PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

# PRODUTO EDUCACIONAL:

## *Tarefas de Números Racionais para o Ensino Médio*

LUCAS ROSA SÁ OLIVEIRA
ARMANDO TRALDI JR

São Paulo (SP)
2023

Produto Educacional apresentado como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituo Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus São Paulo. Aprovado em banca de defesa de mestrado no dia 29/05/2023.

## AUTORES

**Lucas Rosa Sá Oliveira:** Licenciado em Matemática pelo UNASP (2014). Especialista em Educação Matemática pela FMU (2020) e Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo IFSP (2023).

**Armando Traldi Jr:** Licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2002). Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2002) e Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2006). Atualmente é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP). Tem experiência na área de Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Currículo e a Formação de Professores de Matemática, Matemática a ser Ensinada em Curso de Licenciatura em Matemática e Educação Inclusiva: formação de conceitos de Matemática por estudantes surdos.

## SUMÁRIO

## Apresentação

Caro (a) Professor (a),

Este material, apresentado como Produto Educacional, é parte integrante de nossa pesquisa intitulada “TAREFAS DE APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA: THA de números racionais”, desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), sob orientação do Professor Doutor Armando Traldi Jr.

Nosso Produto Educacional consiste em apresentar quatro tarefas de matemática sobre as representações e os significados dos números racionais para serem desenvolvidas com estudantes do Ensino Médio.

Este produto foi elaborado a partir do estudo da Trajetória Hipotética de Aprendizagem e dos Diferentes Significados dos Números Racionais, com o intuito de dar suporte ao professor de maneira que os estudantes construam novos conhecimentos a partir de seu conhecimento prévio e da prática de tarefas matemáticas sobre esse conjunto no Ensino Médio.

Que todos tenham uma ótima leitura e que esse produto possa contribuir para suas futuras práticas pedagógicas.

Lucas Rosa Sá Oliveira

Armando Traldi Jr

## 1. TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM (THA)

O pesquisador Martin Simon desenvolveu um modelo de ensino em 1995, que possibilita identificar os principais aspectos importantes para o planejamento e desenvolvimento de aulas de matemática. Esse modelo tem como base a perspectiva construtivista de Jean Piaget (1896 - 1980), que apresenta o estudante como sujeito ativo no papel de sua aprendizagem, e o professor como mediador na construção do conhecimento.

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) “é composta por três componentes: o objetivo de aprendizagem que define a direção, as tarefas de aprendizagem, e o processo hipotético de aprendizagem – uma previsão de como o pensamento e a compreensão do aluno evoluirão no contexto das tarefas de aprendizagem”. (SIMON, 1995, p. 136, tradução nossa). Por isso, a THA proporciona ao professor um modelo de ensino, que pode contribuir para o planejamento e desenvolvimento de tarefas matemáticas relevantes para o estudante, além de possibilitar inovadoramente a investigação do processo de ensino-aprendizagem de matemática.

Diante disso, o autor descreve que para elaborar a THA deve-se considerar alguns aspectos importantes: (a) a identificação clara do objetivo de aprendizagem do professor; (b) o levantamento do conhecimento matemático atual dos estudantes; (c) o planejamento de tarefas matemáticas para alcançar o objetivo; e (d) as tarefas matemáticas como ferramentas para aprendizagem de conceitos matemáticos. Após definir o objetivo de aprendizagem, é necessário pensar sobre o processo hipotético de aprendizagem – considerando o conhecimento matemático atual dos estudantes e os desafios que surgirão no percurso do desenvolvimento da THA – que contemplem um conjunto de tarefas matemáticas adequadas ao objetivo. Desse modo, essas etapas podem viabilizar a elaboração de tarefas matemáticas com tarefas eficazes para o ensino-aprendizagem de matemática.

Pires ao utilizar a THA em seus estudos, afirmou que outros conhecimentos do professor de Matemática devem ser considerados na elaboração da THA, destacando:

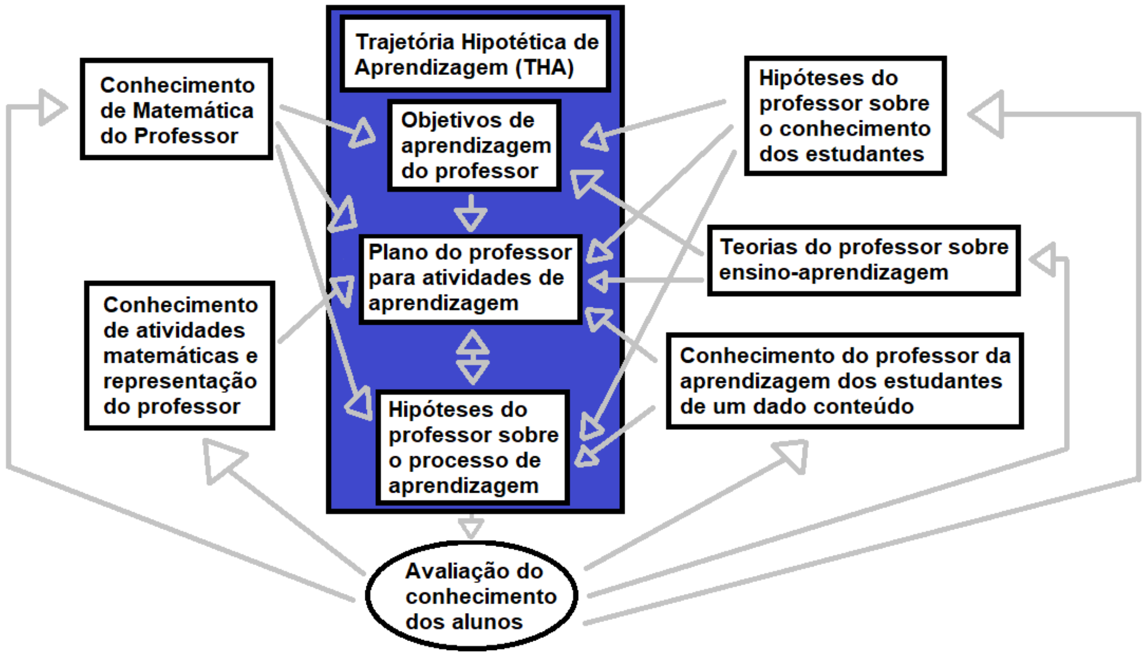
> Teorias de ensino sobre Matemática; representações matemáticas; materiais didáticos e atividades; e teorias sobre como alunos constroem conhecimentos sobre um dado assunto – saberes estes derivados da pesquisa em literatura e/ou da própria experiência docente. (PIRES, 2009, p. 154).

