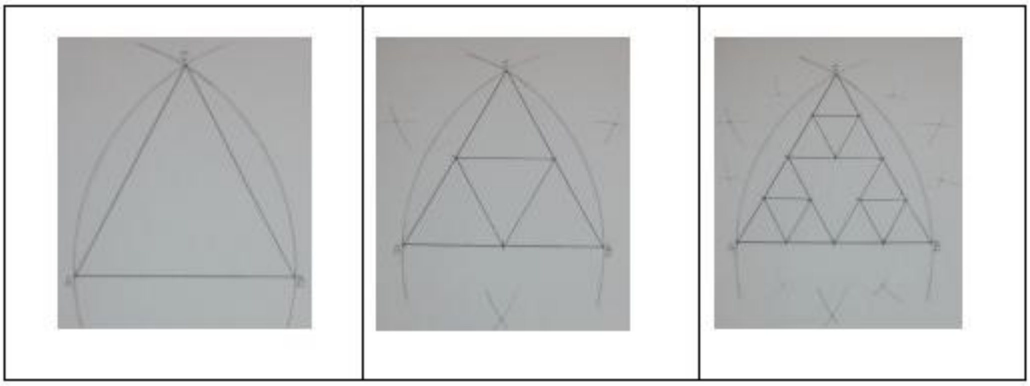
Construção do Triângulo de Sierpinski no geogebra

Descrição da atividade:

Os educadores deverão construir o triângulo de Sierpinski usando os seguintes materiais: folha sulfite, lápis, tesoura, compasso, régua.

1º passo: Os vértices do triângulo serão os pontos A, B e C.

2º passo: Traçar os pontos médios dos segmentos AB, BC e AC, a união dos pontos médios será a primeira interação do Triangulo de Sierpinski. As outras iterações são análogas a esta. Seguem algumas iterações. Ver figura 2.



Fonte : http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5516_2870_ID.pdf

Quanto à construção do Triângulo de Sierpinski, utilizando o geogebra:

1º passo: Abrir o software Geogebra e construir um triângulo equilátero. Para esta construção, os participantes deverão utilizar a ferramenta **Ponto**, que está no segundo ícone do software.

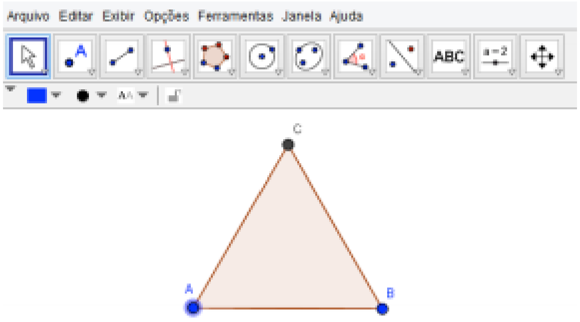
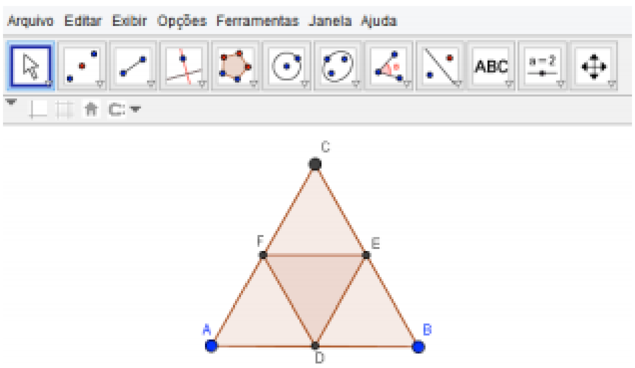


Figura 2 – Esboço da realização do segundo passo da construção
Fonte: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5516_2870_ID.pdf

2º passo: Construção da primeira iteração do Triângulo de Sierpinski. Para construir a primeira iteração do Triângulo de Sierspinski, é preciso determinar os pontos médios dos lados AB, BC e AC do triângulo equilátero ABC. Para isto, os participantes deverão selecionar a ferramenta Ponto – Ponto Médio ou Centro, que se encontra no segundo ícone do software.

Selecionada a ferramenta, clicar nos pontos A e B obtendo o ponto médio D, e em seguida nos pontos B e C obtendo o ponto médio E, e, por fim, clicar em A e C, encontrando o ponto médio F. Em seguida, selecione a ferramenta Polígono – Polígono regular. Clicando nos pontos médios F e D, novamente aparecerá a janela pedindo a quantidade de vértices do Polígono, digite 3 e dê ok. Esta será a primeira iteração do Triângulo de Sierpinski. Ver Imagem 3.



Fonte: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5516_2870_ID.pdf

A partir da primeira iteração podemos criar uma ferramenta para construir as próximas iterações. Durante o minicurso disponibilizaremos a todos os participantes um tutorial em PDF com todos os passos desta construção, com informações detalhadas inclusive da construção desta ferramenta, bem como, os passos de colorir o Triângulo de Sierpinski. Ver Imagem 4.

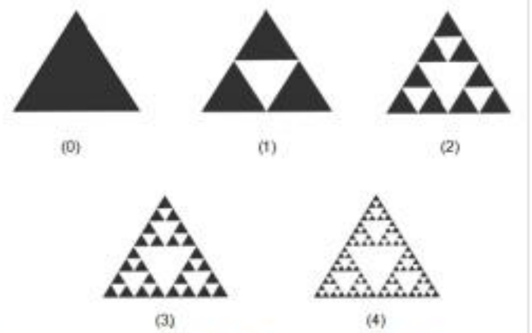


Figura 4: Algumas iterações do Triângulo de Sierpinski.

-Após a construção do triângulo de Sierpinski os educadores deverão responder às seguintes questões:

Etapa	Quantidade de triângulos	Comprimento do lado de cada triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total
0				
1				
2				
n				

Oficina 3: Explorando a Torre de Hanoi

Material: **https://www.geogebra.org/m/va3k4ggq (jogo)**

Estratégia:

Pedir para os educadores acessarem o jogo no Geogebra

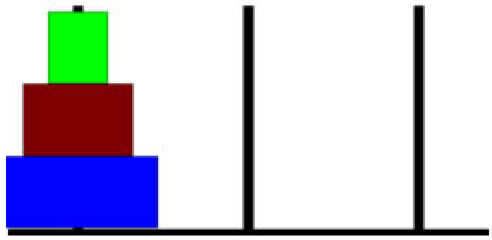
Descrição da atividade

O jogo se apresenta em uma base que possui três pinos na posição vertical. No primeiro pino temos uma sequência de discos com ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O objetivo é passar todos os discos para o último pino com a ajuda do pino central, de modo que no momento da transferência o pino de maior diâmetro nunca fique sobre o de menor diâmetro. O jogo mais simples é constituído de três pinos, mas a quantidade pode variar, deixando o jogo mais difícil à medida que os discos aumentam.

> Se repetíssemos o processo para valores de n crescentes, iríamos obter aproximações sucessivas do triângulo de Sierpinski (conferir a secção sobre fractais). Esta relação estabelece-se na estrutura recursiva como as posições válidas do puzzle podem ser combinadas. (MANDELBROT, et al, 2007)

Após os educadores acessarem o Geogebra os mesmos deverão observar as regras do jogo

Regra 1: expressão matemática $\boldsymbol{2^n - 1}$, onde n corresponde ao número de discos e mostrará no quadro o percurso do jogo



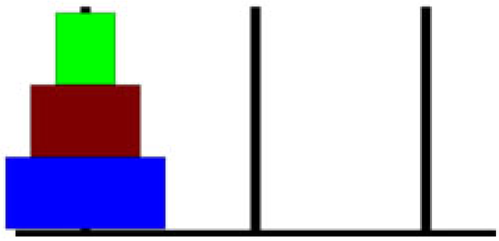
Regra 2:

Três discos = $2^3 - 1 = 7$

Quatro discos = $2^4 - 1 = 15$

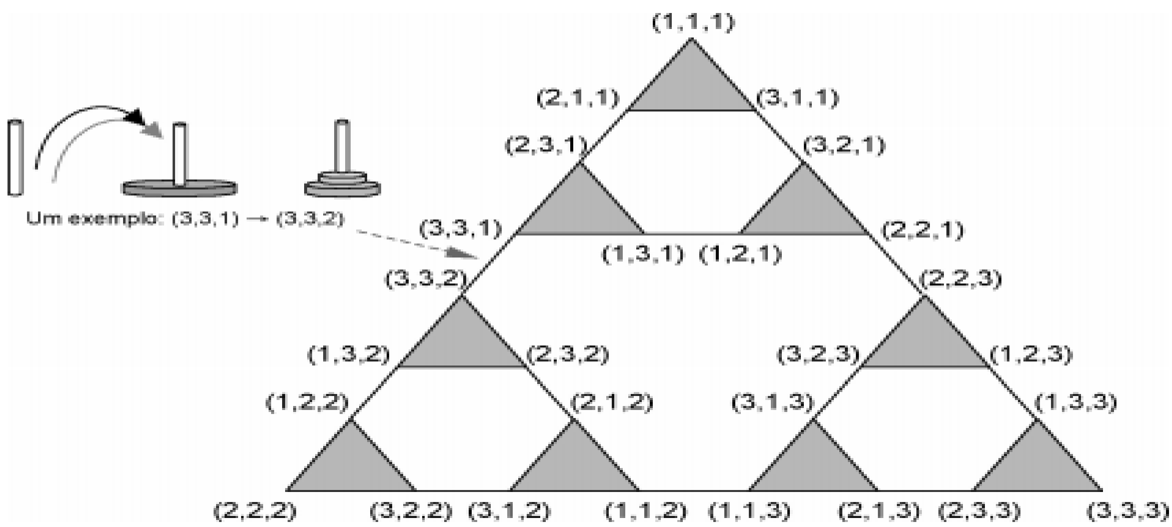
Cinco = $2^5 - 1 = 31$

Veja os possiveis movimentos utilizando três discos:



Sendo assim quanto mais discos tiver na torre mais se aproxima do triângulo de Spierpinski observe o diagrama abaixo:

E o diagrama para três discos?



Fonte: Mandelbrot (2007) sobre a Torre de Hanói

Oficina 4: Oficina de macramê

Objetivo: Apreciar a estrutura do fractal

Material: algodão, fios de lã, juta, cânhamo, tiras de couro, laços ou até mesmo fios de náilon.

Estratégia:

Apresentar uma peça de macramê aos participantes da oficina

Descrição da atividade

Macramé é um tipo de artesanato têxtil que é criado fazendo vários tipos de nós, que podem ser acertados para conseguir um número infinito de peças funcionais e bonitas.

Segundo o blog da Kaviah, o Macramé se origina dos tecelões árabes do século XIII. A palavra deriva de “migramah” que significa “franja”, referindo-se às franjas decorativas em camelos e cavalos, que ajudavam, entre outras coisas, a manter as moscas afastadas nas regiões quentes do deserto do norte da África.

Os professores envolvidos deverão produzir uma pulseira em macramê, esta oficina iremos fazer juntos via google meet abaixo alguns exemplos:

Fonte: https://arte.sjc.br/index.php?route=product/product&product_id=72

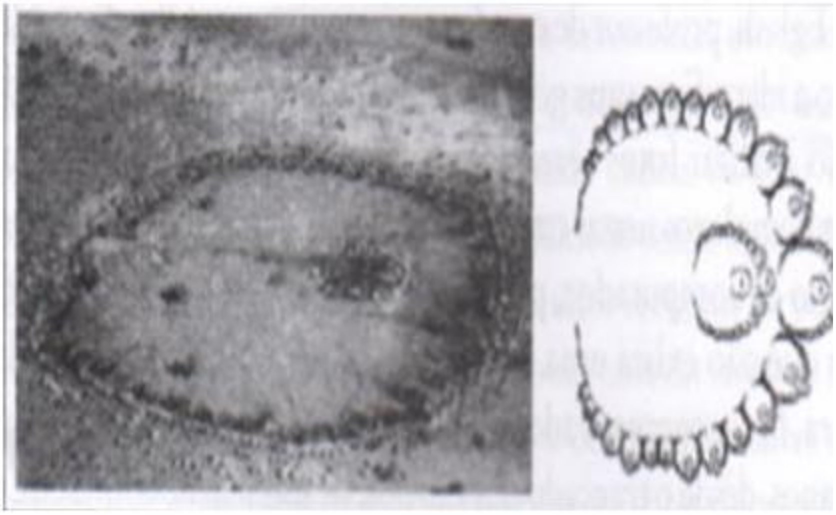
Fonte: http://www.janabijoux.com.br/tag/africano/

Após a confecção da pulseira abrirei para um debate por meio de algumas questões:

Existe semelhança entre a estrutura da pulseira, com a geometria?