Simon (2004) também discute um conhecimento importante para compreender o desenvolvimento das estruturas mentais dos estudantes, ao realizar as tarefas matemáticas que compõe a THA, denominado mecanismo de relação “atividade-efeito”. Esse mecanismo é uma criação da abstração reflexiva de Piaget, e permite descrever como uma tarefa com objetivos traçados pelos estudantes pode criar novas concepções sofisticadas. O estudante realiza uma tarefa (conjunto de ações) que possibilita ao professor observar os efeitos da tarefa realizada, assim o estudante cria registros mentais (relação da atividade-efeitos), que podem ser analisados e avaliados pelo professor na busca da compreensão do pensamento matemático do estudante.

Nesse sentido, as tarefas possuem potencial para auxiliar estudantes na construção de novos conceitos a partir da perspectiva de relação atividade-efeito. Destacam-se três tipos de tarefas: tarefas iniciais, realizadas com os conhecimentos prévios dos estudantes; tarefas reflexivas, levam os estudantes a refletirem e geram abstração de regularidades na relação atividade-efeito; e tarefas de antecipação, que exigem abstração e análise de regularidades nessa relação. (SIMON; TZUR, 2004).

De acordo com Simon (1995), os elementos de construção da THA denominado *“Ciclo de Ensino de Matemática”*, representam as inter-relações cíclicas que ocorrem entre o conhecimento do professor, a avaliação do conhecimento dos estudantes, a realização das tarefas e a THA, como mostra a figura 1.

**Figura 1 – Domínios do conhecimento do professor, THA e interações com os alunos**




Fonte: Simon (1995, p. 137, tradução nossa).

As tarefas matemáticas elaboradas são baseadas: (i) nos objetivos de aprendizagem do professor; (ii) nas hipóteses do professor sobre o conhecimento dos estudantes; (iii) nas hipóteses do professor sobre o processo de aprendizagem; (iv) no conhecimento de Matemática do professor; (v) no conhecimento de tarefas matemáticas do professor; (vi) nas Teorias de Ensino-Aprendizagem do professor; (vii) no conhecimento do professor sobre a aprendizagem dos estudantes sobre um conteúdo; e (viii) na avaliação do conhecimento dos estudantes.

Essas hipóteses são baseadas nas tarefas envolvidas e são interdependentes. Também, o conhecimento do professor sobre os estudantes possibilita a criação do objetivo de ensino e das hipóteses, que contribuem para o desenvolvimento dos processos hipotéticos de aprendizagem e das tarefas matemáticas.

Por ser construída nesse processo, a THA está sujeita a modificações do início ao fim de seu desenvolvimento. Dessa maneira, a palavra "*trajetória*" apresentada por Simon (1995) representa, por exemplo, uma viagem planejada que no caminho há pequenos ajustes devido às condições e situações encontradas sem alterar a condição de adquirir novos conhecimentos, o caminho é a trajetória e o caminho antecipado é a trajetória hipotética.

Portanto, o professor deve ajustá-la no sentido de refletir sobre o objetivo alcançado, mediando o processo de aprendizagem, e avaliando constantemente os desafios encontrados pelos estudantes nas tarefas a fim de melhorá-las. Os estudantes podem reagir de diferentes maneiras diante do desenvolvimento das tarefas por dependerem de suas experiências matemáticas, então é necessário reformular as tarefas se algum conceito não for alcançado.

Dessa forma, a THA pode possibilitar caminhos para a reflexão sobre a construção de conhecimentos matemáticos e afins; e também, pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, sob uma perspectiva inovadora, na implementação dessa teoria no currículo da Matemática nas escolas da Educação Básica.

O estudante ao resolver uma tarefa por meio de uma sequência de ações já conhecida por ele, pode chegar num momento em que não precise mais realizar essas ações, ao poder antecipar o resultado dessas ações. Diante disso, o conceito matemático pode ser promovido a partir de uma tarefa já conhecida pelo estudante, antecipando o resultado das ações sem ter que realizá-las. (SIMON, 2020).

Ainda, para Simon (2020, p. 10, nossa tradução) “[...] A articulação de um conceito matemático envolve a especificação da compreensão da necessidade lógica e inclui a identificação do conhecimento prévio sobre o qual se baseia essa compreensão”. Então os conceitos matemáticos se desenvolvem por meio das ações dos estudantes, seja física ou mental, e que ao utilizarem ações conhecidas são apoiados na construção de novos conhecimentos sobre seus conhecimentos prévios. Ao antecipar o resultado de ações, de maneira que não precise mais realizar essas ações para determinar o resultado, significa que o conceito matemático foi assimilado pelo estudante.