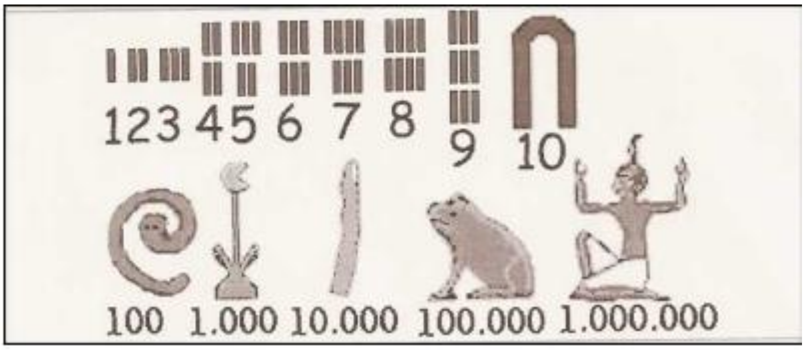
Essa estrutura é identificada nas pulseiras de alguma forma matemática? Qual?

Você sabia que essas estruturas autos semelhantes permeiam a construção de muitos objetos, assim como a organização de aldeias africanas? Observe:



Oficina 5: conceitos matemáticos provenientes da África

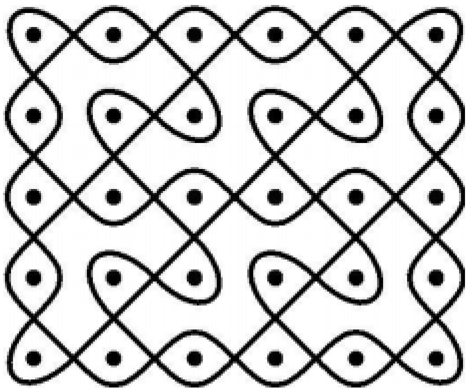
Objetivo: Propiciar o resgate da África presente nos conteúdos matemáticos
Material: pesquisa bibliográfica
O nosso sistema é indoarábico, porém ao estudarmos Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) ,Base Curricular Nacional (BNCC) e Curriculum Paulista nos deparamos com outros sistemas e porque não ressaltamos o sistema egípcio, afinal o Egito, é um país localizado ao norte do continente africano.
O sistema de numeração egípcio baseava-se em sete números chave: 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e 1.000.000, um traço vertical representava 1 unidade, um osso de calcanhar invertido representava o número 10, um laço valia 100 unidades, uma flor de lótus valia 1.000, um dedo dobrado valia 10.000, um girino representavam 100.000 unidades, uma figura ajoelhada, talvez representando um deus valia 1.000.000.



Segundo ressalta Gerdes (2011, p.146) Os chamados ‘números árabes’ utilizados progressivamente, a partir do século 9, no ‘Oriente’, desde da Ásia central até ao Egito, e mais tarde em algumas regiões ao sul da Saara onde a

Islã se estabeleceu, são os seguintes dez símbolos: Contudo, no ‘Ocidente’ muçulmano, ou seja, primeiro no Maghreb (Noroeste de África) e depois na Andaluzia (na Península ibérica), se transformaram e se utilizaram, desde o século 11, os símbolos de origem indiana até obterem a forma 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. É esta forma que mais tarde se transmitiu para outros países da Europa e do Mundo, inclusive o Brasil. Por outras palavras, a variante da notação decimal posicional que se utiliza e se ensina no Brasil vem do noroeste da África medieval.

Podemos citar também algumas figuras extraídas do livro desenhos da África de Gerdes (1997).



Esta figura apresenta um exemplo de um desenho feito na areia. O desenho consiste em uma única linha fechada à volta de uma rede retangular de pontos de referência. A linha representa o percurso percorrido por uma galinha de mato que pretende fugir de um caçador.

Sugestão de leitura o livro: Pitágoras Africano, este livro deixa bem claro que alguns conteúdos matemáticos foram descobertos na África

Após a elaboração deste plano, partimos para a execução das oficinas

Realização das oficinas

Após muitas pesquisas, debates e orientações decidimos apresentar o projeto, que abaixo ele foi aprovado pela comissão.

Apresentação: o ciclo de debates e oficinas visa contribuir para a formação inicial e continuada de professores de matemática da educação básica (anos finais do ensino fundamental e ensino médio) - de escolas públicas, privadas, ou ainda estudantes das licenciaturas em matemática em instituições oficiais de ensino superior. Os debates remetem à formação para a organização da atividade pedagógica relacionada ao ensino de matemática, de modo geral, e, especificamente, em relação ao ensino de geometrias. A ênfase será à produção de conhecimento geométrico no continente africano, especialmente em relação à presença e caracterização de fractais naquela cultura e, consequentemente, à superação do ensino exclusivo de geometrias euclidianas nas práticas de ensino, em uma perspectiva da Teoria Histórico-Cultural. Os pressupostos metodológicos, coerentemente, adotam aspectos do materialismo histórico-dialético, especialmente as teorias histórico-culturaisaprendizagem. Serão propostas 5 (cinco) debates e oficinas, que perfazem uma carga horária total de 30 horas. O ciclo é composto por 6 (seis) encontros em que serão debatidos aspectos do ensino tradicional de geometrias na educação básica, problematizando a ênfase excessiva atribuída à geometria euclidiana e sua relação com práticas eurocêntricas, em detrimento de geometrias não-euclidianas predominantes em outras culturas, a exemplo da geometria fractal e sua presença na arte, na arquitetura e várias práticas sociais da cultura africana.