Ponte (2014, p. 21 - 22) apresenta quatro tipos de tarefas que possuem importância no ensino: (i) tarefa de natureza mais fechada (exercícios, problemas) – relacionada ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes baseados na relação entre dados e resultados; (ii) tarefa de natureza mais acessível (explorações, exercícios) – contribui para o estudante ter um elevado grau de sucesso e confiança em sua resolução; (iii) tarefa de natureza mais desafiante (investigações, problemas) – indispensável para a evolução do estudante na experiência matemática; e (iv) tarefa de cunho mais aberto – essenciais para desenvolver no estudante competências e habilidades ao lidar com situações complexas.

Sendo assim, o professor deve organizar uma sequência de tarefas diversificadas de modo que os estudantes atinjam os objetivos de aprendizagem, conforme Ponte (2014, p. 22):

> além da diversificação das tarefas, é importante que estas proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos, a compreensão dos procedimentos, o conhecimento das formas de representação relevantes e das conexões de cada conceito dentro da Matemática e com outros domínios.

## 2. Números Racionais: representações e significados

Segundo Guidorizzi (2013, p. 19), os números racionais são representados por "$\mathbb{Q} = \left\{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \middle| \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}\right\}$, no qual $\mathbb{Z}$ indica o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -\mathbf{3}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$." Nesse sentido, o ensino dos números racionais tem se tornado objeto de estudo e pesquisa no campo da Educação Matemática, pelos desafios de compreensão das suas representações e seus significados por parte dos estudantes e pela abordagem metódica dos professores. Assim sendo, as principais ideias desenvolvidas sobre os números racionais no currículo escolar tendem a ser abordadas por uma forma específica de interpretação e mecanizada pelos professores, que deixam de lado outras representações e significados que poderiam ser bem mais explorados, mostrando reflexos na compreensão desse conjunto numérico entre estudantes e professores. (KIEREN, 1976).

Os números racionais podem ser representados nas seguintes formas: *numérica* (fracionária $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$, decimal $\mathbf{0,4}$ e percentual $\mathbf{40}\%$) e *geométrica* (figuras divididas em partes iguais). Na forma fracionária, se dividir o numerador 2 pelo denominador 5, obtém-se a forma decimal *0,4*. Esse tipo de divisão pode resultar em um decimal finito ($\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0,5}$) ou decimal infinito conhecido como dízima periódica ($\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \mathbf{0,333}\dots$). Na forma percentual, a noção de *Porcentagem* está na fração cujo denominador é 100, representada por $\boldsymbol{n}\%$ ou $\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{100}}$, assim $\mathbf{0,4}$ pode ser escrita como $\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}}$ ou $\mathbf{40}\%$.

Ainda, pode-se destacar mais uma propriedade importante na representação fracionária, a *Equivalência*. A fração equivalente é a fração que representa o mesmo número ou quantidade e para encontrá-la basta multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número. Por exemplo, a fração $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$ multiplicada por 20, $\frac{\mathbf{2 \cdot 20}}{\mathbf{5 \cdot 20}}$ resulta na fração equivalente $\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}}$, representando o mesmo valor de 0,4.

O pesquisador Kieren (1976) apresentou quatro significados (subconstrutos) básicos e fundamentais no processo de compreensão e construção de número racional: *quociente, medida, razão e operador*. O autor não considera o significado parte-todo como outros pesquisadores, pois para ele essa ideia já está presente no quociente, medida e operador. Porém, é importante para o estudante conhecer esse significado antes de usar os outros.

A relação *parte-todo* significa a divisão do número fracionário $\frac{a}{b}$, em que o todo foi dividido em "$b$" partes sendo consideradas "$a$" partes. Nesse sentido, temos como exemplo a fração $\frac{1}{4}$ que indica que o todo está divido em quatro partes e que uma delas foram tomadas. Pode-se utilizar a representação geométrica para mostrar essa fração de uma forma mais clara, como mostra a figura 2.

**Figura 2 – Representação da Parte-todo**

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

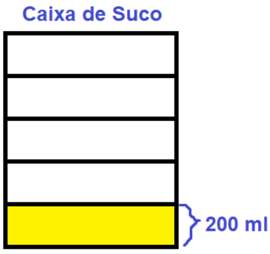
O *quociente* representa o resultado da divisão de dois números inteiros, podendo ser associado a definição formal de números racionais, no qual $\frac{a}{b}$, com $a$ e $b$ sendo inteiros e $b$ diferente de zero. Assim, pode-se afirmar que a fração $\frac{2}{5}$ significa duas unidades de chocolate divididas em cinco parte iguais, por exemplo.

**Figura 3 – Representação do Quociente**


Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A *medida* significa o próprio quociente da ideia de "quanto cabe" e duas grandezas da mesma natureza. Por exemplo, escolhendo a unidade de medida de capacidade, pode-se identificar quantos copos de suco de $200\ ml$ cabem em $1\ litro$ de suco, ou seja, $\frac{200}{1.000}$ ou $\frac{1}{5}$.