Cada debate/oficina terá duração de 6 (seis) horas, sendo 3 (três) horas ocorrendo de modo síncrono em plataforma acessível aos participantes e outras 3 (três) horas a ser realizada de modo assíncrono, contemplando estudos e reflexões que visam embasar a participação no próprio ciclo de debates e também eventuais resignificações dos participantes a respeito das próprias práticas pedagógicas. Dessa forma, o ciclo de debates perfaz uma carga-horária total de 30 horas. Os encontros síncronos também serão gravados e disponibilizados aos participantes, para serem acessados de modo assíncrono, sem prejuízo da interação social relacionada à concepção metodológica. Justificativa A lei 10.639, de 9 de janeiro de 2003, estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática História e Cultura Afro-Brasileira. A lei estabelece a obrigatoriedade dos estudos sobre a "História da África e dos Africanos, a luta dos negros no Brasil, a cultura negra brasileira e o negro na formação da sociedade nacional, resgatando a contribuição do povo negro nas áreas social, econômica e política pertinentes à História do Brasil" (BRASIL, 2003, s/p.). Em seu artigo 2º, a lei ainda especifica que "os conteúdos referentes à História e Cultura Afro-Brasileira serão ministrados no âmbito de todo o currículo escolar" (BRASIL, 2003, s/p, destaque nosso). Com isso a lei estabelece que é responsabilidade de todos os componentes curriculares da educação básica a aprendizagem e o reconhecimento da cultura africana e sua presença na produção de conhecimento da humanidade. Há, contudo, certa resistência em algumas áreas do conhecimento, em razão de confusão do trecho em que a lei determina que, em especial, tais estudos devem ser realizados no contexto das "áreas de Educação Artística e de Literatura e História Brasileiras" (BRASIL, 2003, s/p). Entendemos, contudo, que esta especificação de áreas não caracteriza reserva de exclusividade, mas sim exemplo de potencialidades. Como indica o parágrafo 2º da lei, o ensino de história e cultura africana é responsabilidade de todos os componentes curriculares, incluindo, claro, a matemática. Assim, o ciclo de debates proposto visa promover aspectos da formação de professores, ou futuros professores, de matemática da educação básica enfatizando o contexto das compreensões dos professores a respeito do movimento histórico de produção do conhecimento matemática, das influências de povos e culturas eurocêntricas naquilo que passamos a identificar como objetos do ensino e da aprendizagem de matemáticas, em geral, e de geometrias, especificamente, em um contexto de expropriação cultural e epistemicídio que tende a invisibilizar a importância das produções de conhecimentos afrocêntricas. Os debates justificam-se também na medida em que contribuem para a reflexão dos processos de formação de professores no que diz respeito à organização da atividade de ensino de geometrias com suas potencialidades para o reconhecimento da importância da cultura africana na produção dessa área do conhecimento. Tipo Ciclo de debates Programação O objetivo geral do ciclo de debates é possibilitar o reconhecimento de aspectos do conhecimento geométrico, especialmente em relação aos fractais, na cultura africana e suas potencialidades na organização da atividade de ensino na educação básica, de modo a superar a exclusividade de práticas tradicionais que possuem a produção eurocêntrica do conhecimento como pressuposto e colocar ênfase na produção de conhecimento afrocêntrica. A programação do ciclo de debates remete ao seguinte cronograma:

Oficina/debate 1: Título: Superando a geometria euclidiana: autossemelhança e complexidade infinita.

Resumo: Os debates giram em torno da problematização da quase exclusividade da geometria euclidiana, a partir da obra "Os Elementos", durante as práticas tradicionais de ensino de geometria, em detrimento de outras geometrias que não possuem os postulados de euclides como verdades absolutas e pontos de partida, como é o caso da geometria fractal que coloca em discussão a possibilidade de dimensões fracionárias (fractais) de composições geométicas. Durante os debates são enfatizadas as noções intuitivas de autossemelhança e complexidade infinita e de como estas noções implicam no reconhecimento da possibilidade de que uma forma geométrica pode ser reproduzida (autossemelhança) infinitamente de modo que cada reprodução guarda características vinculadas à figura que lhe dá origem (complexidade infinita). O debate síncrono ocorre na data especificada e os participantes complementam os debates de modo assíncrono em plataforma virtual para este fim.

Oficina/debate 2: Generalizações a partir do triângulo de Sierpinski

Resumo: O debate gira em torno da percepção de padrões de autossemelhança e complexidade infinita presentes no triângulo de Sierpinski, que é um fractal com dimensão de aproximadamente 1,6 (não inteira, o que está além da compreensão possível na geometria euclidiana). São discutidos elementos no estudo do triângulo que relacionam compreensões euclidianas (através das comparações entre áreas de triângulos equiláteros e análises de componentes geométricas euclidianas) até o reconhecimento de que a complexidade infinita se relaciona com a necessidade de superação da geometria euclidiana. O debate síncrono ocorre na data especificada e os participantes complementam os debates de modo assíncrono em plataforma virtual para este fim.

Oficina/debate 3: Reconhecendo a autossemelhança e a complexidade infinita na estratégia vencedora da Torre de Hanói.

Resumo: A Torre de Hanói é um jogo bastante conhecido entre professores de matemática, pois a estratégia vencedora é uma aplicação direta de uma função exponencial. Como o comportamento exponencial (e seu inverso, logaritmo) são padrões que modelam muitos fenômenos na natureza e a geometria fractal também está presente na geometrização da natureza, em maior frequência até que a geometria euclidiana, os debates remetem à essa presença da geometria fractal na compreensão da realidade "natural" (decorrente de fenômenos naturais) a partir de um exemplo particular de modelagem do jogo Torre de Hanói. O debate síncrono ocorre na data especificada e os participantes complementam os debates de modo assíncrono em plataforma virtual para este fim.

Oficina/debate 4: Autossemelhança e complexidade infinita em fractais africanos.

Resumo: O debate trata especificamente das ideias de autossemelhança e complexidade infinita, discutidas nos encontros anteriores, e sua relação com os fractais reconhecidos na arte, moda, arquitetura e cultura geral de povos africanos. A principal referência mediadora do debate é a obra "African Fractals: modern computing and indigenous design", de autoria do pesquisador do tema Fractais Ron Eglash. O debate síncrono ocorre na data especificada e os participantes complementam os debates de modo assíncrono em plataforma virtual para este fim. Oficina/debate 5: Produção do conhecimento geométrico no continente africano: influências histórico culturais invisibilizadas. Resumo: No debate de encerramento do ciclo o foco das discussões remete à superação da exclusividade de práticas eurocêntricas nas atividades de ensino, como é o caso, por exemplo, da geometria euclidiana, tratando da compreensão histórico cultural de superação que remete ao reconhecimento da importância de culturas diversas e de que tais culturas influenciam diretamente os processos de aprendizagem. A ideia de superação, nessa perspectiva, não é sinônimo de retirar valor, mas de análise crítica que pretende retirar vieses e enfatizar os movimentos históricos e culturais que possibilite a transformação. O debate síncrono ocorre na data especificada e os participantes complementam os debates de modo assíncrono em plataforma virtual para este fim, incluindo nas discussões a avaliação da relevância do ciclo de debates para suas próprias práticas docentes, bem como realizado suas auto-avaliação.

Lembrando: O primeiro problema apresentado por Euclides, em “Os Elementos” é: “Sobre uma linha reta determinada descrever um triângulo equilátero”. (EUCLIDES, Problema 1, p. 9)

Oficina 1: Superando a geometria euclidiana: autossemelhança e complexidade infinita.

Tempo estimado - 3 horas

Parte 1: conhecendo os sentidos pessoais iniciais do público participação (duração: até 45 minutos)

Apresentação da coordenadora das oficinas e debates: contar a formação, sobre a atuação profissional e sobre o tema pesquisa de mestrado.

Apresentação do coordenador do ciclo de eventos: contar a formação, sobre a atuação profissional e sobre os temas de pesquisa,enfatizando as relações ético raciais.

Apresentação dos participantes: pedir para se apresentarem contando: nome; área de formação e atuação; se é professor ou estudante da licenciatura; nível de apreço pelos conhecimentos geométricos e como esse nível de apreço aparece no ensino de geometria; se trabalha ou se já trabalhou relações étnicoraciais no ensino de matemática, em geral, e de geometria, em particular; e,finalmente quais as expectativas em relação à participação na oficina.

Parte 2: Discutindo práticas de ensino de geometria euclidiana Assistir ao vídeo “Arte e Matemática

Colocar em discussão as práticas de ensino de matemática, tanto durante as práticas de ensino quanto durante as práticas formativas (formação inicial e continuada), no que diz respeito ao ensino de geometria.

O objetivo dessa discussão é auferir sentidos pessoais a respeito da presença e importância atribuída às geometrias euclidianas e não euclidianas nas práticas docentes (do ponto de vista de aluno e de professor). Para orientar as discussões as seguintes perguntas são relevantes:

- Sabemos o que diz a BNCC a respeito das práticas de ensino que visam desenvolver competências e habilidades relacionadas à geometria?

Resposta final: depois de ouvir as considerações dos participantes,

apresentar a Segundo a BNCC (p. 271) “a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nesta unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas, espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos.

Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.

2) Não há, na BNCC, habilidade ou competência específica que trate de Geometrias não-euclidianas. No entanto, a Geometria que Einstein usa para descrever sua compreensão do universo não é euclidiana e sim esférica, e a geometria da natureza, que vimos no vídeo, também não é euclidiana e sim fractal. Então uma pergunta: será que apenas a geometria euclidiana dá conta de “resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” como propõe a BNCC?

Resposta esperada: A geometria Euclidiana é adequada e suficiente para compreender e resolver problemas relacionados às produções humanas, pois é a referência geométrica utilizada para as construções que os seres humanos realizam. Mas para compreender o mundo físico, que envolve a natureza e o universo, a geometria euclidiana não “dá conta” de subsidiar todas as interpretações e resolver problemas. Limitando a participação das pessoas nas vivências sociais à sua compreensão. Por isso é importante que, ainda que o currículo oficial (representado, por exemplo, pelas indicações da BNCC) não ofereça indicações oficiais sobre o ensino de geometrias não euclidianas, devemos “aproveitar” oportunidades em nossas práticas para aproximar os sentidos geométricos euclidianos dos nossos estudantes de significados geométricos não euclidianos produzidos historicamente pela humanidade.

Parte 3: aproximando sentidos euclidianos de significados não euclidianos.

Problema 1: construir um hexágono.

Vamos resolver a esse primeiro problema, lembrando que, para Euclides, para uma resolução ser válida precisamos construir com uma régua não graduada e um compasso. Vamos simular essa construção no Geogebra, mas pensando na ideia de construir com uma régua sem graduação e um compasso. Vamos ainda anotar o “passo a passo” para a construção... (até 3 minutos para os professores construírem e compartilharem com o grupo o “passo a passo” da solução).

Construir polígonos regulares com quaisquer quantidades de lados era importante para os gregos da época de Euclides, pois figuras regulares, em que lados e ângulos são iguais remetem à ideia de simetria, que se confunde com a noção de beleza junto com a ideia de proporção na geometria euclidiana. Assim a grande sacada de Euclides foi partir de uma forma com “infinitos” (ou, indefinidos, como ele chamava) lados e subdividir essa forma de modo a encontrar pontos que a dividissem em partes iguais. Essa figura de infinitos lados, como sabemos hoje, é a circunferência. Assim, construir um polígono com n lados é o mesmo que dividir a circunferência em n partes iguais. Problemas relacionados à construção de polígonos de n lados, quando n é uma potência de 2 maior ou igual a 4, não era um problema. Por quê?

Resposta esperada: Porque basta traçar o diâmetro da circunferência (que a divide em duas partes) e depois ir traçando as bissetrizes dos ângulos de cada divisão... assim, 2 se torna 4 (quadrilátero), 4 se torna 8 (octógono), 8 se torna 16... e assim por diante...

Um problema surge, então, quando precisamos construir polígonos que têm um número ímpar de lados e também quando há um número par, mas que não é potência de 2.