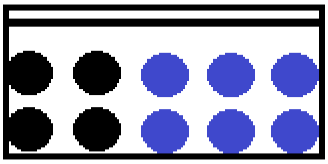
**Figura 4 – Representação de medida**




Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A ideia de *razão* está na comparação de partes com partes e não partes com o todo. Logo, sua representação fracionária pode ser utilizada com índice de comparação entre duas grandezas. Por exemplo, numa caixa com dez bolas, pode-se representar a razão entre bolas pretas e azuis por $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$, assim a cada dez bolas, quatro são pretas e seis são azuis.

**Figura 5 – Representação da razão**

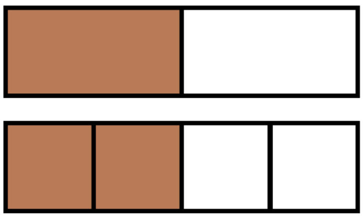


Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Além disso, pode-se associar a ideia de *Proporção* à razão, que significa representar uma igualdade entre duas razões, como mostrado no exemplo anterior, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, tendo que $\frac{4+6}{6} = \frac{2+3}{3}$, isto é, a forma do numerador com o denominador divide pelo numerador do primeiro, a razão é igual.

O *operador* representa as transformações em que um número racional pode sofrer por meio das operações matemáticas básicas. Nesse sentido, pode-se transformar a fração $\frac{1}{2}$ na fração equivalente $\frac{2}{4}$ multiplicando o numerador e denominador por dois, por exemplo.

**Figura 6 – Representação de Operador e Fração Equivalente**



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Também, considerando o conjunto $\mathbb{Q}$, pode-se propor como operador as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais, em especial nas frações.

Assim, a partir de $\mathbb{Q}$, na adição e subtração tem-se:

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times d}+\frac{b\times c}{b\times d}$ e $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times d}-\frac{b\times c}{b\times d}$, utilizando a noção de equivalência efetuar essas operações, transformando os denominadores em valores comuns.

Na multiplicação tem-se:

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$, onde numerador é multiplicado por numerador e o mesmo ocorre com denominador.

E na divisão tem-se:

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}}$, ao multiplicar as duas frações pelo inverso da segunda fração, o que significa dividir a fração por 1.

Em suas considerações sobre a construção do conceito de número racional, Kieren (1993, p. 64 – 65 citado por Rodrigues, 2005, p. 34), propôs um modelo teórico que enfatiza às estruturas cognitivas e apresenta possíveis interconexões entre as ideias que formam o conceito, considerando o conhecimento atual do sujeito até a sua formalização. Esse modelo apresenta um mapa em que se identificam quatro níveis pelos quais deve passar a construção do conceito de número racional:

> [...] o nível dos conhecimentos intuitivos; os subconstrutos; um terceiro nível, obtido a partir dos subconstrutos em direção a um pensamento multiplicativo mais formal; o conhecimento estruturado nos números racionais dentro de um conjunto quociente. (KIEREN, 1993, p.64-65 apud RODRIGUES, 2005, p. 34).

Assim, Kieren verificou por meio de experiências que os estudantes mobilizam diferentes representações e significados dos números racionais para resolver situações-problema. (RODRIGUES, 2005, p. 38). Por exemplo, para resolverem um problema com jarra de suco e copo, utilizam a ideia de razão; para resolverem um problema de repartição de lanche, usam a ideia de quociente, entre outros.

Rodrigues (2005) ressalta que um currículo montado segundo as ideias e orientações de Kieren possibilita uma interligação mais eficaz em vários campos da Matemática. O que se pode notar o quanto as representações e significados dos números racionais são importantes para estudar outros objetos e conceitos matemáticos no Ensino Médio, pois para aprendê-los o estudante tem que usar pelo menos uma representação e significado.

Dessa maneira, se os números racionais fossem considerados apenas uma extensão dos números inteiros ou algoritmo, permaneceriam apenas no campo dos números. Porém, quando se usa a visão dos significados e representações, os números racionais se tornam significativos para aprendizagem do estudante, possibilitando contato com outros domínios da matemática desde os anos iniciais da Educação Básica. (KIEREN, 1976).

**TAREFA I – O dominó das conversões**

***Duração:*** 2 aulas de 50 min.

***Objetivos:***

- Identificar o significado de parte-todo.
- Estabelecer relações entre parte-todo e equivalência.
- Converter representações numéricas e geométricas de números racionais.

***Hipóteses:***

- O significado de parte-todo é parcialmente conhecido pelos estudantes.
- A relação entre parte-todo e equivalência não é compreendida.
- As conversões entre as representações numéricas e geométricas são facilitadas com a compreensão do significado parte-todo e equivalência.

***Material:***

Folha impressa, régua, lápis, lápis de cor, borracha, caneta, régua e tesoura.

***Procedimentos:***

➢ Organizar os estudantes em grupos de 4 ou 5.

➢ Propor que resolvam as tarefas 1, 2 e 3 mediando as interações entre estudantes e professor.

➢ Após a resolução, discutir o significado de parte-todo e equivalência a partir das ideias encontradas na resolução das tarefas.

➢ A partir da compreensão desses significados, orientar os estudantes quanto ao jogo de dominó.

➢ Explicar as regras do jogo: 30 peças divididas em 6 por pessoa considerando 5 pessoas, se o grupo for menor, o que sobrar fica para serem compradas. Quando não houver combinação, deve-se comprar uma peça e passar a vez. Os jogadores decidem quem começa.

➢ Propor que cada grupo jogue pelo menos 3x.

➢ Ao final dos jogos, discutir os resultados esperados e desafios encontrados na resolução das tarefas e do jogo.

**1)** Desenhe um retângulo, divida-o em três partes congruentes e pinte uma.

Responda:

a) Qual é o numerador? Qual é o denominador? Qual é a fração representada?

b) Que significado está representado?

c) Divida as partes ao meio, qual é a fração obtida?

d) Observe os dois desenhos, que relação possuem? O valor mudou?

e) Comentem os principais desafios encontrados pelo grupo na resolução da tarefa.

**2)** Em uma eleição do grêmio de um colégio obteve-se os seguintes resultados: $\frac{1}{2}$ dos votos para a chapa A; $\frac{2}{6}$ dos votos para a chapa B; $\frac{1}{6}$ dos votos para a chapa C. Represente a partir de uma figura geométrica o resultado dessa votação. Houve algum desafio nas etapas dessa solução?

**3)** A partir do significado de parte-todo e equivalência, escreva:

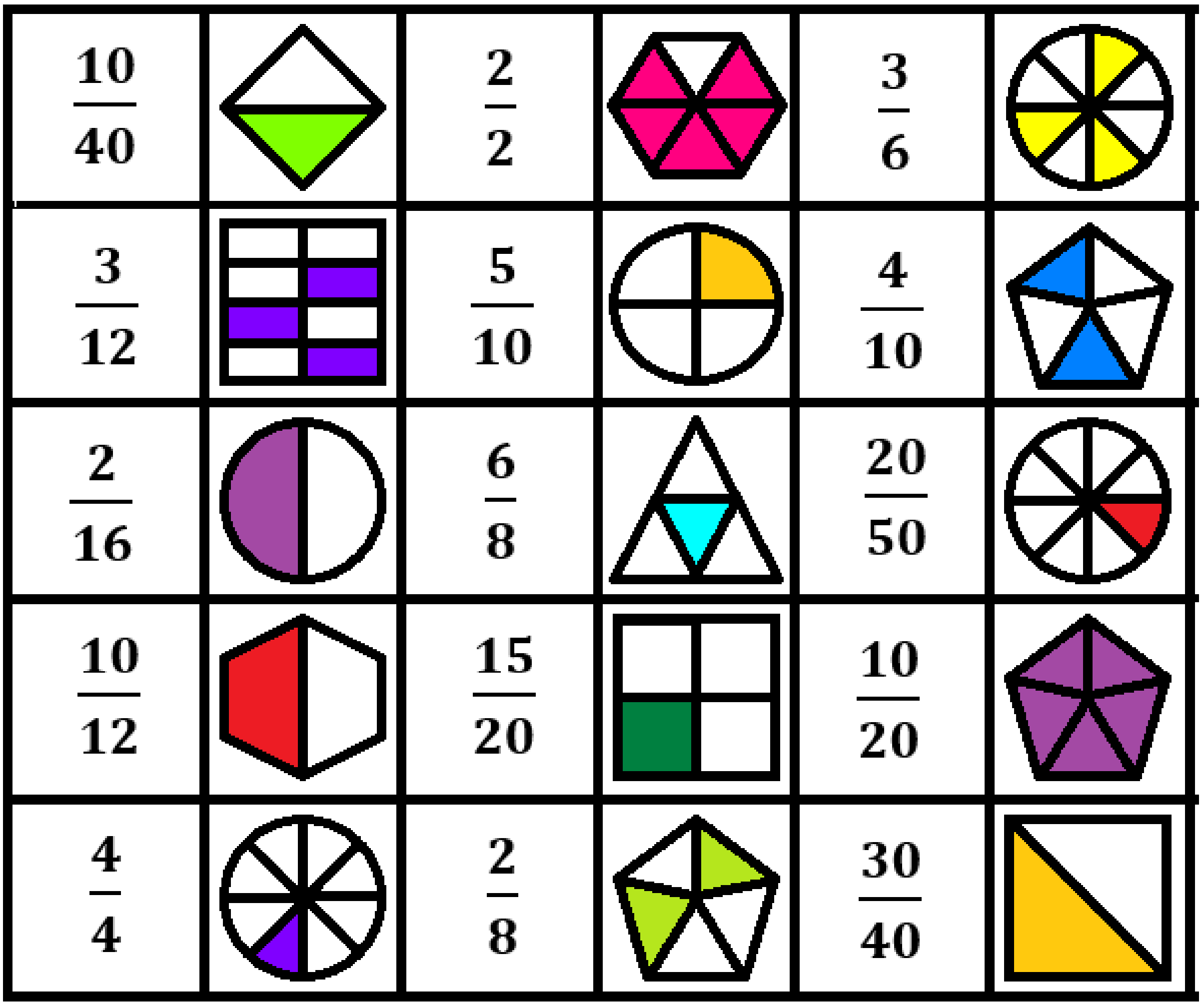
a) Uma fração equivalente a $\frac{1}{4}$ cujo numerador seja 20.