Avançando um pouco a partir da proposição de Euclides, vamos tentar construir um triângulo equilátero (regular) inscrito em uma circunferência, o que equivale a solicitar que se divida uma circunferência em 3 partes iguais. (tempo breve para resolução). Ora, tendo dividido a circunferência em 3 partes, agora a mediatriz dos lados nos ajuda a construir alguns múltiplos pares de 3... ou seja, metades dos pentágono regular. Após a construção do pentágono, discutir sua área... conhecendo sua área,traçar as diagonais. Verificar que há uma relação entre a área do pentágono original e a área do pentágono no interior da estrela de cinco pontas... que relação é essa?

E quando traçamos as diagonais desse triângulo mais interno... ele define outro Pentágono... qual sua área? Se repetirmos essa construção indefinidamente – como diria Euclides –poderíamos encontrar a área do pentágono encontrado na n-ésima repetição? Quantas vezes, teoricamente, podemos repetir essa subdivisão de pentágonos? Será que é possível encontrar a soma de todas essas infinitas áreas de pentágonos menores?

Oficina 2: Generalizações a partir do Triângulo de Sierpinski

Apresentação do Tecido de Kante

Vamos falar um pouco sobre o que podemos observar sobre o tecido Kante

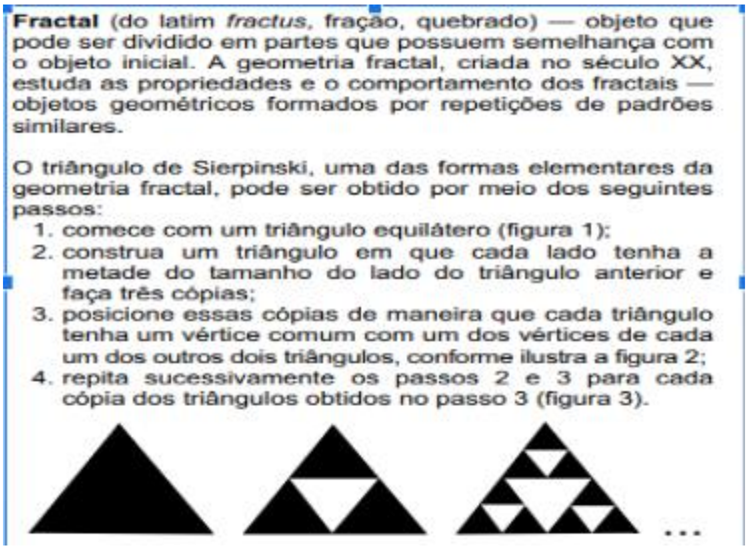
Padrões Específicos

Quantos triângulos podemos identificar na segunda estampa que destacamos?

Como calcular as áreas desses triângulos ?

Há relação entre elas ? Se sim, quais são?

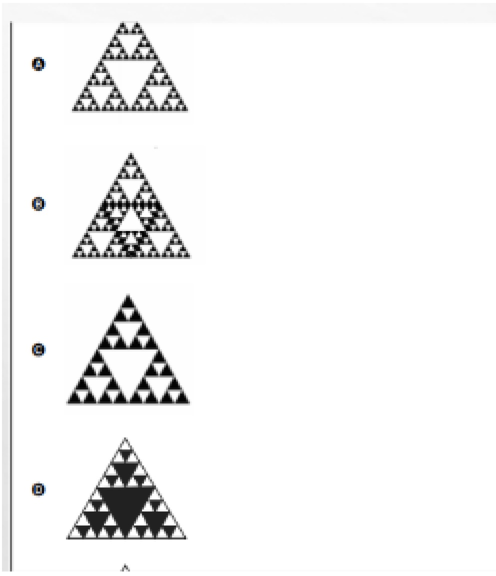
Questão do ENEM



Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).



Contextualizando a questão do ENEM

- Há relações entre o triângulo descrito na questão do enem e alguma das estampas que destacamos do tecido kante? Se sim, quais?
- Quantas vezes, teoricamente, podemos repetir essa subdivisão de triângulos?

Apos o video abaixo partimos para sinteses e conclusão

https://www.youtube.com/watch?v=278RBMssIY4

Oficina 3: reconhecendo a autossemelhança e a complexidade infinita na estratégia vencedora da Torre de Hanói.

Iniciaremos a oficina com a apresentação do jogo Torre de Hanoi

Regras do Jogo

- Movimentar uma só peça (disco) de cada vez.
- Uma peça grande não pode ficar em cima de uma menor que ela.
- Não é permitido movimentar uma peça que esteja abaixo de outra.

Nos links abaixo podemos jogar:

https://www.geogebra.org/m/va3k4ggq

https://www.somatematic.com.br/jogos/hanoi/a

Conhecendo o Jogo Mancala

https://mancala.playdrift.com/

Após os jogos partiremos para a Problematização

Considerando um triangulo equilátero inicial de lado L, perímetro e área, simultaneamente ao processo iterativo para obter ao processo iterativo para obter o fractal triangulo de Sierpinski no Geogebra exploraram a relação numérica do número de triângulos, comprimento de cada lado, perímetro de cada triangulo e perímetro total, área de cada triangulo e área total L. como você descreveria?

Mão na massa

Hora dos participantes preencher a tabela abaixo:

Figura	Interação(N)	Nº de triângulos	Comprimento Do lado	Perímetro De cada triangulo	Perímetro Total	Área de cada triangula	Área Total
							
							
							
							
⋮							
							

Conclusões e Síntese

Oficina 4: autossemelhança e complexidade infinita em Fractais Africanos

Apresentação do texto:

Essas tranças são de origem africana. A mais antiga é a nagô, que consiste numa trança rasteira, rente ao couro cabeludo. As nagôs são muito utilizadas por quem está passando pelo período de transição capilar, ou seja, saindo de algum tipo de alisamento ou tratamento químico para voltar a usar as formas naturais dos fios. Com a evolução dos tempos, as tranças também sofreram mudanças em seus tipos, nomes e significados. Segundo o cabeleireiro Wagner Lucenã, há indícios simbólicos das tranças na Namíbia e em outros locais da África. Há vários grupos, religioso e sociais, que usam e abusam das tranças.

Durante o período da escravidão no Brasil, as tranças eram utilizadas para identificar as tribos a que pertenciam os escravos. Por meio dos seus desenhos, elas também serviam como mapas e rotas para as fugas planejadas. "O desenho do ato de trançar transmite valores culturais e históricos, além de servirem para identificar a posição social, a idade, o estado civil e a religião", afirma a especialista em cacheados e crespos e proprietária do Studio Afro, em Brasília.