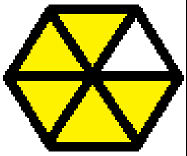
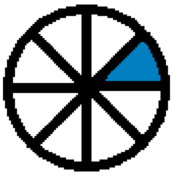
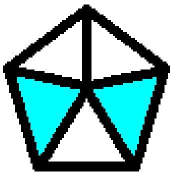
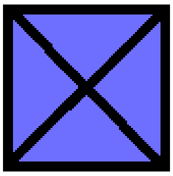
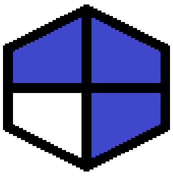
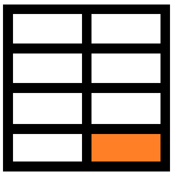
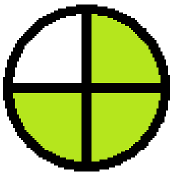
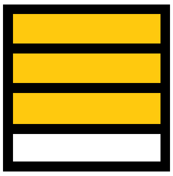
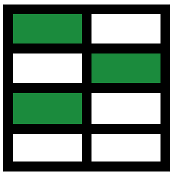
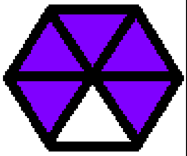
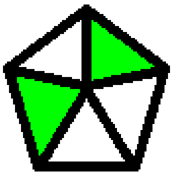
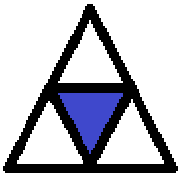
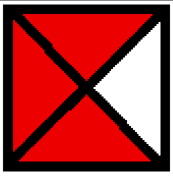
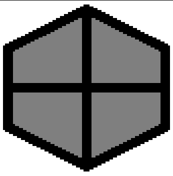
b) Uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$ cujo denominador $30$.

c) Que relação entre parte-todo e equivalência você visualizou?

d) Comentem os principais desafios encontrados pelo grupo na resolução da tarefa.

**Figura 7 - Peças do Dominó**



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{6}{16}$ |  | $\frac{9}{12}$ |  | $\frac{1}{8}$ |  |
| $\frac{2}{4}$ |  | $\frac{3}{8}$ |  | $\frac{4}{4}$ |  |
| $\frac{3}{24}$ |  | $\frac{4}{16}$ |  | $\frac{2}{5}$ |  |
| $\frac{50}{60}$ |  | $\frac{5}{5}$ |  | $\frac{20}{24}$ |  |
| $\frac{30}{80}$ |  | $\frac{20}{24}$ |  | $\frac{8}{20}$ |  |

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

**TAREFA II – Compreendendo o quociente de números racionais e operando com adição e subtração de frações**

***Duração:*** 2 aulas de 50 min.

***Objetivos:***

- Compreender o significado de quociente.
- Identificar e transformar números racionais em frações equivalentes para operar com adição e subtração de frações.
- Converter números racionais na forma decimal para fracionária.

***Hipóteses:***

- Os estudantes compreendem o significado de quociente e número racional.
- Conseguem utilizar equivalência para somar e subtrair frações.
- Identificam as conversões de números racionais no cotidiano.

***Material:***

Folha impressa, papel, lápis, borracha e caneta.

***Procedimentos:***

➢ Organizar os estudantes em grupos de 4 ou 5.

➢ Propor que resolvam as tarefas 1, 2, 3 e 4 mediando as interações entre estudantes e professor.

➢ Após a resolução, discutir o significado de quociente, adição e subtração de números racionais a partir das ideias encontradas na resolução das tarefas e os resultados esperados e desafios encontrados na resolução das tarefas.

**1)** Ana comprou um automóvel que custava $R\$\ 30.000{,}00$ em 60 prestações iguais. Responda:

a) Qual é a fração que representa essa situação? Qual é o valor de cada prestação?

b) O que significa o valor do numerador? E do denominador?

**2)** Um grupo de quatro amigos se reuniu no fim de semana para comer pizza. Sabendo que eles compraram 3 pizzas grandes e comeram a mesma quantia, responda:

a) Qual é a fração que representa essa situação? Quantos pedaços cada um comeu?

b) Qual é a relação entre o item 1 e 2?

**3)** Considerando seus conhecimentos, responda:

a) Considere que você ganhou um sanduíche e mais um terço de outro sanduíche do subway. Qual é a fração que representa o total de sanduíche?

b) A partir da tarefa 2, suponha que um dos amigos comeu $\frac{5}{8}$ pedaços de pizza. Quantos pedaços restaram?

c) Que relação consegue ver nas duas situações?

d) Crie uma situação que envolva a adição ou subtração de frações e explique passo a passo seu raciocínio.

**4)** Considere os números decimais unidades de medida, converta para frações e simplifique se possível:

a) $0{,}5; 1{,}75; -0{,}25; 10{,}5;\ -1{,}25.$

b) Qual é o resultado, em fração, de $0{,}5$ mais $-0{,}25$?

c) Qual é a soma, em fração, de $1{,}75$ mais $-1{,}25$?

d) Qual é a relação entre esses números?

e) Comentem os principais desafios encontrados pelo grupo na resolução da tarefa.

**TAREFA III – Estudando porcentagem, medida e razão a partir da multiplicação e divisão de números racionais**

***Duração:*** 2 aulas de 50 min.

***Objetivos:***

- Compreender o significado de porcentagem, medida e razão.
- Calcular uma multiplicação e divisão de fração de qualquer medida.
- Interpretar o significado de razão entre grandezas.

***Hipóteses:***

- Os estudantes compreendem parcialmente o significado de porcentagem, medida e razão.
- Possuem desafios no processo de multiplicação e divisão de frações.
- Traçam estratégias para resolver problemas de razão.

***Material:***

Folha impressa, papel, lápis, borracha, caneta e recursos tecnológicos (calculadora ou planilha eletrônica).

***Procedimentos:***

➢ Organizar a turma em grupos de 4 ou 5 estudantes.

➢ Propor que resolvam as tarefas 1, 2, 3, 4 e 5 mediando as interações e orientando a respeito dos processos.

➢ Comparar e discutir as resoluções, os resultados e os desafios encontrados na resolução das tarefas.

**1)** Transforme as frações em denominador 100 a partir da multiplicação de frações equivalentes:

a) um meio, três quartos, nove vinte avos e cinco doze e meio avos.

b) Escreva o que representa cada fração.

**2)** Responda:

a) Quanto é um quarto de 1.000 g de farinha? Dois terços de 180 km? Três quintos de $R\$1.000{,}00$?

b) A partir do item a), divida as frações e efetue a multiplicação com a calculadora.

c) Qual é a relação entre essas operações?

**3)** Uma pesquisa realizada num colégio com 400 estudantes sobre gosto musical mostrou os seguintes resultados abaixo.

a) Preencha a tabela conforme cada preferência usando a forma de fração ou decimal.

b) Qual método preferiu utilizar e qual é mais vantajoso?

| Gênero Musical | % de preferência | Total de votos |
|---|---|---|
| **Eletrônica** | **30%** | |
| **Rock** | **18%** | |
| **Pagode** | **12%** | |
| **Funk** | **40%** | |

**4)** Karina comprou 5 kg de chocolate para serem vendidos em embalagens de $\frac{1}{4}$ de kg. Responda:

a) Quantos gramas terá cada embalagem?

b) Qual é o total de embalagens que ela terá para vender?

c) Qual é a fração que representa a razão entre 5 embalagens e o total?

d) Qual é o percentual de 15 embalagens e o total?

**5)** Numa festa há 20 homens e 60 mulheres. Responda:

a) Qual é a razão entre homens e mulheres?

b) Qual é a razão entre mulheres e o total de pessoas?

c) Represente o percentual de cada item. O que essas relações significam?

## TAREFA IV – RESOLVENDO QUESTÕES DO ENEM ENVOLVENDO NÚMEROS RACIONAIS

***Duração:*** 2 aulas de 50 min.

***Objetivos:***

- Desenvolver a habilidade interpretar problemas envolvendo as representações e os significados de números racionais.
- Estabelecer relações entre as representações e os significados de números racionais associados à resolução de problemas.
- Resolver questões do ENEM a partir dos conhecimentos prévios sobre números racionais.

***Hipóteses:***

- Os estudantes conseguem separar as informações no problema.
- Possuem desafios na interpretação do problema sobre qual procedimento utilizar na resolução da questão.
- Usam estratégias diversificadas nos processos de resolução das questões.

***Material:***

Folha impressa, papel, lápis, borracha e caneta.

***Procedimentos:***

- ➢ Organizar os estudantes em grupos de 4 ou 5.
- ➢ Propor aos estudantes que resolvam cada questão individualmente e depois discutam entre si os processos e significados utilizados na resolução de cada problema.
- ➢ Auxiliar os estudantes quanto às dúvidas no processo de resolução, sem dar a resposta, indicando possíveis caminhos envolvendo as representações e os significados dos números racionais.
- ➢ Após a resolução, discutir as ideias sobre os significados dos números racionais encontradas nos problemas, os processos utilizados e os desafios encontrados na resolução de cada questão.

## 1) CONVERSÕES E REPRESENTAÇÕES DE FRAÇÕES E DECIMAL

**Figura 8 – Questão 159 da prova azul do segundo dia do Enem 2020 digital**

Um jogo pedagógico é formado por cartas nas quais está impressa uma fração em uma de suas faces. Cada jogador recebe quatro cartas e vence aquele que primeiro consegue ordenar crescentemente suas cartas pelas respectivas frações impressas. O vencedor foi o aluno que recebeu as cartas com as frações: $\frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ e $\frac{5}{9}$.

A ordem que esse aluno apresentou foi

(A) $\frac{1}{4}; \frac{5}{9}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}$

(B) $\frac{1}{4}; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{9}$

(C) $\frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{5}; \frac{5}{9}$

(D) $\frac{5}{9}; \frac{1}{4}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}$

(E) $\frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{1}{4}; \frac{5}{9}$

**Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.**

## 2) ESCALA, QUOCIENTE, MEDIDA E EQUIVALÊNCIA

**Figura 9 – Questão 153 da prova azul do segundo dia do Enem 2021**

Um parque temático brasileiro construiu uma réplica em miniatura do castelo de Liechtenstein. O castelo original, representado na imagem, está situado na Alemanha e foi reconstruído entre os anos de 1840 e 1842, após duas destruições causadas por guerras.

O castelo possui uma ponte de 38,4 m de comprimento e 1,68 m de largura. O artesão que trabalhou para o parque produziu a réplica do castelo, em escala. Nessa obra, as medidas do comprimento e da largura da ponte eram, respectivamente, 160 cm e 7 cm.

A escala utilizada para fazer a réplica é

A) 1 : 576
B) 1 : 240
C) 1 : 24
D) 1 : 4,2
E) 1 : 2,4

**Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.**

## 3) SISTEMA LINEAR E RAZÃO

**Figura 10 – Questão 163 da prova azul do segundo dia do Enem 2020 digital**

Em um país, as infrações de trânsito são classificadas de acordo com sua gravidade. Infrações dos tipos *leves* e *médias* acrescentam, respectivamente, 3 e 4 pontos na carteira de habilitação do infrator, além de multas a serem pagas. Um motorista cometeu 5 infrações de trânsito. Em consequência teve 17 pontos acrescentados em sua carteira de habilitação.

Qual é a razão entre o número de infrações do tipo *leve* e o número de infrações do tipo *média* cometidas por esse motorista?