Segundo Juliana Henrik a trança Africana, especificamente a nagô, é bastante antiga na África. Penteados com tranças abrangem um amplo terreno social: religião, parentesco, estado, idade, etnia e outros atributos de identidade podem ser expressos em penteado. Tão importante quanto o desenho é o ato da trança, que transmite os valores culturais entre as gerações, exprime os laços entre amigos e estabelece o papel do médico profissional.

Há uma grande variedade de estilos tradicional de tranças africanas, que vão desde curvas complexas e espirais para a composição estritamente linear. Pode parecer estranho olhar um modelo de trança e comparar a geometria, mas estes são os estilos bastante tradicionais na África. A matemática faz parte do penteado Africano e, como muitos outros africanos no Novo Mundo (escravidão), o conhecimento sobre ele sobreviveu.

Termos étnicos como Nagôs, Angolas, Jejes e Fulas representavam identidades criadas pelo tráfico de escravos, e cada termo continha um leque de tribos escravizadas de cada região. Nagô era o nome dado a todos os negros da Costa dos Escravos que falavam o Iorubá. Mas muita gente não sabia que as divisões e reconhecimentos de cada um era feito devido a seu penteado que contém sempre um mapa para ajudar nas suas longas caminhadas e traçados.

Na Grécia, e depois em toda a Europa durante a Idade Média (essa é outra história que vou contar pra vocês depois), a trança foi adotada pela maioria das mulheres.

No início do século XV, com a escravidão das sociedades africanas, o cabelo exerceu a importante função de condutor de mensagens. Nessas culturas, o cabelo era parte integrante de um complexo sistema de linguagem. A manipulação do cabelo era uma forma resistência e de manter suas raízes. Coisa que atualmente vem tendo um grande poder não só nas mulheres e sim na sociedade como um todo.

As tranças serviram como pano de fundo de diversos movimentos como, Marcha dos Direitos Civis nos Estados Unidos, o aparecimento de movimentos negros

Vamos assistir um vídeo para entender um pouco mais como o **Black Power** e as Panteras **Negras**, que lutavam pelos direitos e enaltecem a cultura afro.

Tranças, Trançadeiras, Etnomatemáticas e o Currículo

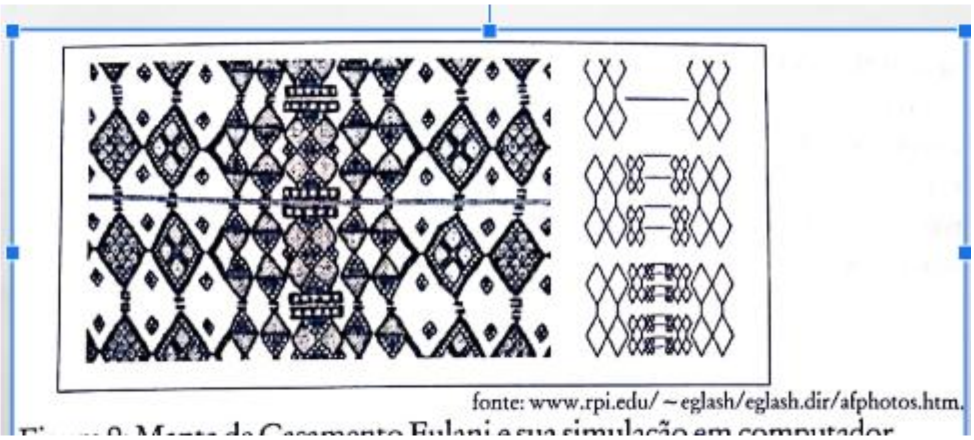
- https://www.youtube.com/watch?v=i240l0qrnaw

Apresentação e Confecção da pulseira de Macramê

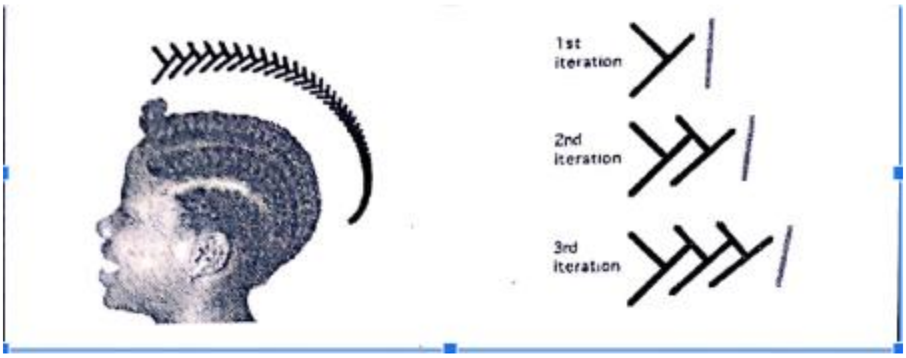
Receita para confecção das pulseiras

- Cortar um papelão no diâmetro do CD e marcar o centro, depois dividir o CD em oito partes, numerar as diagonais ,fazer um corte de mais ou menos 2 cm nas linhas ,fazer uma leve circunferência no CD após este processo vamos utilizar os fios ,usaremos 3 fios e meio ,então vamos dobrar os 3 frios ao meio e depois e aquele fio que está na metade vamos juntar a dobra dos 3 fios, após este movimento iremos dar um nozinho e colocar dentro da circunferência menor ,dividir as linhas na posição contraria vai sobrar um espaço a partir deste espaço vamos contar 3 casas para a esquerda e depois trocar com a que está vazia e assim sucessivamente.

Conversas sobre as aplicações da geometria fractal



Fractais tridimensionais



- O que podemos observar da figura dos fractais tridimensionais relacionando com a pulseira que acabamos de confeccionar?

Comparando as pulseiras com os fractais abaixo:

Existem diversas tranças que ressaltam a geometria fractal e as suas características nos exemplos acima podemos notar alguns quais seria?

Na geometria fractal também podemos padrões que se repetem tanto na arquitetura, nas artes, na medicina dentre outros.

Apresentação do vídeo

- https://www.youtube.com/watch?v=gdwe2jzbuxk

Conclusão e síntese

Oficina 5: Produção do conhecimento geométrico no continente africano: influências históricas culturais invisibilizadas.

Apresentação dos objetos trazidos pelos alunos sobre que são fractais (25 min).

Definição de fractal:
Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas da sua construção podem dar uma ideia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro.

Propriedades do fractal

A autossemelhança, a complexidade infinita e a sua dimensão; nela, um ponto possui dimensão zero, uma linha possui dimensão um, uma superfície possui dimensão dois e um volume possui dimensão três.

O Disco de Poincaré é um Fractal?

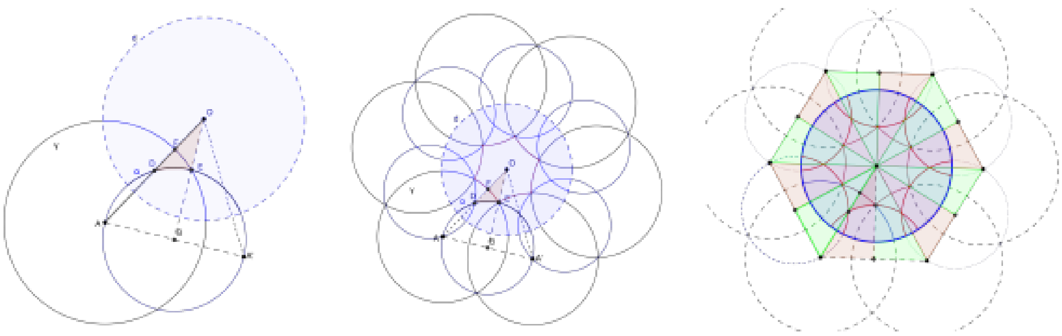
Construção do Disco de Poincaré

Vamos tessela o Disco de Poincaré por meio de triângulos congruentes aos triângulos OEF e DEF. Para isso, rotacione os triângulos e as circunferência α e γ um ângulo de 60° em torno de O no sentido antihorário até preencher o Disco de Poincaré. Observe que as interseções das circunferências formam o hexágono hiperbólico.

Dado o ponto D na circunferência α, vamos construir um conjunto de circunferências passando por D. Para isso, primeiramente deve-se encontrar os centros dessas circunferências que estão sobre P B. Vamos rotacionar o segmento AP (m) um ângulo de 30º sobre D obtendo o segmento m0, que intercepta BD no ponto P0. De maneira semelhante, rotaciona-se m0 e m00 obtendo as intercessões P00, P000 sobre o segmento PB.

Construa as circunferências ortogonais ao Disco de Poincaré d, centradas nos pontos P0, P00, P000, de modo que todas passem por D, como está representado na figura.

Deve-se aplicar rotação nas circunferências construídas.



Olhando as construções e observando a autossemelhança que a ultima figura nos traz concluir que o disco de Poncairé pode ser considerado um fractal.

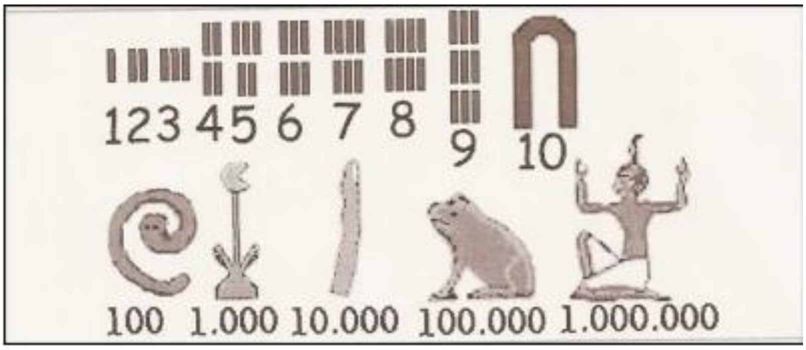
2ª Parte: compartilhando vivências sobre as questões étnico-raciais no contexto escolar

Vídeo sobre as minhas vivencias

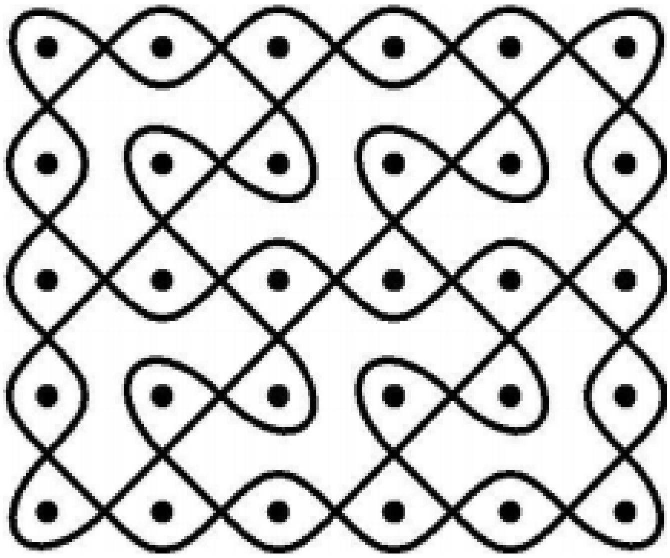
3ª Parte: conhecimentos africanos

O nosso sistema de numeração é indoarábico, porém ao estudarmos Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), Base Curricular Nacional (BNCC) e Curriculum Paulista nos deparamos com outros sistemas e porque não ressaltamos o sistema egípcio, afinal o Egito, é um país localizado ao norte do continente africano.

O sistema de numeração egípcio baseava-se em sete números chave: 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e 1.000.000, um traço vertical representava 1 unidade, um osso de calcanhar invertido representava o número 10, um laço valia 100 unidades, uma flor de lótus valia 1.000, um dedo dobrado valia 10.000, um girino representava 100.000 unidades, uma figura ajoelhada, talvez representando um deus valia 1.000.000.



Podemos citar também algumas figuras extraídas do livro desenhos da África de Gerdes (1997)



Esta figura apresenta um exemplo de um desenho feito na areia. O desenho consiste em uma única linha fechada à volta de uma rede retangular de pontos.