Ⓐ $\frac{1}{4}$

Ⓑ $\frac{3}{2}$

Ⓒ $\frac{3}{4}$

Ⓓ $\frac{5}{17}$

Ⓔ $\frac{7}{17}$

**Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.**

## 4) MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÃO E PORCENTAGEM

**Figura 11 – Questão 158 da prova azul do segundo dia do Enem 2021**

Para realizar um voo entre duas cidades que distam 2 000 km uma da outra, uma companhia aérea utilizava um modelo de aeronave A, capaz de transportar até 200 passageiros. Quando uma dessas aeronaves está lotada de passageiros, o consumo de combustível é de 0,02 litro por quilômetro e por passageiro. Essa companhia resolveu trocar o modelo de aeronave A pelo modelo de aeronave B, que é capaz de transportar 10% de passageiros a mais do que o modelo A, mas consumindo 10% menos combustível por quilômetro e por passageiro.

A quantidade de combustível consumida pelo modelo de aeronave B, em relação à do modelo de aeronave A, em um voo lotado entre as duas cidades, é

- **A** 10% menor.
- **B** 1% menor.
- **C** igual.
- **D** 1% maior.
- **E** 11% maior.

**Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.**

## 5) MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÃO COM MEDIDAS

**Figura 12 – Questão 152 da prova azul do Enem 2020 Reaplicação/ PPL**

**Questão 179**

A fim de reforçar o orçamento familiar, uma dona de casa começou a produzir doces para revender. Cada receita é composta de $\frac{4}{5}$ de quilograma de amendoim e $\frac{1}{5}$ de quilograma de açúcar.

O quilograma de amendoim custa R$ 10,00 e o do açúcar, R$ 2,00. Porém, o açúcar teve um aumento e o quilograma passou a custar R$ 2,20. Para manter o mesmo custo com a produção de uma receita, essa dona de casa terá que negociar um desconto com o fornecedor de amendoim.

Nas condições estabelecidas, o novo valor do quilograma de amendoim deverá ser igual a

- **A** R$ 9,20.
- **B** R$ 9,75.
- **C** R$ 9,80.
- **D** R$ 9,84.
- **E** R$ 9,95.

**Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.**

## 6) RAZÃO, PORCENTAGEM E MULTIPLICAÇÃO

**Figura 13 – Questão 150 da prova azul do Enem 2019 Reaplicação/ PPL**

Um país decide investir recursos na educação em suas cidades que tenham um alto nível de analfabetismo. Os recursos serão divididos de acordo com a idade média da população que é analfabeta, conforme apresentado no quadro.

| Recurso | Idade média da população analfabeta ($M$) |
|---|---|
| I | $M \leq 22$ |
| II | $22 < M \leq 27$ |
| III | $27 < M \leq 32$ |
| IV | $32 < M \leq 37$ |
| V | $M > 37$ |

Uma cidade desse país possui $\frac{60}{100}$ do total de analfabetos de sua população composto por mulheres. A média de idade das mulheres analfabetas é de 30 anos, e a média de idade dos homens analfabetos é de 35 anos.

Considerando a média de idade da população analfabeta dessa cidade, ela receberá o recurso

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

**Fonte: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 mai. 2022.**

## 7) ADIÇÃO, MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE FRAÇÕES

**Figura 14 – Questão 170 da prova azul do segundo dia do Enem 2020**

Antônio, Joaquim e José são sócios de uma empresa cujo capital é dividido, entre os três, em partes proporcionais a: 4, 6 e 6, respectivamente. Com a intenção de igualar a participação dos três sócios no capital da empresa, Antônio pretende adquirir uma fração do capital de cada um dos outros dois sócios.

A fração do capital de cada sócio que Antônio deverá adquirir é

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{9}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{4}{3}$

**Fonte: INEP. Disponível em: <HTTPS://WWW.GOV.BR/INEP/PT-BR/AREAS-DE-ATUACAO/AVALIACAO-E-EXAMES-EDUCACIONAIS/ENEM/PROVAS-E-GABARITOS>. Acesso em: 10 mai. 2022.**

## REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, H. **Um curso de cálculo.** 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

KIEREN, T. **Number adn Measurement:** Papers from a Research Workshop. On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. Lesh (ed.) ERIC/SMEARC: Columbus, Ohio, p. 101-144, 1976. Disponível em: < https://eric.ed.gov/?id=ED120027>. Acesso em: 20 abr. 2022.

PIRES, C. **Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon.** Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145 – 166, 2009. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2136>. Acesso em: 15 mar. 2020.

PONTE, J.P. **Práticas profissionais dos professores de matemática.** In: PONTE, J.P. (ed.). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p.343-360, 2014.

ROGRIGUES, W. **Números Racionais:** um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. 2005. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SIMON, M. **Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective.** Journal for Reaserch in Mathematics Education, vol. 26, n. 2, pp 114-145, 1995. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/749205>. Acesso em: 15 mar. 2020.

_____. **What is a Mathematical Concept?** New York University, p. 1-11, janeiro, 2020. Disponível em: < https://www.researchgate.net/publication/338490514_What_is_a_Mathematical_Concept#:~:text=A%20mathematical%20concept%20is%20knowledge,a%20particular%20relationship%20must%20exist.> Acesso em: 22 jun. 2020.

_____; TZUR, R. **Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning:** an elaboration of the hypothetical learning trajectory. Mathematical Thinking and Learning, Abingdon, v. 6, n. 2, p. 91-104, 2004. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2>. Acesso em: 6 jun. 2020.